И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2006 МАТЕМАТИКА № 4 (527)

УДК 517.946

О.И. МАХМУДОВ, И.Э. НИЁЗОВ

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЛАМЭ

1. Введение

В статье изучаются вопросы регуляризации задачи Коши для систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Как известно, задача Коши для эллиптических уравнений некорректна, решение задачи единственно, но неустойчиво (пример Адамара). Для того чтобы постановка задачи была корректной, необходимо сузить класс изучаемых решений.

На протяжении последних десятилетий не ослабевал интерес к классической некорректной задаче математической физики. Это направление в исследовании свойств решений задачи Коши для уравнения Лапласа начато в 50-х гг. в работах [1]–[4] и развивалось впоследствии в [5]–[12].

Пусть $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$ — точки евклидова пространства R^m и D — область в R^m с кусочно-гладкой границей ∂D, S — часть ∂D, $\sum = \partial D \setminus S$. Рассмотрим в области D систему уравнений Ламе в векторной форме

$$\mu \Delta U(y) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} U(y) = 0,$$

где $U = (U_1, \dots, U_m)$ — вектор смещения, Δ — оператор Лапласа, λ, μ — постоянные Ламе. Для сокращения изложения удобно пользоваться матричной записью. Введем матричный дифференциальный оператор

$$A(\partial_x) = \|A_{ij}(\partial_x)\|_{m \times m},$$

где $A_{ij}(\partial_x) = \delta_{ij} \mu \Delta + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$.

Тогда изучаемая эллиптическая система уравнений запишется в матричной форме

$$A(\partial_x) U(x) = 0. \tag{1}$$

Постановка задачи. Известны данные Коши решения системы на поверхности S

$$\begin{aligned} U(y) &= f(y), \quad y \in S, \\ T(\partial_y, n(y)) U(y) &= \psi(y), \quad y \in S, \end{aligned} \tag{2}$$

где $f = (f_1, \dots, f_m)$, $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_m)$ — заданные непрерывные вектор-функции на S,

$$T(\partial_y, n(y)) = \|T_{ij}(\partial_y, n(y))\|_{m \times m} = \left\| \lambda n_i \frac{\partial}{\partial y_j} + \mu n_j \frac{\partial}{\partial y_i} + \mu \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial n} \right\|_{m \times m}$$

— оператор напряжения, δ_{ij} — символ Кронекера, $n = (n_1, \dots, n_m)$ — единичный вектор нормали к поверхности S.

Требуется определить функцию $U(y)$ в D, исходя из заданных f и ψ, т. е. решить задачу аналитического продолжения решения системы уравнений в пространственной области по ее значениям f и значениям ее напряжений ψ на гладком куске S границы.

Единственность решения задачи (1), (2) следует из общей теоремы Холмгрена [13]. После установления единственности в теоретических исследованиях некорректных задач возникают важные вопросы получения оценки условной устойчивости и построения регуляризирующих операторов.

Пусть вместо $f(y)$ и $\psi(y)$ заданы их приближения $f_\delta(y)$ и $\psi_\delta(y)$ с точностью $\delta \in (0,1)$ (в метрике C), которые могут не принадлежать классу существования решений. В данной работе строится семейство функций $U(x, f_\delta, \psi_\delta) = U^{\sigma\delta}(x)$, зависящее от параметра σ, и доказывается, что при некоторых условиях и специальном выборе параметра $\sigma(\delta)$ при $\delta \to 0$ семейство $U^{\sigma\delta}(x)$ сходится в обычном смысле к решению $U(x)$ задачи (1), (2).

Следуя А.Н. Тихонову, $U^{\sigma\delta}(x)$ назовем регуляризованным решением задачи, которое определяет устойчивый метод ее приближенного решения [14].

Существенно используя результаты работ [1], [15] по задаче Коши для уравнения Лапласа, построим матрицу Карлемана в явном виде и на ее основе регуляризованное решение задачи Коши для системы уравнений (1). Поскольку здесь идет речь о явных формулах, то построение матрицы Карлемана в элементарных и специальных функциях представляет значительный интерес. При $m = 2, 3$ изучаемая задача совпадает с задачей Коши для системы уравнений статики изотропной упругой среды. В этих случаях задача (1), (2) для специальных классов областей исследована в [6]–[9], [12]. Задача Коши для системы уравнений установившихся упругих колебаний, для системы уравнений термоупругости и для системы уравнений моментной теории упругости в пространстве исследована в [5], [10]–[12], [16]. Ранее в [17], [18] было доказано, что матрица Карлемана существует во всякой задаче Коши для решений эллиптических систем, если только данные Коши задаются на граничном множестве положительной меры.

2. Построение матрицы фундаментальных решений специального вида

Определение 1. Матрица $\Gamma(y,x) = \|\Gamma_{ij}(y,x)\|_{m\times m}$,

$$\Gamma_{ij}(y,x) = \frac{1}{2\mu(\lambda+2\mu)}\Big(\delta_{ij}(\lambda+3\mu)q(y,x) - (\lambda+\mu)(y_j - x_j)\frac{\partial}{\partial y_i}q(y,x)\Big), \quad i,j = 1,2,\ldots,m,$$

где

$$q(y,x) = \begin{cases} \frac{1}{(2-m)\omega_m}\frac{1}{|y-x|^{m-2}}, & m > 2; \\ \frac{1}{2\pi}\ln|y-x|, & m = 2, \end{cases} \qquad |y-x| = \sqrt{(y_1-x_1)^2 + \cdots + (y_m - x_m)^2},$$

ω_m — площадь единичной сферы в R^m, называется матрицей фундаментальных решений системы (1).

Матрица $\Gamma(y,x)$ симметрична и каждый ее столбец, а также строка удовлетворяют уравнению (1) в произвольной точке $x \in R^m$, кроме $y = x$. Таким образом, $A(\partial_x)\Gamma(y,x) = 0$, $y \neq x$.

Развивая идею М.М. Лаврентьева, который ввел понятие функции Карлемана задачи Коши для уравнения Лапласа [1], дадим

Определение 2. Матрицей Карлемана задачи (1), (2) называется $m\times m$-матрица $\Pi(y,x,\sigma)$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) $\Pi(y,x,\sigma) = \Gamma(y,x) + G(y,x,\sigma)$,

где σ — положительный числовой параметр, матрица $G(y,x,\sigma)$ по переменной y удовлетворяет системе (1) всюду в области D;

2) $\int\limits_\Sigma (|\Pi(y,x,\sigma)| + |T(\partial_y,n)\Pi(y,x,\sigma)|)ds_y \le \varepsilon(\sigma)$,

где $\varepsilon(\sigma) \to 0$ при $\sigma \to \infty$ равномерно по x на компактных подмножествах D; здесь и далее $|\Pi|$ означает евклидову норму матрицы $\Pi = \|\Pi_{kj}\|$, т.е. $|\Pi| = \Big(\sum\limits_{k,j=1}^m \Pi_{kj}^2\Big)^{1/2}$, в частности, $|U| = \Big(\sum\limits_{k=1}^m U_k^2\Big)^{1/2}$ для вектора U.

Определение 3. Вектор-функция $U(y) = (U_1(y), \dots, U_m(y))$ называется регулярной в D, если она непрерывна вместе со своими частными производными второго порядка в D и первого порядка на $\overline{D} = D \cup \partial D$.

В теории уравнений в частных производных важную роль играют представления решений этих уравнений в виде функции типа потенциала. Одно из этих представлений дает

Теорема 1 ([19]). *Всякое регулярное решение $U(x)$ уравнения* (1) *в области D определяется формулой Сомилиана*

$$U(x) = \int_{\partial D} [\Gamma(y,x)\{T(\partial_y, n)U(y)\} - \{T(\partial_y, n)\Gamma(y,x)\}' U(y)] ds_y, \quad x \in D.$$

Поскольку матрица Карлемана отличается от матрицы фундаментальных решений на решение транспонированной системы, то формула Сомилиана остается справедливой, если в ней заменить фундаментальное решение на матрицу Карлемана. Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Всякое регулярное решение $U(x)$ уравнения* (1) *в области D определяется формулой*

$$U(x) = \int_{\partial D} [\Pi(y,x,\sigma)\{T(\partial_y, n)U(y)\} - \{T(\partial_y, n)\Pi(y,x,\sigma)\}' U(y)] ds_y, \quad x \in D,$$

где $\Pi(y,x,\sigma)$ — матрица Карлемана.

Используя матрицу Карлемана, легко вывести оценку устойчивости решения задачи Коши (1), (2) (многомерный аналог теоремы о двух константах), а также указать метод эффективного решения этой задачи [2].

Пусть $K(w)$, $w = u+iv$, — целая функция, принимающая на вещественной оси вещественные значения и удовлетворяющая условиям

$$K(u) \neq 0, \quad \sup_{v \geq 1} |v^p K^p(w)| = M(p,u) < \infty, \quad p = \overline{0,m}, \quad -\infty < u < \infty.$$

Положим $s = \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_{m-1} - x_{m-1})^2$. Функцию $\Phi(y,x)$ при $\alpha > 0$ определим следующими равенствами:
если $m = 2$, то

$$-2\pi K(x_2)\Phi(y,x) = \int_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{K(i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_2)}{i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_2-x_2}\right]\frac{u\,du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}; \tag{3}$$

если $m = 2n+1$, $n \geq 1$, то

$$c_m K(x_m)\Phi(y,x) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} \int_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{K(i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_m)}{i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_m-x_m}\right]\frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}, \tag{4}$$

где $c_m = (-1)^{n-1} 2^{-n} (m-2)\pi\omega_m(2n-1)!$;
если $m = 2n$, $n \geq 2$, то

$$c_m K(x_m)\Phi(y,x) = \frac{\partial^{n-2}}{\partial s^{n-2}} \operatorname{Im}\left[\frac{K(\alpha i + y_m)}{\alpha(\alpha i + y_m - x_m)}\right], \tag{5}$$

где $c_m = (-1)^{n-1}(n-1)!(m-2)\omega_m$.

В [15] доказана

Лемма 1. *Функция $\Phi(y,x)$, определенная формулами* (3)–(5), *представима в виде*

$$\Phi(y,x) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} + g_2(y,x), \qquad m = 2,$$
$$\Phi(y,x) = \frac{r^{2-m}}{\omega_m(m-2)} + g_m(y,x), \quad m \geq 3,$$

где $g_m(y,x)$, $m \geq 2$, — функция, определенная для всех значений y, x и гармоническая по переменной y во всем R^m.

С помощью функции $\Phi(y,x)$ построим матрицу

$$\Pi(y,x) = \|\Pi_{ij}(y,x)\|_{m\times m} =$$
$$= \left\| \frac{1}{2\mu(\lambda+2\mu)} \left(\delta_{ij}(\lambda+3\mu)\Phi(y,x) - (\lambda+\mu)(y_j-x_j)\frac{\partial}{\partial y_i}\Phi(y,x) \right) \right\|_{m\times m}, \quad i,j=1,2,\ldots,m. \quad (6)$$

На основе леммы 1 нетрудно доказать, что матрица $\Pi(y,x)$, определенная по формуле (6), представима в виде

$$\Pi(y,x) = \Gamma(y,x) + G(y,x),$$

где $G(y,x) = \|G_{ij}(y,x)\|_{m\times m}$ — матрица, определенная для всех значений y, x, и по переменной y удовлетворяющая системе (1), т. е. $A(\partial_y)G(y,x) = 0$.

Теперь приведем основные результаты для данной задачи в конкретных областях.

3. Решение задачи (1), (2) для специальных классов областей

I. Пусть $D_\rho \subset R^m$ — ограниченная односвязная область, граница которой состоит из поверхности конуса

$$\sum : \alpha_1 = \tau y_m, \quad \alpha_1^2 = y_1^2 + \cdots + y_{m-1}^2, \quad \tau = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2\rho}, \quad y_m > 0, \quad \rho > 1,$$

и гладкого куска поверхности S, лежащего внутри конуса, и пусть $x_0 = (0,0,\ldots,x_m) \in D_\rho$.

Введем обозначения $\beta = \tau y_m - \alpha_0$, $\gamma = \tau x_m - \alpha_0$, $\alpha_0^2 = x_1^2 + \cdots + x_{m-1}^2$, $\alpha^2 = (y_1-x_1)^2 + \cdots + (y_{m-1}-x_{m-1})^2$, $w = i\sqrt{u^2+\alpha^2}\,\tau + \beta$, $w_0 = i\tau\alpha + \beta$, $s = \alpha^2$.

Рассмотрим в области D_ρ задачу (1), (2). Для нахождения приближенного решения задачи (1), (2) построим матрицу Карлемана в явном виде.

При $\sigma > 0$ в формулах (3)–(5) положим $\Phi(y,x) = \Phi_\sigma(y,x)$,

$$K(w) = E_\rho(\sigma^{1/\rho}\omega), \quad K(x_m) = E_\rho(\sigma^{1/\rho}\gamma),$$

где $E_\rho(w)$ — функция Миттаг-Леффлера [20].

Тогда всякое регулярное решение уравнения (1) имеет вид

$$U(x) = \int_{\partial D_\rho} [\Pi_\sigma(y,x)\{T(\partial_y,n)U(y)\} - U(y)\{T(\partial_y,n)\Pi_\sigma(y,x)\}]ds_y, \quad x \in D_\rho. \quad (7)$$

Здесь $\Pi_\sigma(y,x)$ строится по формуле (6) при

$$\Phi(y,x) = \Phi_\sigma(y,x) = \frac{\varphi_\sigma(y,x)}{c_m E_\rho(\sigma^{1/\rho}\gamma)}, \quad y \neq x,$$

где $\varphi_\sigma(y,x)$ определяется следующими равенствами: если $m=2$, то

$$\varphi_\sigma(y,x) = \int_0^\infty \operatorname{Im}\frac{E_\rho(\sigma^{1/\rho}w)}{\omega_1 - x_2}\frac{u\,du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}};$$

если $m = 2n+1$, $n \geq 1$, то

$$\varphi_\sigma(y,x) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}}\int_0^\infty \operatorname{Im}\frac{E_\rho(\sigma^{1/\rho}w)}{i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_m-x_m}\frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}, \quad y \neq x;$$

если $m = 2n$, $n \geq 2$, то

$$\varphi_\sigma(y,x) = \frac{\partial^{n-2}}{\partial s^{n-2}}\operatorname{Im}\frac{E_\rho(\sigma^{1/\rho}w)}{\alpha(i\alpha+y_m-x_m)}, \quad y \neq x.$$

Заметим, что в точке $(0,0,\ldots,0)\in\partial D_\rho$ нормальная производная не существует, но $U(y)$ и $\Phi_\sigma(y,x)$ $(x\in D_\rho)$ имеют непрерывные частные производные вплоть до ∂D_ρ, поэтому полагаем

$$\frac{\partial U}{\partial n}(0)=\frac{\partial U}{\partial y_m}(0),\quad \frac{\partial \Phi_\sigma(0,x)}{\partial n}=\frac{\partial \Phi_\sigma(0,x)}{\partial y_m},\quad x\in D_\rho.$$

В дальнейшем для доказательства основных теорем понадобятся следующие оценки функции $\Phi_\sigma(y,x)$ ([21]).

Лемма 2. I. *Пусть $m=2n+1$, $n\geq 1$, $x\in D_\rho$, $y\neq x$, $\sigma\geq\sigma_0>0$, тогда*
1) *при $\beta\leq\alpha$ справедливы неравенства*

$$\begin{aligned}
&|\Phi_\sigma(y,x)|\leq C_1(\rho)\frac{\sigma^{m-2}}{r^{m-2}}\exp(-\sigma\gamma^\rho),\\
&\left|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial n}(y,x)\right|\leq C_2(\rho)\frac{\sigma^{m}}{r^{m-1}}\exp(-\sigma\gamma^\rho),\quad y\in\partial D_\rho,\\
&\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial n}(y,x)\right|\leq C_3(\rho)\frac{\sigma^{m+2}}{r^{m}}\exp(-\sigma\gamma^\rho),\quad i=\overline{1,m};
\end{aligned}\tag{8}$$

2) *при $\beta>\alpha$ справедливы неравенства*

$$\begin{aligned}
&|\Phi_\sigma(y,x)|\leq C_4(\rho)\frac{\sigma^{m-2}}{r^{m-2}}\exp(-\sigma\gamma^\rho+\sigma\operatorname{Re}\omega_0^\rho),\\
&\left|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial n}(y,x)\right|\leq C_5(\rho)\frac{\sigma^{m}}{r^{m-1}}\exp(-\sigma\gamma^\rho+\sigma\operatorname{Re}\omega_0^\rho),\quad y\in\partial D_\rho,\\
&\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial n}(y,x)\right|\leq C_6(\rho)\frac{\sigma^{m+2}}{r^{m}}\exp(-\sigma\gamma^\rho+\sigma\operatorname{Re}\omega_0^\rho),\quad i=\overline{1,m}.
\end{aligned}\tag{9}$$

II. *Пусть $m=2n$, $n\geq 2$, $x\in D_\rho$, $x\neq y$, $\sigma\geq\sigma_0>0$, тогда*
1) *при $\beta\leq\alpha$ выполняются неравенства*

$$\begin{aligned}
&|\Phi_\sigma(y,x)|\leq \widetilde{C}_1(\rho)\frac{\sigma^{m-3}}{r^{m-2}}\exp(-\sigma\gamma^\rho),\\
&\left|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial n}(y,x)\right|\leq \widetilde{C}_2(\rho)\frac{\sigma^{m}}{r^{m-1}}\exp(-\sigma\gamma^\rho),\quad y\in\partial D_\rho,\\
&\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial n}(y,x)\right|\leq \widetilde{C}_3(\rho)\frac{\sigma^{m+2}}{r^{m}}\exp(-\sigma\gamma^\rho),\quad y\in\partial D_\rho,\quad i=1,m;
\end{aligned}\tag{10}$$

2) *при $\beta>\alpha$ выполняются неравенства*

$$\begin{aligned}
&|\Phi_\sigma(y,x)|\leq \widetilde{C}_4(\rho)\frac{\sigma^{m-3}}{r^{m-2}}\exp(-\sigma\gamma^\rho+\sigma\operatorname{Re}\omega_0^\rho),\\
&\left|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial n}(y,x)\right|\leq \widetilde{C}_5(\rho)\frac{\sigma^{m}}{r^{m-1}}\exp(-\sigma\gamma^\rho+\sigma\operatorname{Re}\omega_0^\rho),\quad y\in\partial D_\rho,\\
&\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial n}(y,x)\right|\leq \widetilde{C}_6(\rho)\frac{\sigma^{m+2}}{r^{m}}\exp(-\sigma\gamma^\rho+\sigma\operatorname{Re}\omega_0^\rho),\quad y\in\partial D_\rho,\quad i=1,m.
\end{aligned}\tag{11}$$

III. *Пусть $m=2$, $x\in D_\rho$, $x\neq y$, $\sigma\geq\sigma_0>0$, тогда*
1) *если $\beta\leq\alpha$, то*

$$\begin{aligned}
&|\Phi_\sigma(y,x)|\leq C_7(\rho)E_\rho^{-1}(\sigma^{1/\rho}\gamma)\ln\frac{1+r^2}{r^2},\\
&\left|\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial y_i}(y,x)\right|\leq C_8(\rho)\frac{E_\rho^{-1}(\sigma^{1/\rho}\gamma)}{r};
\end{aligned}\tag{12}$$

2) *если $\beta > \alpha$, то*

$$
\begin{aligned}
&|\Phi_\sigma(y,x)| \le \widetilde{C}_7(\rho) E_\rho^{-1}(\sigma^{1/\rho}\gamma)\left(\ln\frac{1+r^2}{r^2}\right)\exp(\sigma\operatorname{Re}\omega_0^\rho),\\
&\left|\frac{\partial\Phi_\sigma(y,x)}{\partial y_i}\right| \le \widetilde{C}_8(\rho) E_\rho^{-1}(\sigma^{1/\rho}\gamma)\frac{1}{2}\exp(\sigma\operatorname{Re}\omega_0^\rho).
\end{aligned}
\tag{13}
$$

В этих оценках $C_i(\rho)$ и $\widetilde{C}_i(\rho)$, $i = 1,\dots,8$, означают константы, зависящие только от ρ.

В предельном случае, когда $\beta = \alpha$ ($\operatorname{Re}\omega_0^\rho = 0$), неравенства (8) и (9), (10) и (11), а также (12) и (13) совпадают (с точностью до постоянного множителя).

При фиксированном $x \in D_\rho$ обозначим через S^* ту часть S, на которой $\beta \ge \alpha$. Если $x = x_0 \in D_\rho$, то $S = S^*$ (в этом случае $\beta = \tau y_m$, $\alpha = \alpha_1$ и неравенство $\beta \ge \alpha$ означает, что y лежит внутри или на поверхности конуса $\alpha_1 = \beta$).

Пусть $U(y)$ — регулярное решение уравнения (1) в D_ρ. Положим

$$
U_\sigma(x) = \int_{S^*}[\Pi_\sigma(y,\alpha)\{T(\partial_y,n)U(y)\} - U(y)\{T(\partial_y,n)\Pi_\sigma(y,x)\}]ds_y, \quad x \in D_\rho. \tag{14}
$$

При этих условиях справедлива

Теорема 3. *Пусть $U(x)$ — регулярное решение уравнения (1) в области D_ρ и удовлетворяет на $\sum = \partial D_\rho \setminus S$ граничному условию*

$$
|U(y)| + |T(\partial_y,n)U(y)| \le M, \quad y \in \sum. \tag{15}
$$

Тогда 1) если $m = 2n+1$, $n \ge 1$, то при $x \in D_\rho$, $\sigma \ge \sigma_0 > 0$

$$
|U(x) - U_\sigma(x)| \le MC_1(x)\sigma^{m+1}\exp(-\sigma\gamma^\rho);
$$

2) *если $m = 2n$, $n \ge 1$, то при $x \in D_\rho$, $\sigma \ge \sigma_0 > 0$*

$$
|U(x) - U_\sigma(x)| \le MC_2(x)\sigma^{m}\exp(-\sigma\gamma^\rho),
$$

где $C_k(x) = C_k(\rho) = \int\limits_{\partial D_\rho} \frac{ds_y}{r^m}$, $k = 1,2$, $C_k(\rho)$ — постоянные, зависящие только от ρ и размерности пространства.

Доказательство. Из формулы (7) для регулярного решения уравнения (1) имеем

$$
\begin{aligned}
U(x) = &\int_{S^*}[\Pi_\sigma(y,x)\{T(\partial_y,n)U(y)\} - U(y)\{T(\partial_y,n)\Pi_\sigma(y,x)\}]ds_y + \\
&+ \int_{\partial D_\rho\setminus S^*}[\Pi_\sigma(y,x)\{T(\partial_y,n)U(y)\} - U(y)\{T(\partial_y,n)\Pi_\sigma(y,x)\}]ds_y, \quad x \in D_\rho,
\end{aligned}
$$

из которого согласно (14) получим

$$
\begin{aligned}
|U(x) - U_\sigma(x)| \le &\left|\int_{\partial D_\rho\setminus S^*}[\Pi_\sigma(y,x)\{T(\partial_y,n)U(y)\} - U(y)\{T(\partial_y,n)\Pi_\sigma(y,x)\}]ds_y\right| \le \\
&\le \int_{\partial D_\rho\setminus S^*}[|\Pi_\sigma(y,x)| + |T(\partial_y,n)\Pi_\sigma(y,x)|][|T(\partial_y,n)U(y)| + |U(y)|]ds_y.
\end{aligned}
$$

Теперь при $x \in D_\rho$ и $y \in \partial D_\rho \setminus S^*$, т. е. при $\beta \le \alpha$ согласно формуле (6), лемме 2 и условию теоремы (15) при $m = 2n+1$, $n \ge 1$ получим

$$
|U(x) - U_\sigma(x)| \le MC_1(\rho)\sigma^{m+1}\exp(-\sigma\gamma^\rho)\int_{\partial D_\rho}\frac{ds_y}{r^m},
$$

а при $m = 2n$, $n \geq 1$

$$|U(x) - U_\sigma(x)| \leq MC_2(\rho)\sigma^m \exp(-\sigma\gamma^\rho) \int_{\partial D_\rho} \frac{ds_y}{r^m}. \quad \Box$$

Приведем результат для приближенного вычисления $U(x)$, когда на S вместо $U(y)$ и $T(\partial_y, n)U(y)$ заданы их такие непрерывные приближения $f_\delta(y)$ и $g_\delta(y)$, что

$$\max_S |U(y) - f_\delta(y)| + \max_S |T(\partial_y, n)U(y) - g_\delta(y)| \leq \delta, \quad 0 < \delta < 1. \tag{16}$$

Определим функцию

$$U_{\sigma\delta}(x) = \int_{S^*} [\Pi_\sigma(y,x)g_\delta(y) - f_\delta(y)\{T(\partial_y,n)\Pi_\sigma(y,x)\}]ds_y, \quad x \in D_\rho,$$

где $\sigma = \frac{1}{R^\rho} \ln \frac{M}{\delta}$, $R^\rho = \max\limits_{y\in S} \operatorname{Re}\omega_0$.

Тогда имеет место

Теорема 4. *Пусть $U(x)$ — регулярное решение уравнения (1) в области D_ρ, на всей границе ∂D_ρ удовлетворяющее граничному условию (15). Тогда*
1) если $m = 2n+1$, $n \geq 1$, то

$$|U(x) - U_{\sigma\delta}(x)| \leq MC_1(x)\delta^{(\frac{\gamma}{R})^\rho} \ln^{m+1} \frac{M}{\delta};$$

2) если $m = 2n$, $n \geq 1$, то

$$|U(x) - U_{\sigma\delta}(x)| \leq C_2(x)\delta^{(\frac{\gamma}{R})^\rho} \ln^{m} \frac{M}{\delta},$$

где $C_k(x) = C_k(\rho) \int\limits_{\partial D_\rho} \frac{ds_y}{r^m}$, $k = 1, 2$.

Доказательство. Согласно формуле (7) и определению функции $U_{\sigma\delta}(x)$ имеем

$$U(x) - U_{\sigma\delta}(x) = \int_{\partial D_\rho \setminus S^*} [\Pi_\sigma(y,x)\{T(\partial_y,n)U(y)\} - U(y)\{T(\partial_y,n)\Pi_\sigma(y,x)\}]ds_y +$$
$$+ \int_{S^*} [\Pi_\sigma(y,x)\{T(\partial_y,n)U(y) - g_\delta(y)\} + (U(y) - f_\delta(y))\{T(\partial_y,n)\Pi_\sigma(y,x)\}]ds_y = I_1 + I_2.$$

Тогда по теореме 3 при $m = 2n+1$, $n \geq 1$

$$|I_1| \leq MC_1(\rho)\sigma^{m+1} \exp(-\sigma\gamma^\rho) \int_{\partial D_\rho} \frac{ds_y}{r^m}$$

и при $m = 2n$, $n \geq 1$

$$|I_1| \leq MC_2(\rho)\sigma^m \exp(-\sigma\gamma^\rho) \int_{\partial D_\rho} \frac{ds_y}{r^m}.$$

Оценим

$$|I_2| \leq \int_{S^*} (|\Pi_\sigma(y,x)| + |T(\partial_y,n)\Pi_\sigma(y,x)|)(|T(\partial_y,n)U(y) - g_\delta(y)| + |U(y) - f_\delta(y)|)ds_y.$$

По лемме 2 и условию (16) при $m = 2n+1$, $n \geq 1$ получим

$$|I_2| \leq \widetilde{C}_1(\rho)\sigma^{m+1}\delta \exp(-\sigma\gamma^\rho) \int_{\partial D_\rho} \frac{ds_y}{r^m}$$

и для $m = 2n$, $n \geq 1$

$$|I_2| \leq \widetilde{C}_2(\rho)\sigma^m\delta \exp(-\sigma\gamma^\rho) \int_{\partial D_\rho} \frac{ds_y}{r^m}.$$

Тогда, объединяя оценки для I_1 и I_2 и подбирая

$$\sigma = \frac{1}{R^\rho} \ln \frac{M}{\delta}, \quad \text{где} \quad R^\rho = \max_{y\in S} \operatorname{Re}\omega_0,$$

для каждого случая m получим доказательство теоремы 4. $\square$

Из доказанных теорем вытекает

Следствие 1. Предельные равенства

$$\lim_{\sigma\to\infty} U_\sigma(x) = U(x), \quad \lim_{\delta\to 0} U_{\sigma\delta}(x) = U(x)$$

выполняются равномерно на каждом компакте из D_ρ.

II. Теперь приведем аналогичные результаты для неограниченных областей типа слоя.

Пусть D — бесконечная область из R^m, $m \geq 3$, лежащая внутри слоя наименьшей ширины, определяемого неравенством

$$0 < y_m < h, \quad h = \frac{\pi}{\rho}, \quad \rho > 0,$$

причем ∂D простирается до бесконечности. Будем предполагать, что для некоторого $b_0 > 0$ площадь удовлетворяет условию роста

$$\int_{\partial D} \exp\{-b_0 \operatorname{ch} \rho_0 |y'|\} ds_y < \infty, \quad 0 < \rho_0 < \rho, \quad y' = (y_1, \ldots, y_{m-1}). \tag{17}$$

Пусть $U(y)$ — регулярное решение системы (1), удовлетворяющее условию роста

$$|U(y)| + |T(\partial_y, n)U(y)| \leq C \exp[\exp \rho_2 |y'|], \quad \rho_2 < \rho_1, \quad y \in D, \quad |y'|^2 = y_1^2 + \cdots + y_{m-1}^2. \tag{18}$$

При $\sigma \geq 0$ в (5)–(7) положим

$$K(\omega) = (\omega - x_m + 3h)^{-k} \exp\left(\sigma\omega - b \operatorname{ch} i\rho_1(\omega - \tfrac{h}{2}) - b_1 \operatorname{ch} i\rho_0(\omega - \tfrac{h}{2})\right),$$
$$K(x_m) = (3h)^{-k} \exp\left(\sigma x_m + b \cos \rho_1(x_m - \tfrac{h}{2}) + b_1 \cos \rho_0(x_m - \tfrac{h}{2})\right),$$
$$\omega = y_m + iv, \quad 0 < \rho_0, \quad \rho_1 < \rho, \quad 0 < x_m < h, \quad b > 0, \quad b_1 > b_0\left(\cos \rho_0 \tfrac{h}{2}\right)^{-1}.$$

Возьмем $\Phi(y, x) = \Phi_\sigma(y, x)$ и по формуле (6) построим $\Pi_\sigma(y, x)$.

Теорема 5. *Пусть $U(x)$ — регулярное решение системы* (1) *в области D. Тогда при условиях* (17) *и* (18)

$$U(x) = \int_{\partial D} [\Pi_\sigma(y, x)\{T(\partial_y, n)U(y)\} - U(y)\{T(\partial_y, n)\Pi_\sigma(y, x)\}] ds_y, \quad x \in D.$$

Доказательство. Обозначим

$$D_R = \{y : y \in D\} \cap \{x : |x| < R\}, \quad D_R^\infty = D \setminus D_R, \quad R > 0.$$

Тогда $\partial D = \partial D_R \cup \partial D_R^\infty$ и

$$\int_{\partial D} [\Pi_\sigma\{T(\partial_y, n)U(y)\} - U(y)\{T(\partial_y, n)\Pi_\sigma\}] ds_y =$$
$$= \int_{\partial D_R} [\Pi_\sigma\{T(\partial_y, n)U(y)\} - U(y)\{T(\partial_y, n)\Pi_\sigma\}] ds_y +$$
$$+ \int_{\partial D_R^\infty} [\Pi_\sigma\{T(\partial_y, n)U(y)\} - U(y)\{T(\partial_y, n)\Pi_\sigma\}] ds_y =$$
$$= U(x) + \int_{\partial D_R^\infty} [\Pi_\sigma\{T(\partial_y, n)U(y)\} - U(y)\{T(\partial_y, n)\Pi_\sigma\}] ds_y, \quad x \in D_R.$$

Докажем, что

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\partial D_R^\infty} [\Pi_\sigma\{T(\partial_y, n)U(y)\} - U(y)\{T(\partial_y, n)\Pi_\sigma\}] ds_y = 0.$$

Действительно,

$$\left|\int_{\partial D_R^\infty}[\Pi_\sigma\{T(\partial_y,n)U(y)\}-U(y)\{T(\partial_y,n)\Pi_\sigma\}]ds_y\right|\le\int_{\partial D_R^\infty}[|\Pi_\sigma|+|T\Pi_\sigma|][|U(y)|+|TU(y)|]ds_y\le$$
$$\le C\int_{\partial D_R^\infty}\exp(\exp\rho_2|y'|)[|\Pi_\sigma|+|T\Pi_\sigma|]ds_y\to 0,\quad R\to\infty,$$

т. к.

$$|\Pi_\sigma|+|T\Pi_\sigma|\le C\exp[-\varepsilon\operatorname{ch}\rho_1|y'|-\delta\operatorname{ch}\rho_0|y'|],$$

где $\varepsilon=b\cos\rho_1(y_2-\frac{h}{2})$, $\delta=b_1\cos\rho_0(y_2-\frac{h}{2})$, $\Pi_\sigma=\Pi_\sigma(y,x)$. □

Пусть теперь граница области ∂D состоит из гиперплоскости $y_m=0$ и гладкой поверхности Ляпунова S, простирающейся до бесконечности и лежащей в слое

$$0<y_m\le h,\quad h=\frac{\pi}{\rho},\quad \rho>0.$$

Будем предполагать, что S задана уравнением

$$y_m=f(y'),\quad y'\in R^{m-1},$$

где $f(y')$ удовлетворяет условию

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y_j}\right|\le M_1<\infty,\quad j=\overline{1,m-1}.$$

Для этой области возьмем

$$K(\omega)=(\omega-x_m+3h)^{-n-1}\exp\sigma\omega,\quad m=2n+1,\ \ n\ge 1,$$
$$K(\omega)=(\omega-x_m+3h)^{-n}\exp\sigma\omega,\qquad m=2n,\ \ n\ge 1,\quad \omega=iv+y_m.$$

По формулам (4)–(6) построим матрицу Карлемана $\Pi_\sigma(y,x)$ и положим

$$U_\sigma(x)=\int_{\partial D}[\Pi_\sigma(y,x)\{T(\partial_y,n)U(y)\}-U(y)\{T(\partial_y,n)\Pi_\sigma(y,x)\}]ds_y,\quad x\in D.$$

Теорема 6. *Пусть $U(x)$ — регулярное решение системы (1), удовлетворяющее условиям*

$$|U(x)|+|T(\partial_y,n)U(x)|\le\exp\left(O(\exp\rho|x'|)\right),\quad x\to\infty,\quad x\in D,$$

где $\varphi(x)=O(\phi(x))$, $x\to\infty$, означает $\frac{\varphi(x)}{\phi(x)}\to 0$, $x\to\infty$,

$$|U(y)|+|T(\partial_y,n)U(y)|\le M,\quad y\in\partial D.$$

Тогда справедливо неравенство

$$|U(x)-U_\sigma(x)|\le MC_\rho(x)C(\sigma)\exp(-\sigma x_m),\quad \sigma\ge\sigma_0>0,\quad x\in D,$$

где

$$C_\rho(x)=C(\rho)\int_{y_m=0}\frac{ds_y}{r^m},\quad C(\sigma)=\begin{cases}\sigma^n, & m=2n,\ n\ge 2;\\ \sigma^{n+1}, & m=2n+1,\ n\ge 1,\end{cases}$$

$C(\rho)$ — постоянная, зависящая от ρ и размерности пространства.

Доказательство аналогично доказательствам предыдущих теорем.

В заключение авторы выражают признательность профессору Ш.Я. Ярмухамедову за постановку задачи и постоянные обсуждения в процессе ее решения.

Литература

1. Лаврентьев М.М. *О некоторых некорректных задачах математической физики.* – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1962. – 92 с.
2. Лаврентьев М.М. *О задаче Коши для уравнения Лапласа* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1956. – Т. 20. – № 6. – С. 819–842.
3. Мергелян С.Н. *Гармоническая аппроксимация и приближенное решение задачи Коши для уравнения Лапласа* // УМН. – 1956. –Т. 11. – № 5. – С. 3–26.
4. Иванов В.К. *Задача Коши для уравнения Лапласа в бесконечной полосе* // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т.1. – № 1. – С. 131–136.
5. Ишанкулов Т.И., Махмудов О.И. *Задача Коши для системы уравнений термоупругости в пространстве* // Матем. заметки. – 1998. – Т. 64. – № 2. – С. 210–217.
6. Махмудов О.И. *Задача Коши для системы теории упругости в пространстве*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Новосибирск, 1990. – 80 с.
7. Махмудов О.И. *Задача Коши для системы уравнений пространственной теории упругости в перемещениях* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 1. – С. 54–61.
8. Махмудов О.И., Ниёзов И.Э. *Регуляризация решения задачи Коши для системы уравнений теории упругости в перемещениях* // Сиб. матем. журн. – 1998. – Т. 39. – № 2. – С. 369–376.
9. Махмудов О.И., Ниёзов И.Э. *Об одной задаче Коши для системы уравнений теории упругости* // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36. – № 5. – С. 674–678.
10. Махмудов О.И., Ниёзов И.Э. *Регуляризация решения задачи Коши для системы теории упругости* // Матем. заметки. – 2000. – Т. 68. – № 4. – С. 548–553.
11. Махмудов О.И., Ниёзов И.Э. *Задача Коши для системы теории упругости в бесконечной области* // Узб. матем. журн. – 1999. – № 2. – С. 34–39.
12. Ишанкулов Т.И., Махмудов О.И. *Задача Коши для системы уравнений моментной теории упругости в пространстве* // Узб. матем. журн. – 1996. – № 1. – С. 22–30.
13. Петровский И.Г. *Лекции об уравнениях с частными производными.* – М.: Физматгиз, 1961. – 400 с.
14. Тихонов А.Н. *О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации* // ДАН СССР. – 1963. – Т. 151. – № 3. – С. 501–504.
15. Ярмухамедов Ш.Я. *О задаче Коши для уравнения Лапласа* // ДАН СССР. – 1977. – Т. 235. – № 2. – С.281–283.
16. Ярмухамедов Ш.Я., Ишанкулов Т.И., Махмудов О.И. *О задаче Коши для системы уравнений теории упругости в пространстве* // Сиб. матем. журн. – 1992. –Т. 33. – № 1. – С. 186–190.
17. Айзенберг Л.А., Тарханов Н.Н. *Абстрактная формула Карлемана* // ДАН СССР. – 1988. – Т. 298. – № 6. – С. 1292–1296.
18. Тарханов Н.Н. *О матрице Карлемана для эллиптических систем* // ДАН СССР. – 1985. – Т. 284. – № 2. – С. 294–297.
19. Купрадзе В.Д., Бурчуладзе Т.В., Гегелия Т.Г., Башелейшвили М.О. *Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. Классическая и микрополярная теория. Статика, гармонические колебания, динамика. Основы и методы решения.* – М.: Наука, 1976. – 664 с.
20. Джрбашян М.М. *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области.* – М.: Наука, 1966. – 671 с.
21. Ярмухамедов Ш.Я. *О задаче Коши для уравнения Лапласа*: Дис. … докт. физ.-матем. наук. – Новосибирск, 1983. – 206 с.

Самаркандский государственный университет

Поступила 02.07.2004