ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 2 (429)

УДК 517.551

Р.Н. ГУЗЕЕВ, А.В. ЛОБОДА

О ГОЛОМОРФНЫХ ИНВАРИАНТАХ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ СПИРАЛЕЙ

При изучении геометрии вещественных подмногообразий комплексных пространств представляет интерес вопрос об однородности таких множеств.

Вещественное подмногообразие M комплексного пространства $\mathbb{C}^2$ называем однородным (относительно голоморфных преобразований $\mathbb{C}^n$), если для любой пары точек $p_1, p_2 \in M$ существуют окрестности $u_1(p_1)$, $u_2(p_2)$ и биголоморфное отображение $\varphi : u_1(p_1) \to u_2(p_2)$, переводящее M в себя, а выделенные точки — одну в другую.

В пространстве $\mathbb{C}^2$ с координатами $z = x + iy$, $w = u + iv$ имеется достаточно большое семейство однородных вещественных гиперповерхностей. А именно, всякая трубчатая гиперповерхность (трубка)

$$M = \gamma + i\mathbb{R}^2_{(y,v)}$$

над аффинно-однородной кривой $\gamma \subset \mathbb{R}^2_{(x,u)}$ является голоморфно-однородной.

Список гладких аффинно-однородных кривых известен (см., напр., [1]). Локально каждая из них есть аффинный образ одной из следующих кривых:

$$\begin{array}{ll} 1)\ \ u = x^s\ \ (-1 \le s < 1), & 2)\ \ u = \ln x, \\ 3)\ \ u = x \cdot \ln x, & 4)\ \ r = e^{a\varphi}\ \ (0 \le a < \infty). \end{array} \tag{1}$$

Естественно поставить вопрос: не являются ли трубки над различными кривыми из списка (1) голоморфно эквивалентными? Для ответа на этот вопрос можно воспользоваться нормальной формой Мозера [2] для уравнения гиперповерхности комплексного пространства.

Поясним идею использования этого понятия в случае трубок. Пусть аналитическая кривая $\gamma \subset \mathbb{R}^2_{(x,u)}$ задана вблизи одной из своих точек уравнением

$$u = \alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x - x_0)^k. \tag{2}$$

Если $\alpha''(x_0) \ne 0$, то преобразованием

$$x = x_0 + x^* - \frac{\alpha_3}{4\alpha_2}u^*, \quad u = u_0 + \alpha_1 x^* + \left(\frac{\alpha_2}{2} - \frac{\alpha_1\alpha_3}{4\alpha_2}\right)u^* \tag{3}$$

плоскости $\mathbb{R}^2_{(x,u)}$ это уравнение можно привести к нормализованному виду

$$u = 2x^2 + \lambda_4 x^4 + \lambda_5 x^5 + \lambda_6 x^6 + \cdots \tag{4}$$

При этом, например,

$$\lambda_4 = \frac{2\alpha_4}{\alpha_2} - \frac{5}{8}\left(\frac{2\alpha_3}{\alpha_2}\right), \tag{5}$$

и аналогичные, но более сложные, формулы справедливы для старших коэффициентов λ_k. Ссылаясь на возможность приведения уравнения (4) к нормальной форме Мозера, отметим особую роль выражения $Q = \lambda_6 - \frac{4}{5}\lambda_4^2$. В [3] доказано, что оно обращается в нуль только для однородных трубок, голоморфно эквивалентных сфере. Если же $Q \neq 0$, то голоморфными инвариантами трубки являются выражения

$$\varkappa_0 = \lambda_4 |Q|^{-1/2}, \quad \varkappa_1 = \left(\lambda_7 - \frac{15}{7}\lambda_4\lambda_5\right)^2 |Q|^{-5/2} \operatorname{sgn} Q. \tag{6}$$

Основная цель этой статьи — вычисление $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$ для логарифмических спиралей. Отметим, что для трех первых кривых из списка (1) определение инвариантов (6) не представляет особых трудностей. Для логарифмической же спирали, заданной полярным уравнением $r = e^{a\varphi}$ $(a > 0)$ ситуация не так проста. Непосредственная реализация описанного выше способа нахождения $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$ требует больших вычислений.

Ниже мы обойдем эти трудности. Основой предлагаемого подхода является следующее известное свойство логарифмических спиралей: угол между радиус-вектором точки такой кривой и касательной в этой точке сохраняет постоянное значение. Это означает, что в декартовых координатах логарифмическая спираль $r = e^{a\varphi}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению 1-го порядка

$$u' = \frac{x + au}{ax - u}. \tag{7}$$

Последнее уравнение позволяет довольно легко вычислить младшие коэффициенты разложения (2) для спиралей. Например, в точке $(1, 0)$ плоскости $\mathbb{R}^2_{(x,u)}$ получаем при $a > 0$

$$\begin{gathered} \alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = \frac{1}{a}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a^2} + 1\right), \quad \alpha_3 = \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{1}{a^1} + 1\right)\left(\frac{3}{a^2} - 1\right), \\ \alpha_4 = \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{1}{a^2} + 1\right)\left(\frac{15}{a^4} - \frac{7}{a^2} + 2\right). \end{gathered} \tag{8}$$

Старшие коэффициенты разложения (2) определяются на таком пути с гораздо большими трудностями. Избегая прямых вычислений, заметим, что коэффициент $\alpha_2 = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a^2} + 1\right)$ отличен от нуля. Это дает возможность перейти от исходного разложения $u = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x-1)^k$ с младшими коэффициентами вида (8) к уравнению спирали вида (4).

В новых координатах (3) левая часть уравнения (7), описывающего спираль, т.е. $u'(x)$, превратится в дробь вида $\frac{a_2 + b_2(u^*)'}{a_1 + b_1(u^*)'}$. Правая же часть (7) сохранит дробно-линейную структуру. Это означает, что в нормализованных координатах спираль можно задать дифференциальным уравнением

$$u' = \frac{A_1 + B_1 x + C_1 u}{1 + B_2 x + C_2 u}, \tag{9}$$

аналогичным уравнению (7).

Отметим, что из (8) и (5) можно вычислить коэффициент λ_4 нормализованного уравнения спирали. Он оказывается равным $\frac{1}{18}\left(\frac{9}{a^2} + 1\right)$. Коэффициент λ_5 после преобразования (3) принимает значение $-\frac{2}{15 \cdot 9}\left(\frac{9}{a^2} + 1\right)$.

Тогда еще одной линейной заменой

$$x = \varepsilon x^*, \quad u = \varepsilon^2 u^*$$

добьемся равенства $\lambda_4 = 1$ в уравнении спирали. Новый коэффициент λ_5 при этом можно сделать положительным и равным $\frac{|\lambda_5|}{|\lambda_4|^{3/2}} = \frac{4\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+9}}$.

Замечание. Для окружности $(a = 0)$ последняя формула также справедлива.

Лемма. *Для всякого решения*

$$u = 2x^2 + x^4 + \mu_5 x^5 + \mu_6 x^6 + \mu_7 x^7 + \cdots \tag{10}$$

уравнения (9) *справедливы равенства*

$$\mu_6 = 1 + \frac{5}{4}\mu_5^2, \quad \mu_7 = \left(\frac{17}{7} + \frac{25}{14}\mu_5^2\right)\mu_5.$$

Уравнение (9) *при этом имеет вид*

$$u' = (4x - 5\mu_5 u)\Big/\left(1 - \frac{5}{2}\mu_5 x - \frac{1}{2}u\right).$$

Для доказательства леммы запишем (9) в виде

$$u'(1 + B_2 x + C_2 u) = A_1 + B_1 x + C_1 u.$$

Подставляя сюда разложение (10) и отделяя в последнем равенстве младшие степени x, получим систему уравнений

$$x^0 : \ 0 = A_1, \quad x^1 : \ 4 = B_1, \quad x^2 : \ 4B_2 = 2C_1,$$
$$x^3 : \ 8C_2 + 4 = 0, \quad x^4 : \ 4B_2 + 5\mu_5 = C_1.$$

Из этой системы получается требуемый вид для правой части уравнения (9). Слагаемые степеней 5 и 6 по переменной x дадут тогда нужные формулы для μ_6 и μ_7.

Теорема. *Голоморфные инварианты кривых* $r = e^{a\varphi}$ $(0 \le a < \infty)$ *имеют вид*

$$\varkappa_0 = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \sqrt{\frac{a^2+9}{a^2+1}}; \quad \varkappa_1 = \frac{32 \cdot 40}{3 \cdot 49} \cdot \frac{a^2}{\sqrt{(a^2+9)(a^2+1)}}.$$

Для вычисления этих инвариантов нужно подставить в формулы (6) $\lambda_4 = 1$, $\lambda_5 = \mu_5$, а также только что найденные выражения для μ_6 и μ_7 вместо λ_6 и λ_7 соответственно. Тогда, например,

$$Q = \lambda_6 - \frac{4}{5}\lambda_4^2 = 1 + \frac{5}{4}\mu_5^2 - \frac{4}{5} = \frac{1}{20}(4 + 25\mu_5^2) > 0.$$

В то же время

$$\lambda_7 = \frac{15}{7}\lambda_4\lambda_5 = \left(\frac{17}{7} + \frac{25}{4}\mu_5^2\right)\mu_5 - \frac{15}{7}\mu_5 = \frac{1}{7}\mu_5(4 + 25\mu_5^2).$$

С учетом $\mu_5 = \frac{4\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+9}}$ отсюда получаются окончательные формулы для $\varkappa_0$ и $\varkappa_1$.

В силу монотонной зависимости $\varkappa_0$ от a трубки над разными логарифмическими спиралями голоморфно неэквивалентны друг другу. Отметим, что для остальных однородных кривых (т.е. $u = x^s$ $(-1 \le s < 1)$, а также примыкающих к ним $u = \ln x$, $u = x \ln x$) коэффициенты λ_4 и λ_6 вычисляются в несферическом случае по следующим формулам:

$$\lambda_4 = -\frac{1}{18x_0^2}(s-2)(2s-1), \quad \lambda_6 = -\frac{1}{180x_0^4}s(s-2)(2s-1).$$

Это означает, что $\varkappa_0$ не превосходит здесь значения $\sqrt{5}/3$, являющегося нижней границей этого же инварианта для спиралей. Следовательно, трубчатые поверхности над спиралями отличаются и от остальных трубок над однородными кривыми (1).

Литература

1. Широков П.А., Широков А.П. *Аффинная дифференциальная геометрия.* – М.: Физматгиз, 1959. – 319 с.
2. Chern S.S., Moser J.K. *Real hypersurfaces in complex manifolds* // Acta Math. – 1974. – V. 133. – № 3–4. – P. 219–271.
3. Лобода А.В. *О некоторых инвариантах трубчатых гиперповерхностей в* $\mathbb{C}^2$ // Матем. заметки. – 1996. – Т. 59. – № 2. – С. 211–223.

Воронежская государственная
архитектурно-строительная академия

Поступила
06.03.1995