ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 7 (494)

УДК 517.968:519.6

Э.Н. САМОЙЛОВА

ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение. В ряде прикладных задач (см., напр., [1]–[6]) встречается сингулярное интегро-дифференциальное уравнение

$$A\varphi \equiv \varphi'(t) + a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t} = f(t), \quad -1 < t < 1, \tag{0.1}$$

при начальном условии

$$\varphi(-1) = 0, \tag{0.2}$$

где $a(t)$, $b(t)$ и $f(t)$ — данные функции, а $\varphi(t)$ — искомая функция.

Поскольку задача (0.1)–(0.2), как правило, точно не решается, то для ее решения разработаны и применяются различные приближенные методы (обзор таких методов можно найти, напр., в [3]–[7]).

Ниже, следуя [4], [8], для задачи (0.1)–(0.2) приводим различные вычислительные схемы ряда полиномиальных проекционных методов и предлагаем их теоретическое обоснование в смысле общей теории приближенных методов функционального анализа (см., напр., [9], гл. 14; [5], гл. 1).

Пусть $L_2 = L_2[-1,1]$ — лебегово пространство квадратично-суммируемых на $[-1,1]$ функций со скалярным произведением и нормой соответственно

$$(f,g) = \int_{-1}^{+1} f(t)g(t)dt, \qquad f,g \in L_2,$$

$$\|f\|_{L_2} = \left\{\int_{-1}^{+1}|f(t)|^2dt\right\}^{1/2}, \qquad f \in L_2.$$

Через $C = C[-1,1]$ будем обозначать пространство всех непрерывных на $[-1,1]$ функций с нормой

$$\|f\|_C = \max_{-1\le t\le 1}|f(t)|, \quad f \in C.$$

Положим

$$W_2^1[-1,1] = \{\varphi \in C : \varphi(-1) = 0,\ \exists\varphi'(t) \in L_2\} \equiv W_2^1$$

с нормой

$$\|\varphi\|_{W_2^1} = \left\{\int_{-1}^{+1}|\varphi'(t)|^2dt\right\}^{1/2}, \quad \varphi \in W_2^1.$$

1. *Методы моментов и Галёркина.* Пусть функции $a(t)$, $b(t)$ и $f(t) \in L_2$. Приближенное решение задачи (0.1)–(0.2) ищем в виде многочленов

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k t^k = \sum_{k=1}^{n}\beta_k(Q_k(t) - Q_k(-1)), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

где α_k, β_j ($k = \overline{0,n}$; $j = \overline{1,n}$) — некоторые коэффициенты, а

$$Q_k(t) = \frac{d^k}{dt^k}(1-t^2)^k$$

— ортогональные многочлены Лежандра на стандартном сегменте $[-1,1]$. Неизвестные коэффициенты будем определять из любой из систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (At^k, t^j) = (f, t^j), \qquad j = \overline{0, n-1}, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha_k = 0; \tag{1.2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (At^k, Q_j) = (f, Q_j), \quad j = \overline{0, n-1}, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha_k = 0; \tag{1.3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k (A\widetilde{Q}_k, Q_j) = (f, Q_j), \quad j = \overline{0, n-1}; \tag{1.4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k (A\widetilde{Q}_k, t^j) = (f, t^j), \qquad j = \overline{0, n-1}, \tag{1.5}$$

где $\widetilde{Q}_k(t) = Q_k(t) - Q_k(-1)$.

Отметим, что в силу свойств ортогональных многочленов системы (1.2)–(1.5) являются эквивалентными.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

α) $a(t), b(t) \in C$, $f(t) \in L_2$;

β) *задача* (0.1)–(0.2) *имеет единственное решение* $\varphi^* \in W_2^1$ *при любой правой части* $f \in L_2$. *Тогда при всех* $n \in \mathrm{N}$, *начиная с некоторого, любая из СЛАУ* (1.2)–(1.5) *имеет единственное решение. Приближенные решения* (1.1) *сходятся к точному решению* $\varphi^*(t)$ *в пространстве* W_2^1 *со скоростью, определяемой неравенствами*

$$E_{n-1}(\varphi^{*'})_{L_2} \leq \|\varphi^* - \varphi_n\|_{W_2^1} = O\{E_{n-1}(\varphi^{*'})_{L_2}\},$$

где $E_{n-1}(g)_{L_2}$ — *наилучшее приближение функции* $g \in L_2$ *алгебраическими многочленами степени не выше* $n-1$ *в метрике пространства* L_2.

Доказательство. Задачу (0.1)–(0.2) запишем в виде эквивалентного ей линейного операторного уравнения

$$A\varphi \equiv G\varphi + T\varphi = f, \quad \varphi \in W_2^1, \quad f \in L_2, \tag{1.6}$$

где

$$G(\varphi; t) = \varphi'(t), \quad T(\varphi; t) = a(t)\varphi(t) + b(t)S(\varphi; t), \tag{1.7}$$

причем сингулярный интеграл

$$S(\varphi; t) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t}, \quad -1 \leq t < 1, \quad \varphi \in W_2^1, \tag{1.8}$$

понимается в смысле главного значения по Коши–Лебегу ([10], [11]).

Ясно, что оператор $G : W_2^1 \to L_2$ непрерывно обратим и

$$\|G\|_{W_2^1 \to L_2} = \|G^{-1}\|_{L_2 \to W_2^1} = 1. \tag{1.9}$$

В силу условия α) теоремы из леммы 3 работы [8] следует, что оператор $T : W_2^1 \to L_2$ является вполне непрерывным. Отсюда и из условия β) теоремы легко выводится [9], что оператор $A : W_2^1 \to L_2$ непрерывно обратим и

$$\|A\|_{W_2^1 \to L_2} \leq c_0 < \infty, \quad \|A^{-1}\|_{L_2 \to W_2^1} \leq c_1 < \infty, \tag{1.10}$$

где c_0 и c_1 — положительные постоянные.

Обозначим через Y_n множество всех алгебраических многочленов степени не выше $n-1$ с L_2-нормой, а через X_n — множество всех многочленов вида (1.1) с нормой W_2^1. Введем оператор проектирования $P_n : L_2 \to Y_n$ по формуле

$$P_n(f;t) = \sum_{k=0}^{n-1} (f, Q_k) Q_k(t), \quad f \in L_2, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.11}$$

Тогда любая из СЛАУ (1.2)–(1.5) эквивалентна линейному операторному уравнению

$$A_n \varphi_n \equiv P_n A \varphi_n = P_n f, \quad \varphi_n \in X_n, \quad P_n f \in Y_n. \tag{1.12}$$

Хорошо известно, что

$$\|P_n\|_{Y \to Y} = 1, \quad P_n^2 = P_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.13}$$

Поэтому уравнение (1.12) эквивалентно уравнению

$$A_n \varphi_n \equiv G\varphi_n + P_n T \varphi_n = P_n, \quad \varphi_n \in X_n, \quad P_n f \in Y_n. \tag{1.14}$$

Покажем, что уравнения (1.6) и (1.14) близки в смысле ([9], гл. 14; [5], гл. 1). В силу (1.11) и (1.13) для правых частей уравнений (1.6) и (1.14) имеем

$$\delta_n \equiv \|f - P_n f\|_{L_2} = E_{n-1}(f)_{L_2} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{1.15}$$

Для любой $\varphi_n \in X_n$, $\varphi_n \neq 0$, из (1.11)–(1.15) последовательно находим

$$\begin{aligned}
\|A\varphi_n - A_n\varphi_n\|_{L_2} &= \|T\varphi_n - P_n T\varphi_n\|_{L_2} = \|\varphi_n\|_{L_2} \|T\psi_n - P_n T\psi_n\|_{L_2} \leq \\
&\leq \|\varphi_n\|_{L_2} E_{n-1}(T\psi_n)_{L_2} \leq \|\varphi_n\|_{L_2} \sup_{\substack{\psi_n \in X_n \\ \|\psi_n\|_{W_2^1} = 1}} E_{n-1}(T\psi_n)_{L_2} \leq \\
&\leq \|\varphi_n\|_{L_2} \sup_{\substack{\psi \in W_2^1 \\ \|\psi\|_{W_2^1} = 1}} E_{n-1}(T\psi)_{L_2} \equiv \|\varphi_n\|_{L_2} \widetilde{\varepsilon}_n, \quad \psi_n \equiv \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|},
\end{aligned}$$

где в силу полной непрерывности оператора $T : W_2^1 \to L_2$ имеем

$$\widetilde{\varepsilon}_n = \sup_{\substack{\psi \in W_2^1 \\ \|\psi\|_{W_2^1} = 1}} E_{n-1}(T\psi)_{L_2} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Поэтому

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \to Y} = \|A - P_n A\|_{X_n \to Y} \leq \widetilde{\varepsilon}_n \to 0, \quad n \to \infty. \tag{1.16}$$

Теперь в силу (1.9), (1.10), (1.15), (1.16) из теорем 6, 7 и 14 ([5], гл. 1) следует утверждение теоремы.

2. *Метод наименьших квадратов.* Приближенное решение задачи (0.1)–(0.2) ищем в виде многочленов (1.1), а их коэффициенты α_k, $k = \overline{1,n}$, и β_j, $j = \overline{1,n}$, определяем из СЛАУ соответственно

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (At^k, At^j) = (f, At^j), \quad j = \overline{0,n}; \tag{2.1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k (A\widetilde{Q}_k, A\widetilde{Q}_j) = (f, A\widetilde{Q}_j), \quad j = \overline{1,n}. \tag{2.2}$$

Нетрудно видеть, что системы (2.1) и (2.2) эквивалентны при любых $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *каждая из СЛАУ* (2.1), (2.2) *однозначно разрешима при любых* $n \in \mathbb{N}$ *и приближенные решения* (1.1) *сходятся в пространстве* W_2^1 *со скоростью, определяемой неравенствами*

$$E_{n-1}(\varphi^{*'})_{L_2} \le \|\varphi^* - \varphi_n\|_{W_2^1} = O\{E_{n-1}(\varphi^{*'})_{L_2}\}.$$

Доказательство будем вести, следуя результатам ([12]; [7], с. 27–28) по методу наименьших квадратов. Известно, что любая из систем функций $\{t^k\}_0^\infty$, $\{Q_k(t)\}_0^\infty$, $\{\widetilde{Q}_k(t)\}_1^\infty$ линейно независима и полна как в пространстве L_2, так и в пространстве W_2^1. Поскольку оператор $A : W_2^1 \to L_2$ непрерывно обратим, то системы функций $\{At^k\}_0^\infty$, $\{A\widetilde{Q}_k(t)\}_1^\infty$ также линейно независимы. Поэтому их определители Грамма, совпадающие с определителями СЛАУ (2.1), (2.2), отличны от нуля при любых $n \in \mathbb{N}$, отсюда и следует первое из утверждений теоремы.

Для доказательства второго утверждения заметим, что для любого $\widetilde{\varphi}_n \in X_n$ имеем

$$\|f - A\varphi_n\|_{L_2} \le \|f - A\widetilde{\varphi}_n\|_{L_2}, \tag{2.3}$$

где φ_n — приближенное решение задачи (0.1)–(0.2), построенное методом наименьших квадратов. Так как $f \equiv A\varphi^*$, то из неравенств (1.10) и (2.3) находим

$$\frac{\|\varphi^* - \varphi_n\|_{W_2^1}}{\|A^{-1}\|_{L_2 \to W_2^1}} \le \|A(\varphi^* - \varphi_n)\|_{L_2} \le \|A\|_{W_2^1 \to L_2}\|\varphi^* - \widetilde{\varphi}_n\|_{W_2^1}.$$

Поэтому

$$\|\varphi^* - \varphi_n\|_{W_2^1} \le \eta(A)\|\varphi^* - \widetilde{\varphi}_n\|_{W_2^1}, \tag{2.4}$$

где $\eta(A) = \|A\|_{W_2^1 \to L_2}\|A^{-1}\|_{L_2 \to W_2^1}$ — число обусловленности оператора $A : W_2^1 \to L_2$. Выберем произвольный элемент $\widetilde{\varphi}_n \in X_n$ так, чтобы $\widetilde{\varphi}'_n(t) \in Y_n$ был многочленом наилучшего среднеквадратического приближения функции $\varphi^{*'}(t) \in L_2$. Поэтому из (2.4) находим

$$E_{n-1}(\varphi^{*'})_{L_2} \le \|\varphi^* - \varphi_n\|_{W_2^1} \le \eta(A)E_{n-1}(\varphi^{*'})_{L_2}. \quad \square$$

3. *Метод коллокации.* Пусть функции $a(t)$, $b(t)$ и $f(t) \in C$. Приближенное решение задачи (0.1)–(0.2) ищем в виде любого из многочленов (1.1), а их коэффициенты будем определять из СЛАУ соответственно

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k A(t^k; t_j) = f(t_j), \quad j = \overline{1,n}, \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha_k = 0; \tag{3.1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \beta_k A(\widetilde{Q}_k; t_j) = f(t_j), \quad j = \overline{1,n}, \tag{3.2}$$

где $t_k = t_{k,n}$ ($k = \overline{1,n}$; $n \in \mathbb{N}$) — некоторые узлы из сегмента $[-1,1]$.

Заметим, что системы метода коллокации (3.1) и (3.2) эквивалентны.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия*

α) *функции* $a(t), f(t) \in C$, *а функция* $b(t) \in H_\alpha$ $(0 < \alpha \le 1)$, $b(+1) = 0$;

β) *узлы коллокации являются корнями многочлена Лежандра* $Q_n(t) = \frac{d^n}{dt^n}(1 - t^2)^n$;

γ) *задача* (0.1)–(0.2) *имеет единственное решение* $\varphi^* \in W_2^1$ *при любой* $f \in L_2$.

Тогда каждая из СЛАУ (3.1), (3.2) *однозначно разрешима хотя бы при достаточно больших* $n \in \mathbb{N}$ *и приближенные решения* (1.1) *сходятся в пространстве* W_2^1 *со скоростью*

$$\|\varphi^* - \varphi_n\|_{W_2^1} = O\{E_{n-1}(\varphi^{*'})_C\},$$

где $E_{n-1}(g)_C$ — *наилучшее равномерное приближение функции* $g \in C[-1,1]$ *алгебраическими многочленами степени не выше* $n - 1$.

Доказательство. Введем оператор проектирования $\mathcal{L}_n : L_2 \to Y_n$ по формуле

$$\mathcal{L}_n(g;t) = \sum_{j=1}^{n} g(t_j) \frac{Q_n(t)}{(t-t_j)Q_n'(t_j)}, \quad g \in C, \tag{3.3}$$

где $t_1, t_2, \dots, t_n$ — узлы Гаусса. Известно, что $\mathcal{L}_n$ — линейный оператор и

$$\mathcal{L}_n^2 = \mathcal{L}_n : L_2 \to Y_n, \quad \|\mathcal{L}_n\|_{C\to L_2} \le \sqrt{2}, \quad n = 1, 2, \dots ; \tag{3.4}$$

однако по аналогии с леммой 6 ([5], гл. 3) можно доказать, что

$$\|\mathcal{L}_n\|_{L_2\to L_2} = \infty, \quad n = 1, 2, \dots \tag{3.5}$$

Поэтому

$$\delta_n \equiv \|f - \mathcal{L}_n f\|_{L_2} \le 2\sqrt{2}E_{n-1}(f)_C < 3E_{n-1}(f)_C, \quad f \in C. \tag{3.6}$$

Любая из СЛАУ (3.1), (3.2) эквивалентна операторному уравнению

$$A_n\varphi_n \equiv G\varphi_n + \mathcal{L}_n T\varphi_n = \mathcal{L}_n f, \quad \varphi_n \in X_n, \quad \mathcal{L}_n f \in Y_n, \tag{3.7}$$

где подпространства $X_n \subset W_2^1$ и $Y_n \subset L_2$ определены в п. 1. В силу леммы 2 работы [8] и условия α) оператор $T : W_2^1 \to C$ вполне непрерывен. Поэтому в силу (3.3)–(3.7) и (1.6)–(1.10) для любого $\varphi_n \in X_n$, $\varphi_n \ne 0$, последовательно находим

$$\begin{aligned}\|A\varphi_n - A_n\varphi_n\|_{L_2} &= \|T\varphi_n - \mathcal{L}_n T\varphi_n\|_{L_2} = \|\varphi_n\|_{L_2}\|T\psi_n - \mathcal{L}_n T\psi_n\|_{L_2} \le \\ &\le \|\varphi_n\|_{W_2^1} 3E_{n-1}(T\psi_n)_C \le 3\|\varphi_n\|_{W_2^1} \sup_{\substack{\psi_n\in X_n\\ \|\psi_n\|_{W_2^1}\le 1}} E_{n-1}(T\psi_n)_C \le \\ &\le 3\|\varphi_n\|_{W_2^1} \sup_{\substack{\psi\in W_2^1\\ \|\psi\|_{W_2^1}\le 1}} E_{n-1}(T\psi)_C \equiv \tilde{\tilde{\varepsilon}}_n \|\varphi_n\|_{W_2^1}, \quad \psi_n = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|_{W_2^1}},\end{aligned} \tag{3.8}$$

где

$$\tilde{\tilde{\varepsilon}}_n \equiv \sup_{\substack{\psi\in W_2^1\\ \|\psi\|_{W_2^1}\le 1}} E_{n-1}(T\varphi)_C \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.9}$$

Из (3.8) и (3.9) следует, что операторы $A \equiv G + T : W_2^1 \to L_2$ и $A_n \equiv G + \mathcal{L}_n T : X_n \to L_2$ близки в том смысле, что

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n\to L_2} \le \tilde{\tilde{\varepsilon}}_n \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.10}$$

Таким образом, в силу (1.9), (1.10) и (3.6), (3.10) для уравнений (1.6) и (3.7) выполнены условия теоремы 7 ([5], гл. 1), из которой следует, что операторы $A_n : X_n \to Y_n$, $n \ge n_0$, непрерывно обратимы, а обратные операторы ограничены по норме в совокупности, причем

$$\|A_n^{-1}\|_{Y_n\to X_n} \le c_3 = O(1), \quad n \to \infty, \tag{3.11}$$

$$\|\varphi^* - \varphi_n\|_{W_2^1} = \|A^{-1}f - A_n^{-1}\mathcal{L}_n f\|_{W_2^1} = O(\varepsilon_n + \delta_n) = O(\tilde{\tilde{\varepsilon}}_n + \delta_n) \to \infty, \quad n \to \infty. \tag{3.12}$$

Кроме того, в силу (1.9), (1.10), (3.6), (3.11), (3.12) и полной непрерывности оператора $T : W_2^1 \to C$ из теорем 6 и 14 ([5], гл. 1) находим

$$\begin{aligned}\|\varphi^* - \varphi_n\|_{W_2^1} &= \|(E - A_n^{-1}\mathcal{L}_n T)G^{-1}(G\varphi^* - \mathcal{L}_n G\varphi^*)\|_{W_2^1} \le \\ &\le \|E - A_n^{-1}\mathcal{L}_n T\|_{W_2^1\to W_2^1}\|G^{-1}\|_{L_2\to W_2^1}\|G\varphi^* - \mathcal{L}_n G\varphi^*\|_{L_2} \le \\ &\le \{1 + \|A_n^{-1}\|_{Y_n\to X_n}\|\mathcal{L}_n\|_{C\to L_2}\|T\|_{W_2^1\to C}\} 3E_{n-1}(G\varphi^*)_C \le \\ &\le 3(1 + 2C_3\|T\|_{W_2^1\to C})E_{n-1}(G\varphi^*)_C.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Поскольку в силу условий α) и γ)

$$G\varphi^* \equiv \varphi^{*'}(t) \equiv f(t) - T(\varphi^*; t) \in C,$$

то в силу первой теоремы Джексона [13], [14] имеем

$$E_{n-1}(G\varphi^*)_C = E_{n-1}(\varphi^{*'})_C \leq 3\omega(G\varphi^*; \frac{1}{n}) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.14}$$

Поэтому из (3.11)–(3.14) следует утверждение теоремы 3.

Следствие. Если непрерывные функции $a(t)$, $b(t)$ и $f(t)$ таковы, что $\varphi^{*'}(t) \in W^r[-1,1]$, $r \in \mathbb{N}$, то в условиях теоремы 3 метод коллокации сходится со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi_n\|_{W_2^1} = O\left(\frac{1}{n^r}\right), \quad r \in \mathbb{N}.$$

Заметим, что в силу известных результатов [13], [14] теории приближения функций утверждения, аналогичные этому следствию, могут быть получены также для исследованных выше полиномиальных методов.

Литература

1. Пыхтеев Г.Н. *Некоторые методы решения одного интегро-дифференциального уравнения теории струй идеальной жидкости* // ПМТФ. – 1966. – № 2. – С. 72–86.
2. Пыхтеев Г.Н. *О двух методах решения одной нелинейной краевой задачи теории струй идеальной жидкости* // Динам. сплош. среды. – Новосибирск: Наука, 1969. – № 2. – С. 134–144.
3. Шокамолов И. *Приближенные методы вычисления интегралов типа Коши специального вида и решение одного сингулярного интегро-дифференциального уравнения с приложениями к задачам теплопроводности*: Автореф. дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Минск, 1973. – 12 с.
4. Габдулхаев Б.Г., Ахметов С.М. *Прямые методы решения уравнения теории струй* // Дифференц. уравнения. – 1997. – Т. 13. – № 7. – С. 1299–1307.
5. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Избранные главы.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
6. Габдулхаев Б.Г. *Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений* // Итоги науки и техн. Матем. анализ / ВИНИТИ. – 1980. – Т. 18. – С. 251–307.
7. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288с.
8. Самойлова Э.Н. *Сплайновые приближения решения сингулярного интегро-дифференциального уравнения* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 11. – С. 35–45.
9. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1977. – 742 с.
10. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.
11. Michlin S.G., Prößdorf S. *Singuläre Integraloperatoren.* – Berlin: Akademic-Verlag, 1980. – 514 S.
12. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике.* – М.: Наука, 1970. – 512 с.
13. Тиман А.Ф. *Теория приближения функций действительного переменного.* – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
14. Даугавет И.К. *Введение в теорию приближения функций.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. – 184 с.

Казанский государственный университет

Поступила
11.02.2002