ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 2 (429)

УДК 519.216

Ю.В. ЗАЙЦЕВА

УПРАВЛЯЕМЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ СЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В работе исследуется управляемое линейное стохастическое рекуррентное уравнение с коэффициентами, зависящими от последовательности случайных элементов с известным совместным распределением. Рассматривается задача оптимального управления относительно квадратичного функционала стоимости.

Подобные системы изучались в [1] и [2]. В [1] исследуется линейное стохастическое рекуррентное уравнение с коэффициентами, зависящими от марковской цепи.

Используемый в данной статье метод построения оптимального управления отличается от методов указанных работ. При этом оптимальное управление системой, содержащей марковскую цепь, получено как частный случай оптимального управления системой, зависящей от произвольной последовательности случайных элементов. Кроме того, в отличие от [1], стохастические члены рассматриваемого уравнения могут зависеть от решения и управления.

Пусть (Ω, F, P) — полное вероятностное пространство; $\{\theta_k,\ k=\overline{0,N-1}\}$ — последовательность случайных элементов со значениями в измеримом пространстве (Z,Ψ); $\{w_{ik},\ k=\overline{0,N-1}\}$ — последовательность независимых p_i-мерных случайных векторов с $Mw_{ik}=0$ и $Mw_{ik}w_{ik}^*=I_{p_i}$, $i=1,2,3$; случайные последовательности $w_1=\{w_{1k},\ k=\overline{0,N-1}\}$, $w_2=\{w_{2k},\ k=\overline{0,N-1}\}$, $w_3=\{w_{3k},\ k=\overline{0,N-1}\}$ и $\theta=\{\theta_k,\ k=\overline{0,N-1}\}$ взаимно независимы. Обозначим $\theta_{0,k}=\{\theta_i,\ i=\overline{0,k}\}$, $z_{0,k}=\{z_i,\ i=\overline{0,k}\}$, где $z_i\in Z$. Предполагаем, что условные распределения

$$p_0(A)=P(\theta_0\in A),$$
$$p_k(A/z_{0,k-1})=P(\theta_k\in A/\theta_{0,k-1}=z_{0,k-1}),\quad k=\overline{1,N-1},\quad A\in\Psi,$$

известны. Будем использовать обозначения: $\xi_{0,k}=\{\xi_i,\ i=\overline{0,k}\}$, L^d — пространство квадратных матриц размера $d\times d$; если $A\in L^d$, то $[A]_{ij}$ — (i,j)-й элемент матрицы A.

Рассмотрим управляемое рекуррентное стохастическое уравнение

$$\xi_{k+1}=a_k(\theta)\xi_k+b_k(\theta)\eta_k+g_{1k}(\theta,\xi_k)w_{1k}+g_{2k}(\theta,\eta_k)w_{2k}+g_{3k}(\theta)w_{3k},\quad k=\overline{0,N-1}, \tag{1}$$

где $\xi_k\in R^n$; $\eta_k\in R^m$; ξ_0 не зависит от (w_1,w_2,w_3,θ).

Предполагаем, что

$$g_{1k}(\theta,x)=\sum_{j=1}^{n}g_{1kj}(\theta)x_j,\quad g_{2k}(\theta,u)=\sum_{j=1}^{m}g_{2kj}(\theta)u_j,$$

где x_j и u_j — элементы векторов x и u. Коэффициенты $a_k(\theta)$; $b_k(\theta)$; $g_{1kj}(\theta)$, $j=\overline{1,n}$; $g_{2kj}(\theta)$, $j=\overline{1,m}$; $g_{3k}(\theta)$, $k=\overline{0,N-1}$, — Ψ^N-измеримые матричные функции соответствующих размерностей. Будем предполагать, что $a_k(\theta)=a_k(\theta_{0,k})$, $b_k(\theta)=b_k(\theta_{0,k})$, $g_{1kj}(\theta)=g_{1kj}(\theta_{0,k})$, $g_{2kj}(\theta)=g_{2kj}(\theta_{0,k})$, $g_{3k}(\theta)=g_{3k}(\theta_{0,k})$, т.е. коэффиценты уравнения являются неупреждающими функционалами от θ.

Рассмотрим квадратический функционал стоимости

$$J(\eta) = M\left\{ \sum_{k=0}^{N-1} (\xi_k^* m_k \xi_k + \eta_k^* n_k \eta_k) + \xi_N^* H \xi_N \right\}. \tag{2}$$

Здесь $\{m_k,\ k=\overline{0,N-1}\}$, H — симметричные неотрицательно определенные матрицы, $\{n_k,\ k=\overline{0,N-1}\}$ — симметричные положительно определенные матрицы соответствующих размерностей.

Пусть $F_k = \sigma\{\xi_0,\ldots,\xi_k;\theta_0,\ldots,\theta_k\}$. Определим класс допустимых управлений U как совокупность $\{F_k,\ k=\overline{0,N-1}\}$-согласованных процессов η_k с $M|\eta_k|^2<\infty$.

Управление $\eta^o \in U$ будем называть оптимальным, если $J(\eta^o) = \inf\{J(\eta) \mid \eta \in U\}$.

Определим функции $P_k(\cdot) : Z^{k+1} \to L^n$, $R_k(\cdot) : Z^{k+1} \to L^n$, $\delta_k(\cdot) : Z^{k+1} \to L^n$, $\Gamma_k(\cdot) : Z^{k+1} \to L^m$ с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\begin{gathered}
P_N(z_{0,N}) = H,\\
R_k(z_{0,k}) = M\{P_{k+1}(\theta_{0,k+1})/\theta_{0,k} = z_{0,k}\} = \int P_{k+1}(z_{0,k+1})p_{k+1}(dz_{k+1}/z_{0,k}),\\
\left[\delta_k(z_{0,k})\right]_{ij} = \operatorname{tr} g_{1ki}^*(z_{0,k})R_k(z_{0,k})g_{1kj}(z_{0,k}),\\
\left[\Gamma_k(z_{0,k})\right]_{ij} = \operatorname{tr} g_{2ki}^*(z_{0,k})R_k(z_{0,k})g_{2kj}(z_{0,k}),\\
P_k(z_{0,k}) = m_k + a_k^*(z_{0,k})R_k(z_{0,k})a_k(z_{0,k}) - a_k^*(z_{0,k})R_k(z_{0,k})b_k(z_{0,k})\left[b_k^*(z_{0,k})R_k(z_{0,k})b_k(z_{0,k}) + \right.\\
\left. + n_k + \Gamma_k(z_{0,k})\right]^{-1} b_k^*(z_{0,k})R_k(z_{0,k})a_k(z_{0,k}) + \delta_k(z_{0,k}), \quad k=\overline{0,N-1}.
\end{gathered} \tag{3}$$

Отметим, что матрицы $P_k(z_{0,k})$, $R_k(z_{0,k})$, $\delta_k(z_{0,k})$ и $\Gamma_k(z_{0,k})$ неотрицательно определены.

Лемма. *Справедливы соотношения*

$$M\{w_{1k}^* g_{1k}^*(\theta,\xi_k)P_{k+1}(\theta_{0,k+1})g_{1k}(\theta,\xi_k)w_{1k}/\xi_{0,k},\theta_{0,k}\} = \xi_k^*\delta_k(\theta_{0,k})\xi_k, \tag{4}$$

$$M\{w_{2k}^* g_{2k}^*(\theta,\eta_k)P_{k+1}(\theta_{0,k+1})g_{2k}(\theta,\eta_k)w_{2k}/\xi_{0,k},\theta_{0,k}\} = \eta_k^*\Gamma_k(\theta_{0,k})\eta_k, \tag{5}$$

$$M\{w_{3k}^* g_{3k}^*(\theta)P_{k+1}(\theta_{0,k+1})g_{3k}(\theta)w_{3k}/\xi_{0,k},\theta_{0,k}\} = \operatorname{tr} g_{3k}^*(\theta)R_k(\theta_{0,k})g_{3k}(\theta). \tag{6}$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{gathered}
M\{w_{1k}^* g_{1k}^*(\theta,\xi_k)P_{k+1}(\theta_{0,k+1})g_{1k}(\theta,\xi_k)w_{1k}/\xi_{0,k},\theta_{0,k}\} =\\
= M\{\operatorname{tr} w_{1k}w_{1k}^* g_{1k}^*(\theta,\xi_k)P_{k+1}(\theta_{0,k+1})g_{1k}(\theta,\xi_k)/\xi_{0,k},\theta_{0,k}\} =\\
= M\left\{\operatorname{tr}\sum_{i,j} w_{1k}w_{1k}^* g_{1ki}^*(\theta)P_{k+1}(\theta_{0,k+1})g_{1kj}(\theta)(\xi_k)_i(\xi_k)_j/\xi_{0,k},\theta_{0,k}\right\} =\\
= \operatorname{tr}\sum_{i,j} M\{w_{1k}w_{1k}^* g_{1ki}^*(\theta)P_{k+1}(\theta_{0,k+1})g_{1kj}(\theta)/\theta_{0,k}\}(\xi_k)_i(\xi_k)_j.
\end{gathered}$$

Так как w_{1k} и $\theta_{0,k}$ взаимно независимы, то

$$\begin{gathered}
M\{w_{1k}w_{1k}^* g_{1ki}^*(\theta)P_{k+1}(\theta_{0,k+1})g_{1kj}(\theta)/\theta_{0,k}\} = M\{w_{1k}w_{1k}^*\}M\{g_{1ki}^*(\theta)P_{k+1}(\theta_{0,k+1})g_{1kj}(\theta)/\theta_{0,k}\} =\\
= g_{1ki}^*(\theta_{0,k})M\{P_{k+1}(\theta_{0,k+1})/\theta_{0,k}\}g_{1kj}(\theta_{0,k}) = g_{1ki}^*(\theta_{0,k})R_k(\theta_{0,k})g_{1kj}(\theta_{0,k}).
\end{gathered}$$

Таким образом,

$$\begin{gathered}
M\{w_{1k}^* g_{1k}^*(\theta,\xi_k)P_{k+1}(\theta_{0,k+1})g_{1k}(\theta,\xi_k)w_{1k}/\xi_{0,k},\theta_{0,k}\} =\\
= \operatorname{tr}\sum_{i,j} g_{1ki}^*(\theta_{0,k})R_k(\theta_{0,k})g_{1kj}(\theta_{0,k})(\xi_k)_i(\xi_k)_j =\\
= \sum_{i,j}\operatorname{tr} g_{1ki}^*(\theta_{0,k})R_k(\theta_{0,k})g_{1kj}(\theta_{0,k})(\xi_k)_i(\xi_k)_j = \sum_{i,j}\left[\delta_k(\theta_{0,k})\right]_{ij}(\xi_k)_i(\xi_k)_j = \xi_k^*\delta_k(\theta_{0,k})\xi_k.
\end{gathered}$$

Соотношение (4) доказано. Аналогично доказываются равенства (5) и (6). $\square$

Теорема. *Оптимальное управление решением уравнения* (1) *относительно функционала стоимости* (2) *в классе* U *имеет вид*

$$\eta_k^o(\theta) = -\left[b_k^*(\theta)R_k(\theta_{0,k})b_k(\theta) + n_k + \Gamma_k(\theta_{0,k})\right]^{-1} b_k^*(\theta)R_k(\theta_{0,k})a_k(\theta)\xi_k. \qquad (7)$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$M\{\xi_{k+1}^* P_{k+1}(\theta_{0,k+1})\xi_{k+1} - \xi_k^* P_k(\theta_{0,k})\xi_k\} =$$
$$= M\{M\{\xi_{k+1}^* P_{k+1}(\theta_{0,k+1})\xi_{k+1} - \xi_k^* P_k(\theta_{0,k})\xi_k/\xi_{0,k}, \theta_{0,k}\}\}.$$

Используя представление (1) для ξ_{k+1}, формулу (3) и лемму, получим

$$M\{\xi_{k+1}^* P_{k+1}(\theta_{0,k+1})\xi_{k+1} - \xi_k^* P_k(\theta_{0,k})\xi_k/\xi_{0,k}, \theta_{0,k}\} =$$
$$= \xi_k^* a_k^*(\theta)R_k(\theta_{0,k})b_k(\theta)\eta_k + \eta_k^* b_k^*(\theta)R_k(\theta_{0,k})a_k(\theta)\xi_k +$$
$$+\eta_k^* b_k^*(\theta)R_k(\theta_{0,k})b_k(\theta)\eta_k + \eta_k^*\Gamma_k(\theta_{0,k})\eta_k + \operatorname{tr} g_{3k}^*(\theta)R_k(\theta_{0,k})g_{3k}(\theta) -$$
$$-\xi_k^* m_k\xi_k + \xi_k^* a_k^*(\theta)R_k(\theta_{0,k})b_k(\theta)\left[b_k^*(\theta)R_k(\theta_{0,k})b_k(\theta) + n_k + \Gamma_k(\theta_{0,k})\right]^{-1} b_k^*(\theta)R_k(\theta_{0,k})a_k(\theta)\xi_k.$$

Из предыдущего равенства следует

$$M\{\xi_{k+1}^* P_{k+1}(\theta_{0,k+1})\xi_{k+1} - \xi_k^* P_k(\theta_{0,k})\xi_k\} =$$
$$= M\{\xi_k^* a_k^*(\theta)R_k(\theta_{0,k})b_k(\theta)\eta_k + \eta_k^* b_k^*(\theta)R_k(\theta_{0,k})a_k(\theta)\xi_k +$$
$$+\eta_k^* b_k^*(\theta)R_k(\theta_{0,k})b_k(\theta)\eta_k + \eta_k^*\Gamma_k(\theta_{0,k})\eta_k + \operatorname{tr} g_{3k}^*(\theta)R_k(\theta_{0,k})g_{3k}(\theta) -$$
$$-\xi_k^* m_k\xi_k + \xi_k^* a_k^*(\theta)R_k(\theta_{0,k})b_k(\theta)\left[b_k^*(\theta)R_k(\theta_{0,k})b_k(\theta) + n_k + \Gamma_k(\theta_{0,k})\right]^{-1} b_k^*(\theta)R_k(\theta_{0,k})a_k(\theta)\xi_k\}.$$

Прибавим к обеим частям получившегося соотношения $\eta_k^* n_k\eta_k$, перенесем влево $-\xi_k^* m_k\xi_k$ и просуммируем по k от 0 до $N-1$. После несложных преобразований получим

$$J(\eta) = M\xi_0^* P_0(\theta_0)\xi_0 + M\left\{\sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{tr} g_{3k}^*(\theta)R_k(\theta_{0,k})g_{3k}(\theta)\right\} +$$
$$+M\left\{\sum_{k=0}^{N-1}\left(\eta_k + \left[b_k^*(\theta)R_k(\theta_{0,k})b_k(\theta) + n_k + \Gamma_k(\theta_{0,k})\right]^{-1} b_k^*(\theta)R_k(\theta_{0,k})a_k(\theta)\xi_k\right)^*\left[b_k^*(\theta)R_k(\theta_{0,k})b_k(\theta) + \right.\right.$$
$$\left.\left.+n_k + \Gamma_k(\theta_{0,k})\right]\left(\eta_k + \left[b_k^*(\theta)R_k(\theta_{0,k})b_k(\theta) + n_k + \Gamma_k(\theta_{0,k})\right]^{-1} b_k^*(\theta)R_k(\theta_{0,k})a_k(\theta)\xi_k\right)\right\}.$$

В силу того, что матрица

$$b_k^*(\theta)R_k(\theta_{0,k})b_k(\theta) + n_k + \Gamma_k(\theta_{0,k})$$

положительно определена, стоимость управления $J(\eta)$ будет минимальной при (7), т.е.

$$J(\eta^o) = M\xi_0^* P_0(\theta_0)\xi_0 + M\left\{\sum_{k=0}^{N-1} \operatorname{tr} g_{3k}^*(\theta)R_k(\theta_{0,k})g_{3k}(\theta)\right\}. \quad \square$$

Рассмотрим некоторые частные случаи стохастических систем с коэффициентами, зависящими от последовательности случайных элементов.

Пусть управляемая система описывается линейным рекуррентным стохастическим уравнением

$$\xi_{k+1} = a_k(\theta_k)\xi_k + b_k(\theta_k)\eta_k + g_{1k}(\theta_k, \xi_k)w_{1k} + g_{2k}(\theta_k, \eta_k)w_{2k} + g_{3k}(\theta_k)w_{3k}, \quad k = \overline{0, N-1}, \qquad (8)$$

где

$$g_{1k}(\theta_k, x) = \sum_{j=1}^{n} g_{1kj}(\theta_k)x_j, \quad g_{2k}(\theta_k, u) = \sum_{j=1}^{m} g_{2kj}(\theta_k)u_j.$$

Коэффициенты $a_k(\theta_k)$, $b_k(\theta_k)$, $g_{1kj}(\theta_k)$, $j = \overline{1,n}$; $g_{2kj}(\theta_k)$, $j = \overline{1,m}$; $g_{3k}(\theta_k)$, $k = \overline{0,N-1}$, — Ψ-измеримые матричные функции соответствующих размерностей.

Следствие 1. Оптимальное управление решением уравнения (8) относительно функционала стоимости (2) в классе U определяется величиной $\eta_k^o(\theta_k)$, а $\eta_k^o(\theta)$ записано в (7), причем матрицы $R_k(z_{0,k})$ и $\Gamma_k(z_{0,k})$ находятся из рекуррентных соотношений:

$$P_N(z_{0,N}) = H,$$

$$R_k(z_{0,k}) = M\{P_{k+1}(\theta_{0,k+1})/\theta_{0,k} = z_{0,k}\} = \int P_{k+1}(z_{0,k+1})p_{k+1}(dz_{k+1}/z_{0,k}),$$

$$\left[\delta_k(z_{0,k})\right]_{ij} = \operatorname{tr} g_{1ki}^*(z_k)R_k(z_{0,k})g_{1kj}(z_k),$$

$$\left[\Gamma_k(z_{0,k})\right]_{ij} = \operatorname{tr} g_{2ki}^*(z_k)R_k(z_{0,k})g_{2kj}(z_k),$$

$$P_k(z_{0,k}) = m_k + a_k^*(z_k)R_k(z_{0,k})a_k(z_k) - a_k^*(z_k)R_k(z_{0,k})b_k(z_k)\left[b_k^*(z_k)R_k(z_{0,k})b_k(z_k) + \right.$$
$$\left. + n_k + \Gamma_k(z_{0,k})\right]^{-1} b_k^*(z_k)R_k(z_{0,k})a_k(z_k) + \delta_k(z_{0,k}), \quad k = \overline{0,N-1}.$$

Следствие 2. Пусть $\theta_0, \ldots, \theta_{N-1}$ образуют марковскую цепь с областью значений $D = \{1, 2, \ldots, L\}$ и переходными вероятностями

$$p_{ij} = P(\theta_{k+1} = j/\theta_k = i) = P(\theta_{k+1} = j/\theta_0 \ldots \theta_{k-1}, \theta_k = i),$$

где $i, j \in D$. Тогда оптимальное управление решением уравнения (8) относительно функционала стоимости (2) в классе U определяется величиной

$$\eta_k^o = -\left[b_k^*(\theta_k)R_k(\theta_k)b_k(\theta_k) + n_k + \Gamma_k(\theta_k)\right]^{-1} b_k^*(\theta_k)R_k(\theta_k)a_k(\theta_k)\xi_k,$$

где матрицы $R_k(l)$ и $\Gamma_k(l)$, $l = \overline{1,L}$, находятся из рекуррентных соотношений:

$$P_N(l) = H,$$

$$R_k(l) = M\{P_{k+1}(\theta_{k+1})/\theta_k = l\} = \sum_{j=1}^{L} P_{k+1}(j)p_{lj},$$

$$\left[\delta_k(l)\right]_{ij} = \operatorname{tr} g_{1ki}^*(l)R_k(l)g_{1kj}(l),$$

$$\left[\Gamma_k(l)\right]_{ij} = \operatorname{tr} g_{2ki}^*(l)R_k(l)g_{2kj}(l),$$

$$P_k(l) = m_k + a_k^*(l)R_k(l)a_k(l) -$$
$$-a_k^*(l)R_k(l)b_k(l)\left[b_k^*(l)R_k(l)b_k(l) + n_k + \Gamma_k(l)\right]^{-1} b_k^*(l)R_k(l)a_k(l) + \delta_k(l), \quad k = \overline{0,N-1}.$$

Следствие 3. Если $\theta_0, \ldots, \theta_{N-1}$ — последовательность независимых случайных величин, то оптимальное управление решением уравнения (8) относительно функционала стоимости (2) в классе U определяется величиной

$$\eta_k^o = -\left[b_k^*(\theta_k)R_k b_k(\theta_k) + n_k + \Gamma_k(\theta_k)\right]^{-1} b_k^*(\theta_k)R_k a_k(\theta_k)\xi_k,$$

где матрицы R_k и $\Gamma_k(z)$ находятся из рекуррентных соотношений:

$$P_N(z) = H,$$

$$R_k = M\{P_{k+1}(\theta_{k+1})\} = \int P_{k+1}(z)p_{k+1}(dz),$$

$$\left[\delta_k(z)\right]_{ij} = \operatorname{tr} g_{1ki}^*(z)R_k g_{1kj}(z),$$

$$\left[\Gamma_k(z)\right]_{ij} = \operatorname{tr} g_{2ki}^*(z)R_k g_{2kj}(z),$$

$$P_k(z) = m_k + a_k^*(z)R_k a_k(z) -$$
$$-a_k^*(z)R_k b_k(z)\left[b_k^*(z)R_k b_k(z) + n_k + \Gamma_k(z)\right]^{-1} b_k^*(z)R_k a_k(z) + \delta_k(z), \quad k = \overline{0,N-1}.$$

Литература

1. Fragoso M.D. *Discrete-time jump LQS problem* // Int. J. Syst. Sci. – 1989. – V. 20. – № 12. – P. 2539–2545.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. *Управляемые случайные процессы.* – Киев: Наукова Думка, 1977. – 251 с.

Волгоградский государственный университет

Поступила
19.04.1995