ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 11 (462)

Посвящается Анатолию Дмитриевичу Ляшко — учителю и наставнику

УДК 519.6

Л.А. КРУКИЕР, Л.Г. ЧИКИНА

КОСОСИММЕТРИЧЕСКИЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ

1. Введение

К решению систем линейных алгебраических уравнений сводится подавляющее большинство задач вычислительной математики. В настоящее время предложено большое количество алгоритмов решения задач линейной алгебры [1], [2], большинство из которых эффективно работают с матрицами специального вида (трехдиагональные, симметричные, ленточные, теплициевые, разреженные и др.).

Задачи конвекции-диффузии являются модельными для широкого круга прикладных задач таких как, например, гидродинамика, тепло- и массообмен, движение летательных аппаратов. Аппроксимация этих задач конечными разностями или конечными элементами сводит исходную непрерывную задачу к необходимости решать систему линейных алгебраических уравнений. Использование для ее решения итерационных методов осложняется тем, что соответствующие системы, как правило, несамосопряжены и имеют большую размерность. Вместе с тем, разработанный аппарат теории итерационных методов [2]–[4] не всегда удается эффективно использовать для решения задач с достаточно большой несамосопряженной частью. Однако такие системы получаются, например, в результате использования центрально-разностных схем для аппроксимации уравнения конвекции-диффузии с малым параметром при старшей производной [5].

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$Au = f, \tag{1}$$

и пусть матрица A системы линейных алгебраических уравнений диссипативна.[1] Отметим, что для любой действительной матрицы A справедливо разложение $A = A_0 + A_1$ на симметричную $A_0 = \frac{1}{2}(A + A^*) = A_0^*$ и кососимметричную $A_1 = \frac{1}{2}(A - A^*) = -A_1^*$ составляющие части исходной матрицы. Причем, для кососимметричной составляющей имеет место представление $A_1 = K_H + K_B$, где K_H и K_B — строго нижняя и верхняя треугольные части матрицы A_1. Заметим, что для них справедливы равенства $K_H = -K_B$, $K_B = -K_H^*$.

Для решения системы (1) рассмотрим одношаговый двухслойный стационарный итерационный метод, записанный в каноническом виде [2]

$$B\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} + Ay_k = f \tag{2}$$

с некоторым начальным вектором y_0 и вещественным параметром $\tau > 0$.

[1] Матрица A называется *диссипативной*, если ее симметрическая составляющая положительно определена.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 00-01-00011.

Будем считать, что A и B — невырожденные линейные операторы, действующие в конечномерном гильбертовом пространстве H. Для векторов ошибок $z_k = y_k - y$ итерационного метода (2) выполняется соотношение

$$z_{k+1} = Gz_k, \tag{3}$$

где

$$G = B^{-1}(B - \tau A) \tag{4}$$

— оператор перехода.

Для сходимости итерационного процесса (2) в энергетическом пространстве H_D достаточно потребовать [2] $\|z_{k+1}\|_D < \rho\|z_k\|_D$, $0 < \rho \leq 1$. В силу соотношения (3) сходимость итерационного метода (2) целиком определяется оператором перехода (4).

В ряде работ [6], [7] разностные схемы с центрально-разностными аппроксимациями производных для стационарной задачи конвекции-диффузии не рекомендовались для использования в силу их неустойчивости при решении получаемой системы.

Более тщательное теоретическое и численное исследование этой несамосопряженной задачи на основе общей теории итерационных методов [8]–[10] позволяет построить сходящиеся методы для решения систем с сильно несимметрическими[1] диссипативными матрицами. Особенностью таких матриц является отсутствие в них диагонального преобладания, что приводит к расходимости или очень медленной сходимости таких эффективных итерационных методов как методы вариационного типа или метод неполной факторизации [11].

2. Кососимметрические итерационные методы (КМ)

В [12] было предложено использовать при решении сильно несимметричных задач треугольные части K_H и K_B кососимметрической составляющей матрицы системы (1) для построения оператора B итерационного метода (2).

Представим оператор B в виде суммы симметричной и кососимметричной составляющих $B = B_0 + B_1$ и потребуем для его кососимметрической составляющей выполнения соотношения [13]

$$B_1 = \tau A_1. \tag{5}$$

Соотношение (5), связывающее кососимметрические составляющие матрицы исходной системы A и оператора итерационного метода B, обеспечивает самосопряженность оператора $B - \tau A$, входящего в оператор перехода G,

$$B - \tau A = B_0 + B_1 - \tau(A_0 + A_1) = B_0 - \tau A_0.$$

Равенство (5) позволяет оценить норму оператора G и дает возможность применить принцип регуляризации — общий подход к получению итерационных методов заданного качества [14]. Улучшение качества итерационных методов при этом достигается за счет регуляризатора — некоторого оператора, входящего в оператор итерационного метода. При выполнении (5) регуляризатором итерационного метода (2) будет симметрическая составляющая B_0 оператора B.

[1]Матрица A называется сильно несимметричной, если в какой-либо норме $\|A_1\| \gg \|A_0\|$.

3. Сходимость КМ

При выполнении условия (5) оператор перехода метода имеет вид $G = (B_0+\tau A_1)^{-1}(B_0-\tau A_0)$. Потребуем, чтобы оператор B метода (2) был диссипативен, т. е. $B_0 = B_0^* > 0$. Тогда

$$G = B_0^{-1/2}(E + \tau B_0^{-1/2} A_1 B_0^{-1/2})^{-1}(E - \tau B_0^{-1/2} A_0 B_0^{-1/2}) B_0^{1/2}.$$

Введем операторы $P_0 = B_0^{-1/2} A_0 B_0^{-1/2} = P_0^* > 0$, $P_1 = B_0^{-1/2} A_1 B_0^{-1/2} = -P_1^*$ и векторы $v_k = B_0^{1/2} z_k$. Соотношение (3) примет вид $v_{k+1} = \widehat{G} v_k$, где

$$\widehat{G} = (E + \tau P_1)^{-1}(E - \tau P_0). \tag{6}$$

Таким образом, для любого вектора z ($v = B_0^{1/2} z$) справедлива формула $\|Gz\|_{B_0} = \|\widehat{G}v\|$, $\|G\|_{B_0} = \|\widehat{G}\|$, где $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, $\|A\| = \sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2}$. Тогда

$$\|v_{k+1}\| \le \|\widehat{G} v_k\| \le \|\widehat{G}\|\,\|v_k\| \le \|\widehat{G}^k\|\,\|v_0\| \le \|\widehat{G}\|^k \|v_0\|. \tag{7}$$

Таким образом, имеет место

Теорема 1 ([13]). *Пусть диссипативный оператор B удовлетворяет соотношению* (5). *Тогда для сходимости итерационного метода* (2) *в энергетическом пространстве H_{B_0} достаточно выполнения неравенства*

$$\|(E + \tau P_1)^{-1}(E - \tau P_0)\| < 1$$

или

$$\|E - \tau P_0\| < 1, \tag{8}$$

где операторы $P_0 = B_0^{-1/2} A_0 B_0^{-1/2}$, $P_1 = B_0^{-1/2} A_1 B_0^{-1/2}$.

Уравнение для погрешностей $z_k = y_k - y$ метода (2) имеет вид

$$B\frac{z_{k+1} - z_k}{\tau} + A z_k = 0, \tag{9}$$

в котором z_{k+1} и z_k удовлетворяют соотношению (3).

Лемма 1. *Пусть A и B — диссипативные операторы и оператор B удовлетворяет соотношению* (5). *Операторные неравенства для симметричных составляющих операторов A и B*

$$\frac{1-\rho}{\tau} B_0 < A_0 < \frac{1+\rho}{\tau} B_0, \tag{10}$$

где $0 < \rho < 1$ — число, достаточны для того, чтобы при любых $z_0 \in H$ для решения задачи (9) *выполнялась оценка*

$$\|z_{k+1}\|_{B_0} < \rho \|z_k\|_{B_0}. \tag{11}$$

Доказательство. Оценку (11) можно записать в виде $\|v_{k+1}\| < \rho\|v_k\|$, где $v_k = B_0^{1/2} z_k$. Согласно проделанным выше выкладкам функция v_k удовлетворяет уравнению $v_{k+1} = \widehat{G} v_k$, где оператор $\widehat{G}$ определен соотношением (6). Для решения этого уравнения в силу неравенств (7) и (8) имеем $\|v_{k+1}\| < \|\widehat{G} v_k\| \le \|E - \tau P_0\|\,\|v_k\|$, где оператор $P_0 = B_0^{-1/2} A_0 B_0^{-1/2}$.

Таким образом, оценка

$$\|E - \tau P_0\| < \rho \tag{12}$$

является достаточным условием выполнения оценки $\|v_{k+1}| < \rho\|v_k\|$.

В силу симметрии оператора P_0 и свойств операторных неравенств ([15], с. 99) неравенство (12) можно преобразовать следующим образом: $-\rho E \le E - \tau P_0 \le \rho E$. Подставляя выражение

$P_0 = B_0^{-1/2}A_0B_0^{-1/2}$, получим $\frac{1-\rho}{\tau}E \le B_0^{-1/2}A_0B_0^{-1/2} \le \frac{1+\rho}{\tau}E$. Умножая последнее неравенство слева и справа на $B_0^{1/2}$, приходим к неравенству (10). $\square$

Следствие ([13]). Пусть A и B — диссипативные операторы и оператор B удовлетворяет соотношению (5). Тогда для сходимости итерационного метода (2) в энергетическом пространстве H_{B_0} достаточно выполнения операторного неравенства

$$B_0 > \frac{\tau}{2}A_0. \tag{13}$$

Доказательство этого факта следует из неравенства (10) при $\rho = 1$.

4. Оценка скорости сходимости КМ

Для оценки скорости сходимости метода надо найти такое значение τ, при котором значение ρ в (11) будет минимальным.

Поскольку $E - \tau P_0$ — симметричный оператор, его норма совпадает с его спектральным радиусом. Тогда известно ([2], с. 286; [4], с. 204), что

$$\rho = \max\{|1-\tau\gamma_1|, |1-\tau\gamma_2|\}, \tag{14}$$

где $\gamma_1 = \lambda_{\min}(P_0)$, $\gamma_2 = \lambda_{\max}(P_0)$.

Оптимальное значение функции $\rho = \rho(\tau)$ вычисляется в случае независимости величин γ_1 и γ_2 от параметра τ по формуле ([2], с. 286) $\tau_{\text{opt}} = \frac{2}{\gamma_1+\gamma_2}$, а в случае зависимости этих величин от итерационного параметра для его явного нахождения необходимо решить нелинейное уравнение $\tau_{\text{opt}} = \frac{2}{\gamma_1(\tau_{\text{opt}})+\gamma_2(\tau_{\text{opt}})}$. Подставляя значение τ_{opt} в (14), получим

$$\rho_{\text{opt}} = \rho(\tau_{\text{opt}}) = \frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_2+\gamma_1} = \frac{\xi-1}{\xi+1}, \tag{15}$$

где величина $\xi = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ есть число обусловленности оператора P_0. Отметим, что операторы P_0 и $B_0^{-1}A_0$ подобны.

Теорема 2. *Пусть выполняется соотношение* (5), *оператор* B *диссипативен и для симметричных составляющих* A *и* B *справедливы неравенства*

$$\gamma_1 B_0 \le A_0 \le \gamma_2 B_0, \tag{16}$$

где $0 < \gamma_1 \le \gamma_2$. *Тогда при*

$$\tau = \frac{2}{\gamma_1+\gamma_2} \tag{17}$$

итерационный метод (2) *сходится, и для погрешности справедлива оценка* $\|y_k - y\|_B \le \rho^n\|y_0 - y\|_B$, *где* $\|v\|_B = \sqrt{(Bv,v)}$ *и* $\rho = \frac{\xi-1}{\xi+1}$, $\xi = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$.

Для доказательства теоремы 2 достаточно заметить, что матричные неравенства (16) можно переписать в виде (10), где величина ρ определена соотношениями (15), а значение τ вычисляется по формуле (17). Наиболее точными константами, с которыми выполняются неравенства (16), являются $\gamma_1 = \lambda_{\min}(B_0^{-1}A_0)$ и $\gamma_2 = \lambda_{\max}(B_0^{-1}A_0)$.

5. Возможные способы выбора оператора КМ

Рассмотрим вид итерационных методов КМ, в которых оператор метода определяется соотношением

$$B = B_C + 2\tau K_H \tag{18}$$

или

$$B = B_C + 2\tau K_B, \tag{19}$$

где K_H и K_B — треугольные части кососимметрической составляющей A_1 из (2), а B_c — некоторый симметричный оператор.

Для операторов (18) и (19) справедливы следующие свойства:

1) оператор $B - \tau A$ самосопряжен;
2) кососимметрическая составляющая B_1 удовлетворяет соотношению (8);
3) симметрические составляющие имеют вид
   $B_0 = B_C + \tau K$ для оператора (18),
   $B_0 = B_C - \tau K$ для оператора (19),
   где $K = K_H + K_H^* = -(K_B + K_B^*) = K^*$.

Лемма 2 ([10]). *Пусть матрица $Z \neq 0$ с элементами $\{z_{ij}\}_1^k$ имеет вид $Z = R+R^*$, где R — строго верхняя или нижняя треугольная матрица. Тогда спектр $\sigma(Z)$ матрицы Z вещественен, состоит из положительных, отрицательных и нулевых собственных чисел и $-\|Z\|_\infty \leq \sigma(Z) \leq \|Z\|_\infty$, где $\|Z\|_\infty = \max\limits_i \sum\limits_{i=1}^n |z_{ij}|$ — максимальная строчная норма (C-норма).*

Более того, если матрица Z двуциклическая ([1], с. 131), *то ее собственные числа расположены симметрично относительно начала координат и $-\|Z\|_2 \leq \sigma(Z) \leq \|Z\|_2$, где $\|Z\| = \rho(Z)$ — спектральная норма.*

Матрица $K = K_H + K_H^* = K^*$ удовлетворяет условиям леммы 2 и

$$-\|K\|_\infty E \leq K \leq \|K\|_\infty E. \tag{20}$$

Ограничимся рассмотрением оператора метода (18), т. к. границы спектра симметрических составляющих у операторов (18) и (19) совпадают. Исследование сходимости КМ с оператором метода (18) основано на теореме 2. В основе этой теоремы лежит предположение о том, что положительные симметрические составляющие несамосопряженных операторов A и B связаны неравенствами (16). Поэтому прежде всего надо найти константы в неравенстве (16) для оператора (18).

Лемма 3. *Пусть существуют положительные постоянные α_1, α_2 и c_1, c_2 такие, что выполнены неравенства*

$$\alpha_1 E \leq A_0 \leq \alpha_2 E, \tag{21}$$

$$c_1 E \leq B_C \leq c_2 E. \tag{22}$$

Тогда для операторов A_0 и $B_0 = B_C + \tau K$ справедливы неравенства (16) *при*

$$\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{c_2 + \tau\gamma_3}, \quad \gamma_2 = \frac{\alpha_2}{c_1 - \tau\gamma_3}, \tag{23}$$

где $\gamma_3 = \|A_1\|_\infty$.

Доказательство. C-нормы матриц K и A_1 совпадают, т. к. они имеют одинаковые по модулю элементы. Неравенства (20) будут иметь вид $-\|A_1\|_\infty E \le K \le \|A_1\|_\infty E$.

Рассмотрим симметричную составляющую оператора (18). Так как из (21) $E \ge \frac{1}{\alpha_2}A_0$, то в (22) $B_C \ge c_1 E \ge \frac{c_1}{\alpha_2}A_0$ и

$$B_0 = B_C + \tau K \ge B_C - \tau\|A_1\|_\infty E \ge \left(\frac{c_1}{\alpha_2} - \tau\frac{\|A_1\|_\infty}{\alpha_2}\right)A_0 = \frac{c_1 - \tau\|A_1\|_\infty}{\alpha_2}A_0.$$

Таким образом, если $c_1 - \tau\|A_1\| > 0$, то $A_0 \le \gamma_2 B_0$, где $\gamma_2 = \frac{\alpha_2}{c_1-\tau\|A_1\|_\infty}$. Так как из (21) $E \le \frac{1}{\alpha_1}A_0$, то в (22) $B_C \le c_2 E \le \frac{c_2}{\alpha_1}A_0$ и

$$B_0 = B_C + \tau K \le B_C + \tau\|A_1\|_\infty E \le \left(\frac{c_2}{\alpha_1} + \tau\frac{\|A_1\|_\infty}{\alpha_1}\right)A_0 = \frac{c_2 + \tau\|A_1\|_\infty}{\alpha_1}A_0,$$

т. е. $A_0 \ge \gamma_1 B_0$, где $\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{c_2+\tau\|A_1\|_\infty}$. □

Замечание. В качестве констант α_1, α_2 и c_1, c_2 можно взять соответственно минимальные и максимальные собственные значения операторов A_0 и B_C.

Теорема 3. *Пусть A и B — диссипативные операторы, удовлетворяющие условиям леммы 3. При*

$$\tau = \frac{4c_1c_2}{(\alpha_2c_2 + \alpha_1c_1) + 2(c_2 - c_1)\gamma_3 + \sqrt{(\alpha_2c_2 - \alpha_1c_1 + 2(c_2 + c_1)\gamma_3)^2 + 4\alpha_1\alpha_2c_1c_2}} \tag{24}$$

итерационный метод (4) *с оператором метода* (18) *сходится, причем для погрешности справедлива оценка*

$$\|y_k - y\|_B \le \rho^k\|y_0 - y\|_B, \tag{25}$$

где

$$\rho = 1 - \frac{4\xi\eta}{2\mu(\eta+1) + 1 + \xi\eta + \sqrt{(1 - \xi\eta + 2\mu(\eta+1))^2 + 4\xi\eta}}, \tag{26}$$

$\xi = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, $\eta = \frac{c_1}{c_2}$, $\mu = \frac{\gamma_3}{\alpha_2}$.

Доказательство. В лемме 3 установлено, что при любом $\tau > 0$ симметричные составляющие операторов A и B рассматриваемого итерационного метода связаны неравенствами (16), где $\gamma_1 = \gamma_1(\tau)$ и $\gamma_2 = \gamma_2(\tau)$ определены согласно (23). Поэтому выполнены все предположения теоремы 3. Согласно этой теореме для выполнения оценки (25) достаточно найти значение τ_{opt} как решение уравнения

$$\tau_{\text{opt}} = \frac{2}{\gamma_1(\tau_{\text{opt}}) + \gamma_2(\tau_{\text{opt}})} = \frac{2}{\frac{\alpha_1}{c_1+\tau_{\text{opt}}\gamma_3} + \frac{\alpha_2}{c_2-\tau_{\text{opt}}\gamma_3}}.$$

Таким образом, значением τ_{opt} является положительный корень квадратного уравнения

$$\tau_{\text{opt}}^2\gamma_3(\alpha_2 - \alpha_1 + 2\gamma_3) + \tau_{\text{opt}}((\alpha_1c_2 + \alpha_2c_2) + 2\gamma_3(c_2 - c_1)) - 2c_2c_1 = 0,$$

и он вычисляется по формуле (24).

Найдем оценку асимптотической скорости сходимости итерационного метода (2) с оператором метода (18). Вычислим значение

$$\rho = \rho(\tau_{\text{opt}}) = 1 - \tau_{\text{opt}}\gamma_1 = 1 - \frac{\tau_{\text{opt}}\alpha_1}{c_2 + \tau_{\text{opt}}\gamma_3} = 1 - \frac{\alpha_1}{\frac{c_2}{\tau_{\text{opt}}} + \gamma_3},$$

$$\rho = 1 - \frac{4\alpha_1c_1}{(\alpha_2c_2 + \alpha_1c_1) + 2(c_2 + c_1)\gamma_3 + \sqrt{(\alpha_2c_2 - \alpha_1c_1 + 2(c_2 + c_1)\gamma_3)^2 + 4\alpha_1\alpha_2c_1c_2}}.$$

Введя соответствующие обозначения, получим (26).

Скорость сходимости зависит от чисел обусловленности матриц A_0, B_c и условия подчиненности норм (меры несимметрии) кососимметрической и симметричной составляющей исходной матрицы системы $\|A_1\| = \mu\|A_0\|$. $\square$

Замечание. Если $c_1 = c_2 = c$, то значение τ_{opt} увеличивается (уменьшается) в c раз, а скорость сходимости метода не зависит от значения c.

6. Треугольные кососимметрические методы (ТКМ)

В общей теории итерационных методов [2] показано, что эффективность метода существенным образом зависит от выбора оператора B. Конструирование легко обратимых операторов B является актуальной и важной задачей. Наиболее перспективным направлением является использование оператора B с треугольной структурой. При этом особенно важно то, что благодаря треугольной структуре оператора B итерационный метод на каждой новой итерации становится прямым методом.

Треугольную структуру КМ обеспечит диагональный оператор B_c. В [12], [13] были приведены теоретические и численные результаты, связанные с выбором оптимального итерационного параметра и оценкой скорости сходимости метода ТКМ

$$B = cE + 2\tau K_H.$$

В [5], [8] исследован оператор

$$B = E + \tau^2 K_H K_H^* + 2\tau K_H.$$

Он более эффективен, но имеет треугольную структуру только в одномерном случае.

7. Попеременно-треугольные кососимметрические методы (ПТКМ)

Если оператор B итерационного метода представляет собой произведение конечного числа экономичных операторов, то он также экономичен. Так экономичным является попеременно-треугольный оператор [9]

$$B = (E + \tau K_H)(E + \tau K_B), \tag{27}$$

а соответствующий итерационный метод с этим оператором назовем ПТКМ.

Оператор (27) удовлетворяет условию (5), а его симметрическая составляющая имеет вид $B_0 = E + \tau^2 K_H K_B = E - \tau^2 K_H K_H^*$.

Исследование сходимости ПТКМ основано на теореме 2. Надо найти константы неравенства (16) для оператора (27).

Лемма 4. *Пусть существуют положительные постоянные α_1, α_2 такие, что выполнены неравенства* (21) *и $K_H K_H^* \le \frac{\gamma_3}{4}(K_H + K_H^*)$, где $\gamma_3 = \|A_1\|_\infty$. Тогда для операторов A_0 и $B_0 = E - \tau^2 K_H K_H^*$ справедливы неравенства* (16) *с $\gamma_1 = \alpha_1$, $\gamma_2 = \frac{4\alpha_2}{4-\tau^2\gamma_3^2}$.*

Доказательство. Сначала докажем, что если $4K_H K_H^* \le \sigma(K_H + K_H^*)$, то $\sigma = \gamma_3 \ge \lambda_{\max}(K_H + K_H^*)$. Действительно, с одной стороны, справедливо неравенство

$$2(K_H K_H^* + K_H^* K_H) \le \sigma(K_H + K_H^*),$$

т. к. является суммой неравенств $4K_H K_H^* \le \sigma(K_H + K_H^*)$ и $4K_H^* K_H \le \sigma(K_H + K_H^*)$. С другой стороны, т. к. $(K_H - K_H^*)^2 \le 0$, то $(K_H + K_H^*)^2 \le 2(K_H K_H^* + K_H^* K_H)$. Таким образом, получаем неравенство $(K_H + K_H^*)^2 \le \sigma(K_H + K_H^*)$, которое эквивалентно неравенству $K_H + K_H^* \le \sigma E$. В силу леммы 1 $\lambda_{\max}(K_H + K_H^*) \le \gamma_3$, где $\gamma_3 = \|K_H + K_H^*\|$.

Теперь рассмотрим оператор $B_0 = E - \tau^2 K_H K_H^*$. Оператор $K_H K_H^*$ неотрицателен, т. к. K_H — строго нижняя треугольная матрица. В силу (21) $E \le \frac{1}{\alpha_1} A_0$, значит, $B_0 \le E \le \frac{1}{\alpha_1} A_0$. Таким образом, $A_0 \ge \alpha_1 B_0$ и $\gamma_1 = \alpha_1$. Так как $K_H K_H^* \le \frac{\gamma_3}{4}(K_H + K_H^*) \le \frac{\gamma_3^2}{4} E$, а из (21) $E \ge \frac{1}{\alpha_2} A_0$, то $B_0 \ge E - \tau^2 \frac{\gamma_3^2}{4} E \ge \frac{4-\tau^2\gamma_3^2}{4\alpha_2} A_0$ и при $4 - \tau^2\gamma_3^2 > 0$ имеет место $\gamma_2 = \frac{4\alpha_2}{4-\tau^2\gamma_3^2}$. $\square$

Теорема 4. *Пусть A и B — диссипативные операторы, удовлетворяющие условиям леммы 4. Если параметр* $\tau = \tau_{\mathrm{opt}} \in \left(0, \frac{\sqrt{\alpha_2^2+4\gamma_3^2}-\alpha_2}{\gamma_3^2}\right)$ *является корнем уравнения*

$$\alpha_1\gamma_3^2\tau^3 - 2\gamma_3^2\tau^2 - 4(\alpha_1+\alpha_2)\tau + 8 = 0, \tag{28}$$

то итерационный метод (2) с оператором метода (27) сходится, причем для погрешности справедлива оценка

$$\|y_k - y\|_B \le \rho^k \|y_0 - y\|_B,$$

где $\rho = \rho(\tau_{\mathrm{opt}}) = 1 - \tau_{\mathrm{opt}}\alpha_1$.

Доказательство. Согласно теореме 2 и лемме 4 найдем значение τ_{opt} как решение уравнения

$$\tau_{\mathrm{opt}} = \frac{2}{\gamma_1(\tau_{\mathrm{opt}}) + \gamma_2(\tau_{\mathrm{opt}})} = \frac{2}{\alpha_1 + \frac{4\alpha_2}{4-\tau^2\gamma_3^2}}.$$

После достаточно простых выкладок получаем кубическое уравнение (28). Ограничения, накладываемые на параметр $\tau > 0$ достаточным условием сходимости $B_0 > 0.5A_0$, являются положительными решениями неравенства $1 - \tau^2\frac{\gamma_3^2}{4} > 0.5\tau\alpha_2$, а именно $\tau \in (0, \tau_{\mathrm{cx}}) = \left(0, \frac{\sqrt{\alpha_2^2+4\gamma_3^2}-\alpha_2}{\gamma_3^2}\right)$. Многочлен $f(\tau)$ имеет на интервале $(0, \tau_{\mathrm{cx}})$ единственный корень, т. к. $f(0) > 0$, $f(\tau_{\mathrm{cx}}) < 0$, а производная $f'(\tau) = 3\alpha_1\gamma_3^2\tau^2 - 4\gamma_3^2\tau - 4(\alpha_1+\alpha_2)$ на этом интервале сохраняет знак $f'(\tau) < 0$. □

8. Двуциклические треугольные кососимметрические методы (ДТКМ)

Рассмотрим итерационный метод, в котором переход от k-й итерации к $(k+1)$-й осуществляется в два этапа. На первом этапе находится значение $y_{k+1/2}$ как решение системы уравнений

$$(B_C + 2\tau_H K_H)\frac{y_{k+1/2} - y_k}{\tau_H} + Ay_k = f. \tag{29}$$

На втором этапе решается система уравнений

$$(B_C + 2\tau_B K_B)\frac{y_{k+1} - y_{k+1/2}}{\tau_B} + Ay_{k+1/2} = f, \tag{30}$$

из которой находится значение y_{k+1}. Здесь $\tau_H > 0$ и $\tau_B > 0$ — итерационные параметры, оператор $B_H = B_C + 2\tau_H K_H$ имеет нижнюю треугольную структуру, а оператор $B_B = B_C + 2\tau_B K_B$ — верхнюю треугольную структуру. В общем случае матрицы B_C могут иметь в (29) и (30) различную структуру. Цикл вычислений состоит в поочередном применении формул (29) и (30).

Так как каждый из методов (29) и (30) представляет ТКМ, опуская выкладки, аналогичные сделанным ранее, оператор перехода G можно записать в виде произведения двух операторов

$$G = G_B \cdot G_H,$$

где

$$G_B = B_{B0}^{-1/2}(E + \tau_B P_{B1})^{-1}(E - \tau_B P_{B0})B_{B0}^{1/2},$$
$$G_H = B_{H0}^{-1/2}(E + \tau_H P_{H1})^{-1}(E - \tau_H P_{H0})B_{H0}^{1/2}.$$

Теорема 5 ([16]). *Для сходимости итерационного метода (29), (30) с диссипативными операторами B_B и B_H достаточно, чтобы* $\|G\| \le \|E - \tau_B P_{B0}\|\,\|E - \tau_H P_{H0}\| < 1$.

Теорема 6 ([16]). *Для сходимости итерационного метода (29), (30) с диссипативными операторами B_B и B_H достаточно выполнения операторных неравенств*

$$B_{B0} > \frac{\tau_B}{1+m}A_0 > \frac{1-m}{1+m}B_{B0}, \quad B_{H0} > \frac{\tau_H}{1+\frac{1}{m}}A_0 > \frac{m-1}{1+m}B_{H0}. \tag{31}$$

Доказательство. Пусть выполняется система неравенств

$$\|E-\tau_B P_{B0}\| < m, \quad \|E-\tau_H P_{H0}\| < \frac{1}{m},$$

где m — любое положительное число. Очевидно, что в этих предположениях выполняется и неравенство в теореме 5. Самосопряженность операторов P_{B0} и P_{H0} позволяет записать систему в виде операторных неравенств

$$-mE < E-\tau_B P_{B0} < mE, \quad -\frac{1}{m}E < E-\tau_H P_{H0} < \frac{1}{m}E,$$

откуда

$$(1-m)E < \tau_B P_{B0} < (1+m)E, \quad \left(1-\frac{1}{m}\right)E < \tau_H P_{H0} < \left(1+\frac{1}{m}\right)E.$$

Умножая обе части первого неравенства этой системы слева и справа на $B_{B0}^{1/2}$, а второго неравенства — на $B_{H0}^{1/2}$, получим неравенства (31). □

Замечание. При $m=1$ каждое из операторных неравенств системы (31) имеют тот же вид, что и достаточное условие (13) сходимости для КМ.

Теорема 7. *Пусть A и B — диссипативные операторы, для которых справедливы оценки* (21) *и* (22). *Тогда для сходимости итерационного метода* (29), (30) *достаточно выполнения системы неравенств*

$$\frac{c_1}{\gamma_3+\alpha_n} < \tau_B < \frac{c_1\tau_H}{\tau_H(\alpha_n+2\gamma_3)-c_1}, \quad \frac{c_1}{\gamma_3+\alpha_n} < \tau_H < \frac{c_1}{\gamma_3} \tag{32}$$

или

$$\frac{c_1}{\gamma_3+\alpha_n} < \tau_H < \frac{c_1\tau_B}{\tau_B(\alpha_n+2\gamma_3)-1}, \quad \frac{c_1}{\gamma_3+\alpha_n} < \tau_B < \frac{c_1}{\gamma_3}. \tag{33}$$

Доказательство. По свойствам операторных неравенств ([15], сс. 88, 89) из левой части системы неравенств (31) с учетом ранее полученных оценок для ТКМ следуют неравенства

$$c_1-\tau_B\gamma_3-\frac{\tau_B}{1+m}\alpha_n > 0, \quad c_1-\tau_H\gamma_3-\frac{\tau_H}{1+\frac{1}{m}}\alpha_n > 0.$$

Условия диссипативности операторов метода (29), (30) позволяют записать эту систему в виде

$$m > \frac{\tau_B(\alpha_n+\gamma_3)-1}{1-\tau_B\gamma_3}, \quad \frac{1}{m} > \frac{\tau_H(\alpha_n+\gamma_3)-1}{1-\tau_H\gamma_3}.$$

Условия положительности правых частей неравенств последней системы дают два варианта ограничений на итерационные параметры и, тем самым, два варианта исключения из системы промежуточного параметра. После несложных выкладок получаем системы (32) и (33). □

Замечание 1. При $m=1$ достаточные условия сходимости (32) и (33) принимают вид

$$0 < \tau_H < \frac{c_1}{\gamma_3+0.5\alpha_n} < \frac{c_1}{\gamma_3}, \quad 0 < \tau_B < \frac{c_1}{\gamma_3+0.5\alpha_n} < \frac{c_1}{\gamma_3}$$

и совпадают с $\tau_{\text{сх}}$ для ТКМ [13].

Замечание 2. Системы неравенств (32) и (33) дают оценки интервалов сходимости методов, где надо искать оптимальные параметры. Наличие таких оценок сильно облегчает решение этой нелегкой задачи.

9. Численное исследование

Численное исследование итерационных методов проводилось на следующей модельной задаче. В замкнутой области $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ рассматривалось стационарное уравнение конвекции-диффузии

$$-\frac{1}{Pe}\Delta s + \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial(us)}{\partial x} + v\frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial(vs)}{\partial y}\right) = f(x,y),$$

конвективные члены которого записаны в виде полусуммы дивергентной и недивергентной форм. На границе ставились условия 1-го рода. В рассматриваемой области строилась равномерная сетка с равными шагами по обоим направлениям

$$\omega_h = \{(ih, jh);\ i,j = 0,1,\ldots,N,\ h = \tfrac{1}{N}\}.$$

После аппроксимации этого уравнения на стандартном пятиточечном шаблоне, где конвективная часть аппроксимируется центральными разностями, получается система линейных алгебраических уравнений с диссипативной пятидиагональной матрицей A. Расчеты проводились при разных числах Pe.

Итерационный процесс прекращался, если

$$\frac{\|r^{(k)}\|_2}{\|r_2^{(0)}\|_2} < \varepsilon, \quad \varepsilon = 10^{-6},$$

где $r^{(k)}$ и $r^{(0)}$ — невязки соответственно на k-й и 0-й итерациях.

В качестве точного гладкого решения бралась функция $\widetilde{s}(x,y) = e^{xy}\sin\pi x \sin\pi y$, обращающаяся в нуль на границе. Точность определялась относительной погрешностью

$$\delta = \frac{\|s-\widetilde{s}\|}{\|\widetilde{s}\|}\cdot 100\%,$$

где s — полученное решение, $\widetilde{s}$ — точное решение.

При проведении численного исследования было рассмотрено четыре варианта задания коэффициентов при конвективных членах.

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4
$u = 1$ $v = -1$	$u = 1-2x$ $v = 2y-1$	$u = x+y$ $v = x-y$	$u = \sin 2\pi x$ $v = -2\pi y\cos 2\pi x$

Проведенные расчеты показали, что в случае быстро меняющихся коэффициентов (задача 4) скорость сходимости всех вышеприведенных методов была ниже по сравнению с другими вариантами выбора коэффициентов. Поэтому был предложен специальный способ построения регуляризатора, позволяющий увеличить скорость сходимости в этом случае.

Пусть оператор B имеет следующую структуру: $B = R + 2\tau K_H$, $R = E + \omega D$, где D — диагональная матрица, ω — числовой параметр для ТКМ и $B = (R+\tau K_H)R^{-1}(R+\tau K_B)$ для ПТКМ. Правильный выбор матрицы R позволяет уменьшить число итераций.

Смысл введения в оператор R диагональной матрицы D и параметра ω состоит в том, что при выборе соответствующей структуры матрицы D и значения параметра ω скорость сходимости методов увеличивается.

Рассмотрим разложение строго нижней K_H и строго верхней K_B треугольных частей кососимметрической матрицы $A_1 = K_H + K_B$ на сумму матриц более простой структуры $K_H = \sum\limits_{i=2}^{n} K_{Hi1}$, где K_{Hi1} — однодиагональная строго нижняя треугольная матрица, ненулевая диагональ которой начинается с элемента, стоящего в i-й строке и 1-м столбце, $K_B = \sum\limits_{i=2}^{n} K_{B1i}$, где K_{B1i} — однодиагональная строго верхняя треугольная матрица, ненулевая диагональ которой начинается с элемента, стоящего в 1-й строке и i-м столбце. Матрицы K_{Hi1} и K_{B1i} характерны тем, что их ненулевые диагонали равноудалены от главной диагонали матрицы A_1. Очевидно, $K_{Hi1} = -K^*_{B1i}$.

Матрицы произведений $K_{Hi1}K_{B1i} = -K_{Hi1}K^*_{Hi1} = -K^*_{B1i}K_{B1i}$ и $K_{B1i}K_{Hi1} = -K^*_{Hi1}K_{Hi1} = -K_{B1i}K^*_{B1i}$ являются диагональными и отрицательно полуопределенными.

Используя эти разложения, можно предложить структуру диагональных неотрицательных матриц

$$D_1 = -\operatorname{Diag}(K_H K_B) = \sum_{i=2}^{n} K_{Hi1}K^*_{Hi1},$$
$$D_2 = -\operatorname{Diag}(K_B K_H) = \sum_{i=2}^{n} K_{B1i}K^*_{B1i}.$$

Матрицы $K_{Hi1}K^*_{Hi1} \neq K^*_{Hi1}K_{Hi1}$, и для них характерно следующее расположение нулевых элементов на главной диагонали: в $K_{Hi1}K^*_{Hi1}$ нулевые элементы начинаются с элемента, стоящего в 1-й строке и в 1-м столбце матрицы, и заканчиваются на элементе в i-й строке и i-м столбце; в $K^*_{Hi1}K_{Hi1}$ нулевые элементы начинаются с элемента, стоящего в $(n-i)$-й строке и в $(n-1)$-м столбце матрицы, и заканчиваются на элементе в n-й строке и n-м столбце. Этот довольно очевидный факт имеет значение при конструировании диагональных положительно определенных матриц

$$D_0 = \frac{1}{2}(D_1 + D_2) = \frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}(K_{Hi1}K^*_{Hi1} + K^*_{Hi1}K_{Hi1}),$$
$$D_3 = \sum_{i=1}^{n-1}(K_{H2i,1}K^*_{H2i,1} + K^*_{H2i+1,1}K_{H2i+1,1}),$$
$$D_4 = \sum_{i=1}^{n-1}(K_{B1,2i}K^*_{B1,2i} + K^*_{B1,2i+1}K_{B1,2i+1}).$$

При этом D_0 можно представить также в виде $D_0 = \frac{1}{2}(D_3 + D_4)$.

Итерационные методы, в которых были использованы процедуры ускорения, будут обозначаться в таблицах ТКМ(У), ПТКМ(У) и ДТКМ(У).

Таблица 1. Сравнение числа итераций для кососимметричных методов на задачах 1–4

Pe	ТКМ	ПТКМ	ДТКМ	$\frac{n(\text{ТКМ})}{n(\text{ПТКМ})}$	$\frac{n(\text{ТКМ})}{n(\text{ДТКМ})}$	$\frac{n(\text{ПТКМ})}{n(\text{ДТКМ})}$
Задача 1						
$Pe = 10^3$	216	107	103	2.019	2.097	1.039
$Pe = 10^4$	1517	723	753	2.098	2.015	0.960
$Pe = 10^5$	12097	5560	5725	2.176	2.113	0.971
Задача 2						
$Pe = 10^3$	397	129	149	3.076	2.664	0.866
$Pe = 10^4$	1368	424	611	3.226	2.239	0.694
$Pe = 10^5$	9604	3162	4733	3.037	2.029	0.668
Задача 3						
$Pe = 10^3$	304	189	118	1.608	2.576	1.602
$Pe = 10^4$	1400	566	629	2.473	2.256	0.900
$Pe = 10^5$	10985	4571	4457	2.403	2.465	1.026
Задача 4						
$Pe = 10^3$	532	128	225	4.156	2.364	0.570
$Pe = 10^4$	3936	900	1601	4.373	2.458	0.562
$Pe = 10^5$	33344	7098	13714	4.698	2.431	0.518

Замечание. В таблице 1 сравнивается число итераций ТКМ, ПТКМ и ДТКМ. Так как каждая новая итерация y_{k+1} в ПТКМ находится из уравнения (2) в два этапа, т. е. на первом этапе находится промежуточное значение $y_{k+1/2}$ как решение уравнения $(E+\tau K_H)y_{k+1/2}=\varphi_k$, где $\varphi_k=(E+\tau K_H)(E+\tau K_B)y_k-\tau Ay_k+\tau f$, а на втором этапе с использованием найденного значения $y_{k+1/2}$ решается относительно y_{k+1} уравнение

$$(E+\tau K_B)y_{k+1}=y_{k+1/2},$$

то при решении вопроса об эффективности каждого метода необходимо учитывать, что каждая итерация ПТКМ (аналогично и для ДТКМ) требует арифметических действий не более, чем удвоенное количество действий в ТКМ. Таким образом, только при значениях

$$\frac{n(\text{ТКМ})}{n(\text{ДТКМ})}>2 \quad \text{и} \quad \frac{n(\text{ТКМ})}{n(\text{ПТКМ})}>2$$

можно говорить о том, что эти методы более эффективны. В отношении ПТКМ и ДТКМ эффективность метода определяется числом итераций, т. к. количество арифметических действий у них одинаково.

Если учесть это замечание, то по результатам численного эксперимента можно видеть, что метод ПТКМ наиболее эффективен при всех значениях Pe для задач 1, 2 и 4. На задаче 3 он работает чуть хуже, чем ДТКМ.

Все варианты кососимметричных методов сравнивались (таблицы 2–4) со стандартными вариантами таких известных и близких по структуре обращаемого оператора методам, как SOR для ТКМ и SSOR для ПТКМ и ДТКМ.

На всех задачах метод SOR работает эффективней, чем ТКМ, а ПТКМ работает так же или чуть лучше, а ДТКМ хуже, чем SSOR.

Вместе с тем, как видно из приведенных таблиц 2–4, ускоренные варианты всех рассмотренных методов работают эффективней методов SOR и SSOR на всех задачах, где коэффициенты матрицы сильно меняются, а число Пекле достаточно велико. Особенно преимущество ускоренной процедуры заметно на самой трудной из рассмотренных задач — задаче 4, где превосходство почти двойное.

Таблица 2. Число итераций для треугольных методов на задачах 1–4

Pe	ТКМ	ТКМ(У)	SOR	$\frac{n(\text{ТКМ})}{n(\text{ТКМ(У)})}$	$\frac{n(\text{ТКМ})}{n(\text{SOR})}$	$\frac{n(\text{ТКМ(У)})}{n(\text{SOR})}$
Задача 1						
$Pe=10^3$	216	214	107	1.009	2.019	2.000
$Pe=10^4$	1517	1486	1095	1.021	1.386	1.358
$Pe=10^5$	12097	11450	10899	1.057	1.110	1.051
Задача 2						
$Pe=10^3$	397	287	181	1.383	1.095	1.586
$Pe=10^4$	1368	1172	799	1.167	1.712	1.467
$Pe=10^5$	9604	8880	7936	1.369	1.209	1.21
Задача 3						
$Pe=10^3$	304	264	153	1.152	1.987	1.725
$Pe=10^4$	1400	1192	1009	1.174	1.387	1.181
$Pe=10^5$	10985	8970	10357	1.224	1.061	0.866
Задача 4						
$Pe=10^3$	532	342	341	1.556	1.560	1.003
$Pe=10^4$	3936	2166	3002	1.817	1.311	0.722
$Pe=10^5$	33344	17863	29782	1.867	1.120	0.600

Таблица 3. Число итераций для попеременно-треугольных методов на задачах 1–4

Pe	ПТКМ	ПТКМ(У)	SSOR	$\dfrac{n(\text{ПТКМ})}{n(\text{ПТКМ(У)})}$	$\dfrac{n(\text{ПТКМ})}{n(\text{SSOR})}$	$\dfrac{n(\text{ПТКМ(У)})}{n(\text{SSOR})}$
Задача 1						
$Pe = 10^3$	107	104	99	1.023	1.081	1.050
$Pe = 10^4$	723	723	747	1.000	0.968	0.968
$Pe = 10^5$	5560	5560	5816	1.000	0.971	0.956
Задача 2						
$Pe = 10^3$	129	60	102	2.150	1.265	0.588
$Pe = 10^4$	424	291	375	1.457	1.131	0.776
$Pe = 10^5$	3162	2249	2940	1.406	1.076	0.765
Задача 3						
$Pe = 10^3$	189	52	101	3.635	1.871	0.515
$Pe = 10^4$	566	406	604	1.394	0.937	0.672
$Pe = 10^5$	4571	4407	4655	1.037	0.982	0.947
Задача 4						
$Pe = 10^3$	128	109	147	1.174	0.870	0.741
$Pe = 10^4$	900	670	1067	1.343	0.843	0.628
$Pe = 10^5$	7098	4407	7999	1.611	0.887	0.551

Таблица 4. Число итераций для двуциклических треугольных методов на задачах 1–4

Pe	ДТКМ	ДТКМ(У)	SSOR	$\dfrac{n(\text{ДТКМ})}{n(\text{ДТКМ(У)})}$	$\dfrac{n(\text{ДТКМ})}{n(\text{SSOR})}$	$\dfrac{n(\text{ДТКМ(У)})}{n(\text{SSOR})}$
Задача 1						
$Pe = 10^3$	103	103	99	1.000	1.040	1.040
$Pe = 10^4$	753	750	747	1.004	1.008	1.004
$Pe = 10^5$	5725	5725	5816	1.000	0.984	0.984
Задача 2						
$Pe = 10^3$	149	127	102	1.173	1.461	1.245
$Pe = 10^4$	611	442	375	1.382	1.711	1.929
$Pe = 10^5$	4733	3355	2940	1.411	1.610	1.411
Задача 3						
$Pe = 10^3$	118	74	101	1.595	1.168	0.733
$Pe = 10^4$	629	423	604	1.487	1.041	0.700
$Pe = 10^5$	4457	3211	4655	1.388	0.957	0.690
Задача 4						
$Pe = 10^3$	225	83	147	2.711	1.531	0.565
$Pe = 10^4$	1601	467	1067	3.482	1.500	0.438
$Pe = 10^5$	13714	3534	7999	3.881	1.714	0.442

Литература

1. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. *Матрицы и вычисления.* – М.: Наука, 1984. – 318 с.
2. Самарский А.А., Николаев Е.С. *Методы решения сеточных уравнений.* Учеб. пособие. – М.: Наука, 1978. – 590 с.
3. Хейгеман Л., Янг Д. *Прикладные итерационные методы.* – М.: Мир, 1986. – 446 с.
4. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики.* – М.: Наука, 1989. – 608 с.
5. Крукиер Л.А., Чикина Л.Г. *Решение стационарного уравнения конвекции-диффузии в несжимаемых средах с преобладающей конвекцией итерационными методами* // Сб. тр. Ме-

ждународн. конф. “Применение матем. моделир. для решения задач в науке и технике”, ИММ, ИПМ УрО РАН. – Ижевск, 1996. – С. 190–201.
6. Raithby G.L. *Skew upstream differencing schemes for problems involving fluid flow* // Comput. meths. Appl. Mech. Engrg. – 1976. – V. 9. – P. 153–164.
7. Chow L.C., Tien C.L. *An examination of four differencing schemes for some elliptic-type convection equations* // Numer. Heat Transfer. – 1978. – V. 1. – P. 87–100.
8. Чикина Л.Г. *Об одном методе решения уравнения конвекции-диффузии с преобладающей конвекцией* // Матем. моделир. – 1997. – Т. 9. – № 2. – С. 25–30.
9. Бочев М.А., Крукиер Л.А. *Об итерационном решении сильно несимметричных систем линейных алгебраических уравнений* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1997. – Т. 37. – № 11. – С. 1283–1293.
10. Крукиер Л.А. *Кососимметричные итерационные методы решения стационарной задачи конвекции-диффузии с малым параметром при старшей производной* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 4. – С. 77–85.
11. Булеев Н.И. *Пространственная модель турбулентного обмена.* – М.: Наука, 1989. – 344 с.
12. Крукиер Л.А. *Неявные разностные схемы и итерационный метод их решения для одного класса квазилинейных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1979. – № 7. – С. 41–52.
13. Крукиер Л.А. *Математическое моделирование гидродинамики Азовского моря при реализации проектов реконструкции его экосистемы* // Матем. моделир. – 1991. – Т. 3. – № 9. – С. 3–20.
14. Самарский А.А. *О регуляризации разностных схем* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1967. – Т. 7. – № 1. – С. 62–93.
15. Самарский А.А., Гулин А.В. *Численные методы.* – М.: Наука, 1989. – 432 с.
16. Чикина Л.Г. *Двуциклические треугольные кососимметрические итерационные методы решения сильно несимметричных систем* // Тез. докл. на школе-семинаре “Актуальные проблемы математического моделирования”. – Абрау-Дюрсо, Изд-во РГУ, 1997. – С. 155–159.

Южно-Российский региональный центр информатизации высшей школы

Ростовская государственная экономическая академия

Поступила
11.04.2000