ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 8 (447)

УДК 512.579

А.Г. ПИНУС

ОБ УСЛОВНО РАЦИОНАЛЬНО ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ДИСКРИМИНАТОРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Понятие условного терма было введено в работе автора [1]. На основе этого понятия в [2] было введено понятие условной рациональной эквивалентности универсальных алгебр и их классов, обобщающее известное понятие рациональной эквивалентности. В [3]–[5] изучалась условно рациональная эквивалентность различных конечных алгебр, а в [6] описаны инварианты отношения условной рациональной эквивалентности для локально конечных йонссоновских универсальных классов алгебр. В [1] отмечается, что на дискриминаторных алгебрах условно термальные функции являются термальными и тем самым условно рациональная эквивалентность дискриминаторных алгебр равносильна рациональной эквивалентности. В данной работе аналогичный результат доказывается для локально конечных дискриминаторных многообразий и описываются теоретико-множественные инварианты классов рационально (условно рационально) эквивалентных локально конечных дискриминаторных многообразий.

Напомним необходимые определения. Под условием сигнатуры будем понимать конечную совокупность равенств и неравенств между термами $t^i_j(\overline{x})$ сигнатуры σ

$$\mathcal{T}(\overline{x}) = \begin{cases} t^1_1(\overline{x}) =^{i_1} t^1_2(\overline{x}); \\ \cdots\cdots\cdots \\ t^n_1(\overline{x}) =^{i_n} t^n_2(\overline{x}), \end{cases}$$

где $=^1$ есть $=$, $=^0$ есть $\neq$, $i_j \in \{0,1\}$. Под полной системой условий понимаем такую совокупность $\{\mathcal{T}_1(\overline{x}), \dots, \mathcal{T}_k(\overline{x})\}$ условий, что формула $\bigvee\limits_{i=1}^{k} \mathcal{T}_i(\overline{x})$ является тождественно истинной, а при любых $r \neq p \leq k$ формулы $\mathcal{T}_r(\overline{x}) \& \mathcal{T}_p(\overline{x})$ ложны. Понятие условного терма определяется следующей индукцией:

а) переменные и любые константы сигнатуры σ являются условными термами этой сигнатуры,

б) если $t_1(\overline{x}), \dots, t_n(\overline{x})$ — условные термы сигнатуры σ и f — n-местный функциональный символ сигнатуры σ, то $f(t_1(\overline{x})), \dots, f(t_n(\overline{x}))$ — также условный терм сигнатуры σ;

в) если $t_1(\overline{x}), \dots, t_n(\overline{x})$ — условные термы сигнатуры σ, а $\{\mathcal{T}_1(\overline{x}), \dots, \mathcal{T}_n(\overline{x})\}$ — полная система условий этой сигнатуры, то

$$t(\overline{x}) = \begin{cases} \mathcal{T}_1(\overline{x}) \to t_1(\overline{x}); \\ \cdots\cdots\cdots \\ \mathcal{T}_n(\overline{x}) \to t_n(\overline{x}) \end{cases}$$

— также условный терм сигнатуры σ;

г) любой условный терм сигнатуры σ определяется за конечное число шагов согласно правилам а)–в).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01675).

Каждый условный терм сигнатуры σ интерпретируется некоторой условно термальной функцией на основном множестве любой алгебры этой сигнатуры. При этом для правил а), б) из определения условных термов предполагаем стандартные интерпретации, имеющие место при интерпретации термов сигнатуры σ. Если же условный терм определяется по правилу в) из определения условных термов, то для любых $\overline{a} \in \mathcal{A}^k$ (k — длина кортежа переменных $\overline{x}$) положим $t(\overline{a}) = b$, если для некоторого $i \leq n$ имеет место $\mathcal{A} \models \mathcal{T}_i(\overline{a})$ и $t_i(\overline{a}) = b$.

Пусть $\mathrm{CT}(\sigma)$ — совокупность условных термов сигнатуры σ. Два класса универсальных алгебр $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ сигнатур σ_1 и σ_2 соответственно будем называть условно рационально эквивалентными, если существуют отображения $F_1(F_2)$ сигнатурных символов операций из $\sigma_1(\sigma_2)$ в условные термы сигнатуры $\sigma_2(\sigma_1)$ такие, что для n-арного символа $f \in \sigma_1(\sigma_2)$ $F_1(f)(F_2(f))$ есть n-арный терм сигнатуры $\sigma_2(\sigma_1)$ и при этом:

1) для любой $\mathcal{K}_1$-алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma_1\rangle$ алгебра $F_2(\mathcal{A}) = \langle A; \sigma_2\rangle \in \mathcal{K}_2$, где σ_2-операции алгебры $F_2(\mathcal{A})$ определены $F_2(\sigma_2)$-условными термами алгебры $\mathcal{A}$;

2) для любой $\mathcal{K}_2$-алгебры $\mathcal{A} = \langle A; \sigma_2\rangle$ алгебра $F_1(\mathcal{A}) = \langle A; \sigma_1\rangle \in \mathcal{K}_1$, где σ_1-операции алгебры $F_1(\mathcal{A})$ определены $F_1(\sigma_1)$-условными термами алгебры $\mathcal{A}$;

3) для любой $\mathcal{K}_1$-алгебры $\mathcal{A}$ имеет место $F_1(F_2(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$;

4) для любой $\mathcal{K}_2$-алгебры $\mathcal{A}$ имеет место $F_2(F_1(\mathcal{A})) = \mathcal{A}$.

При замене в этом определении условных термов на стандартные получаем определение рациональной эквивалентности классов $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$. Условно рациональную эквивалентность классов $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ обозначим как $\mathcal{K}_1 \equiv_C \mathcal{K}_2$, рациональную эквивалентность — как $\mathcal{K}_1 \equiv \mathcal{K}_2$.

Основные сведения, относящиеся к дискриминаторным многообразиям, можно найти, к примеру, в [7]–[9]. Через $\mathcal{M}_{SI}$ будем обозначать класс подпрямо неразложимых алгебр многообразия $\mathcal{M}$. Для дискриминаторных многообразий $\mathcal{M}$, класс $\mathcal{M}_{SI}$ совпадает с классами простых и дискриминаторных алгебр. Напомним также, что любая алгебра дискриминаторного многообразия изоморфна булеву произведению дискриминаторных алгебр этого многообразия.

Теорема 1. *Если $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ — локально-конечные дискриминаторные многообразия, то следующие условия эквивалентны*:

1) $\mathcal{M}_1 \equiv \mathcal{M}_2$; 2) $\mathcal{M}_1 \equiv_C \mathcal{M}_2$; 3) $(\mathcal{M}_1)_{SI} \equiv (\mathcal{M}_2)_{SI}$.

Доказательство. Импликации 1) $\to$ 2) и 3) $\to$ 1) очевидны. Таким образом, в доказательстве нуждается лишь импликация 2) $\to$ 3). Прежде всего отметим, что если $\mathcal{M}_{SIf}$ — совокупность конечных подпрямо неразложимых $\mathcal{M}$-алгебр, то из отношения $(\mathcal{M}_1)_{SIf} \equiv (\mathcal{M}_2)_{SIf}$ следует отношение $(\mathcal{M}_1)_{SI} \equiv (\mathcal{M}_2)_{SI}$. Действительно, это вытекает из того, что бесконечная $\mathcal{M}_i$-алгебра дискриминаторна тогда и только тогда, когда она допускает локальное покрытие конечными дискриминаторными алгебрами. Таким образом, требуется доказать, что из условия $\mathcal{M}_1 \equiv_C \mathcal{M}_2$ вытекает $(\mathcal{M}_1)_{SIf} \equiv (\mathcal{M}_2)_{SIf}$. Как хорошо известно, если конечная алгебра $\mathcal{A}$ разложима в булево произведение алгебр $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$, то $\mathcal{A}$ изоморфна прямому произведению алгебр $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$. При этом представление конечной $\mathcal{M}_i$-алгебры $\mathcal{A}$ в виде прямого произведения подпрямо неразложимых (дискриминаторных) $\mathcal{M}_i$-алгебр единственно с точностью до перестановки сомножителей. Заметим также, что условно рациональная эквивалентность сохраняет типы изоморфизма алгебр, т. е. если $\mathcal{A}_1 \equiv_C \mathcal{A}_1'$, $\mathcal{A}_2 \equiv_C \mathcal{A}_2'$ и условная эквивалентность алгебр $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_1'$ и $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_2'$ осуществляется одними и теми же условными термами, то отношения $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_1' \cong \mathcal{A}_2'$ равносильны.

Пусть $F_1 : \sigma_1 \to CT(\sigma_2)$, $F_2 : \sigma_2 \to CT(\sigma_1)$ — отображения, осуществляющие условно рациональную эквивалентность многообразий $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$. Пусть $t_i(x, y, z)$ — термы сигнатуры σ_i, задающие дискриминаторы на дискриминаторных $\mathcal{M}_i$-алгебрах. Через F_1' обозначим отображение сигнатуры σ_1 в $T(\sigma_2)$, сопоставляющее сигнатурному символу $f \in \sigma_1$ терм $F_1'(f)$ сигнатуры σ_2, полученный из условного терма $F_1(f)$ заменой условного оператора с помощью стандартной процедуры (напр., [1]): сначала с помощью дискриминаторной функции, а затем — заменой последней термом t_2. Аналогично определяется отображение $F_2' : \sigma_2 \to T(\sigma_1)$. Заметим, что для $(\mathcal{M}_i)_{SI}$-алгебр $\mathcal{A}$ имеют место равенства $F_j(\mathcal{A}) = F_j'(\mathcal{A})$.

Покажем индукцией по $n \in \omega$, что отображения F_1' и F_2' определяют рациональную эквивалентность между n-элементными $(\mathcal{M}_1)_{SIf}$ и $(\mathcal{M}_2)_{SIf}$-алгебрами. Если k_i — минимальная мощность неодноэлементных $\mathcal{M}_i$-алгебр, то (в силу условной рациональной эквивалентности $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$) $k_1 = k_2 = k$ и все k-элементные $\mathcal{M}_i$-алгебры дискриминаторны. Тем самым для любой $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_2)$, если $|\mathcal{A}| = k$, то $\mathcal{A} \in (\mathcal{M}_1)_{SI}$ ($\mathcal{A} \in (\mathcal{M}_2)_{SI}$), $F_2(\mathcal{A}) \in (\mathcal{M}_2)_{SI}$ ($F_1(\mathcal{A}) \in (\mathcal{M}_1)_{SI}$) и условно рациональная эквивалентность дискриминаторных алгебр $\mathcal{A}$ и $F_i(\mathcal{A})$, осуществляемая отображениями F_1 и F_2 очевидным образом индуцирует рациональную эквивалентность этих алгебр, осуществляемую отображениями F_1' и F_2'. Допустим теперь, что для натурального n при любом $l < n$ F_1' и F_2' осуществляют рациональную эквивалентность между $(\mathcal{M}_1)_{SI}$-алгебрами мощности l и равномощными им $(\mathcal{M}_2)_{SI}$-алгебрами. Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_1 \setminus (\mathcal{M}_1)_{SI}$ и $|\mathcal{A}| = n$. Тогда $\mathcal{A} \cong \prod\limits_{i \le m} \mathcal{A}_i$, где $\mathcal{A}_i \in (\mathcal{M}_i)_{SI}$ и $|\mathcal{A}_i| < n$. По предположению, алгебры $F_2'(\mathcal{A}_i)$ принадлежат $(\mathcal{M}_2)_{SI}$. Очевидно, отображения F_1' и F_2' определяют рациональную эквивалентность алгебр $\prod\limits_{i \le m} \mathcal{A}_i$ и $\prod\limits_{i \le m} F_2'(\mathcal{A}_i)$. Заметим теперь, что отображения $F_1'(F_2')$ преобразуют $\mathcal{M}_2$-алгебры мощности n в $\mathcal{M}_1$-алгебры той же мощности ($\mathcal{M}_1$-алгебры в $\mathcal{M}_2$-алгебры). Для алгебр, разложимых в прямое произведение (нетривиальное), это уже замечено выше. Пусть теперь $\mathcal{A} \in (\mathcal{M}_2)_{SI}$ и $|\mathcal{A}| = n$, тогда $\mathcal{A} = F_2(\mathcal{A}')$, где $\mathcal{A}' \in \mathcal{M}_1$, но тогда $\mathcal{A}' = F_1(F_2(\mathcal{A}')) = F_1'(F_2(\mathcal{A}))$, т. е. $F_1'(F_2')$-образы $(\mathcal{M}_2)_{SI}$-алгебр ($(\mathcal{M}_1)_{SI}$-алгебр) являются действительно $\mathcal{M}_1(\mathcal{M}_2)$-алгебрами и, т. к. преобразования $F_1'(F_2')$ переводят прямые произведения в прямые произведения, то $F_1'(F_2')$ осуществляют рациональную эквивалентность n-элементных $(\mathcal{M}_1)_{SI}$-алгебр. Индукцией по n доказано, что эти отображения осуществляют рациональную эквивалентность $(\mathcal{M}_1)_{SIf}$- и $(\mathcal{M}_2)_{SIf}$-алгебр, т. е. доказана импликация 2) $\to$ 3). $\square$

Через $\overset{\rightarrowtail}{\mathcal{K}}$ для любого класса $\mathcal{K}$ универсальных алгебр обозначим категорию, объектами которой являются алгебры из $\mathcal{K}$, а морфизмами — изоморфные вложения этих алгебр друг в друга (категория вложимости класса $\mathcal{K}$). В силу теоремы из [2] два универсальных класса $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$, содержащих одноэлементные алгебры, условно рационально эквивалентны тогда и только тогда, когда существует функтор F, осуществляющий изоморфизм категории $\overset{\rightarrowtail}{\mathcal{K}_1}$ на категорию $\overset{\rightarrowtail}{\mathcal{K}_2}$, перестановочный со стирающими функторами этих категорий. Обозначим соответствующее отношение как $\overset{\rightarrowtail}{\mathcal{K}_1} \cong_{\text{set}} \overset{\rightarrowtail}{\mathcal{K}_2}$. Там же доказано, что для дискриминаторного многообразия $\mathcal{M}$ полная категория $\vec{\mathcal{M}}$ $\mathcal{M}$-универсальных алгебр ($\vec{\mathcal{M}}$-морфизмы–гомоморфизмы между $\mathcal{M}$-алгебрами) и, в том числе, категория $\overset{\rightarrowtail}{\mathcal{M}}$ однозначно восстанавливается по категории $\overset{\rightarrowtail}{\mathcal{M}}_{SI}$. Как замечено выше, $\overset{\rightarrowtail}{(\mathcal{M}_1)}_{SI} \cong_{\text{set}} \overset{\rightarrowtail}{(\mathcal{M}_2)}_{SI}$ тогда и только тогда, когда $\overset{\rightarrowtail}{(\mathcal{M}_1)}_{SIf} \cong \overset{\rightarrowtail}{(\mathcal{M}_2)}_{SIf}$. Таким образом, имеет место

Следствие. Локально-конечные дискриминаторные многообразия $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ условно рационально эквивалентны (рационально эквивалентны) тогда и только тогда, когда $\overset{\rightarrowtail}{(\mathcal{M}_1)}_{SIf} \cong_{\text{set}} \overset{\rightarrowtail}{(\mathcal{M}_2)}_{SIf}$.

Утверждение этого следствия позволяет описать теоретико-множественные инварианты классов рационально (а, значит, и условно рационально) эквивалентных локально-конечных дискриминаторных многообразий.

Пусть $\mathcal{M}$ — такое многообразие. Через $\mathrm{Sk}\,\overset{\rightarrowtail}{\mathcal{M}_{SIf}}$ обозначим скелет категории $\overset{\rightarrowtail}{\mathcal{M}_{SIf}}$, т. е. полную подкатегорию, содержащую по одному представителю из каждого класса изоморфных $\mathcal{M}_{SIf}$-алгебр. Будем при этом считать, что основные множества алгебр из $\mathrm{Sk}\,\overset{\rightarrowtail}{\mathcal{M}_{SIf}}$ дизъюнктны. Через $A_{\mathcal{M}}$ обозначим объединение основных множеств алгебр из $\mathrm{Sk}\,\overset{\rightarrowtail}{\mathcal{M}_{SIf}}$, и пусть $\Theta_{\mathcal{M}}$ — эквивалентность на $A_{\mathcal{M}}$ такая, что $\Theta_{\mathcal{M}}$-классы суть основные множества алгебр из $\mathrm{Sk}\,\overset{\rightarrowtail}{\mathcal{M}_{SIf}}$.

Для любого $a \in A_{\mathcal{M}}$ через $a\Theta_{\mathcal{M}}$ обозначим множество $\{b \in A_{\mathcal{M}} \mid \langle a,b\rangle \in \Theta_{\mathcal{M}}\}$. Пусть $H_{\mathcal{M}}$ — совокупность морфизмов категории $\mathrm{Sk}\,\overrightarrow{\mathcal{M}}_{SIf}$, т. е. $H_{\mathcal{M}}$ — совокупность вложений одних Θ-классов в другие. Для любого $f \in H_{\mathcal{M}}$ через $r_f(d_f)$ будем обозначать область значений (область определения) отображения f, через $S_{a\Theta_{\mathcal{M}}}$ — совокупность $\{rf \mid f \in H_{\mathcal{M}},\ r_f \subseteq a\Theta_{\mathcal{M}}\}$ подмножеств множества $a\Theta_{\mathcal{M}}$. Совокупность $S_{a\Theta_{\mathcal{M}}}$ образует решетку основных множеств подалгебр $\mathrm{Sk}\,\overrightarrow{\mathcal{M}}_{SIf}$-алгебры с основным множеством $a\Theta_{\mathcal{M}}$ (решетку относительно теоретико-множественного включения, где роль inf играет теоретико-множественное пересечение). Для любого $a \in A_{\mathcal{M}}$, любых $b_1,\dots,b_n \in a\Theta_{\mathcal{M}}$ через $\langle b_1,\dots,b_n\rangle$ обозначим наименьшее подмножество из $S_{a\Theta_{\mathcal{M}}}$, содержащее множество $\{b_1,\dots,b_n\}$. В силу локальной конечности многообразия $\mathcal{M}$ оно будет равномерно локально-конечным, т. е. существует функция $\varphi : \omega \to \omega$ такая, что для любого $n \in \omega$, $a \in A_{\mathcal{M}}$, любых $b_1,\dots,b_n \in a\Theta_{\mathcal{M}}$ имеем $|\langle b_1,\dots,b_n\rangle| \le \varphi(n)$.

Тройку $\langle A_{\mathcal{M}},\Theta_{\mathcal{M}},H_{\mathcal{M}}\rangle$ назовем остовом многообразия $\mathcal{M}$ и обозначим $\mathrm{Ost}\,\mathcal{M}$. В силу замеченного выше довольно очевидно, что для любого локально-конечного дискриминаторного многообразия $\mathcal{M}$ остов $\mathcal{M}$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\Theta_{\mathcal{M}}$ — эквивалентность на множестве $A_{\mathcal{M}}$ с конечными $\Theta_{\mathcal{M}}$-классами;

2) $H_{\mathcal{M}}$ — совокупность вложений одних $\Theta_{\mathcal{M}}$-классов в другие;

3) для любого $a \in A_{\mathcal{M}}$ $\mathcal{R}_{a\Theta_{\mathcal{M}}} = \langle S_{a\Theta_{\mathcal{M}}};\cap,\vee\rangle$ — решетка (относительно $\subseteq$);

4) для любого $a \in A_{\mathcal{M}}$ $H_{a\Theta_{\mathcal{M}}} = \langle\{f \in H_{\mathcal{M}} \mid rf = df = a\Theta_{\mathcal{M}}\};\ \circ\rangle$ — группа относительно композиции отображений $\circ$;

5) если $f,g \in H_{\mathcal{M}}$ и $rf \subseteq dh$, то $h \circ g \in H_{\mathcal{M}}$;

6) если $df = rf$, то $\mathrm{Fix}\,f = \{b \in df \mid f(b) = b\} \in S_{a\Theta_{\mathcal{M}}}$;

7) для любых $g_1,g_2 \in H_{\mathcal{M}}$ таких, что $rg_1 \cap rg_2 \ne \emptyset$, существуют $h_1,h_2 \in H_{\mathcal{M}}$ такие, что $g_1 \circ h_1 = g_2 \circ h_2$, $rg_2 \circ h_2 = rg_1 \cap rg_2$ и $rh_1 \subseteq dg_1$, $rh_2 \subseteq dg_2$;

8) для любого $a \in A_{\mathcal{M}}$, любого $g \in H_{\mathcal{M}}$, если $a \in dg$ и $\langle a,g(a)\rangle \ne \Theta_{\mathcal{M}}$, то $rg \ne g(a)\Theta_{\mathcal{M}}$;

9)$\Big|\{a \in A_{\mathcal{M}} \mid |a\Theta| = 1\}\Big| \le 1$;

10) существует функция $\varphi : \omega \to \omega$ такая, что для любого $a \in A_{\mathcal{M}}$, любых $b_1,\dots,b_n \in a\Theta_{\mathcal{M}}$ имеет место неравенство $|\langle b_1,\dots,b_n\rangle| \le \varphi(n)$.

В силу следствия, если $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ — локально-конечные дискриминаторные многообразия, то $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ рационально (условно рационально) эквивалентны тогда и только тогда, когда существует взаимно однозначное отображение π, осуществляющее изоморфизм систем $\langle A_{\mathcal{M}_1},\Theta_{\mathcal{M}_1}\rangle$ и $\langle A_{\mathcal{M}_2},\Theta_{\mathcal{M}_2}\rangle$, сопрягающий отображения из $H_{\mathcal{M}_1}$ и $H_{\mathcal{M}_2}$. Подобное отображение π назовем изоморфизмом остовов $\mathrm{Ost}\,\mathcal{M}_1$ и $\mathrm{Ost}\,\mathcal{M}_2$ ($\mathrm{Ost}\,\mathcal{M}_1 \cong \mathrm{Ost}\,\mathcal{M}_2$). Таким образом, остовы локально-конечных дискриминаторных многообразий служат теоретико-множественными инвариантами для отношения рациональной (условно рациональной) эквивалентности этих многообразий. Покажем, что условия 1)–10) определяют класс этих инвариантов.

Теорема 2. *Для любой тройки* $\langle A,\Theta,H\rangle$*, удовлетворяющей условиям* 1)–10)*, существует локально-конечное дискриминаторное многообразие* $\mathcal{M}$ *такое, что* $\mathrm{Ost}\,\mathcal{M} = \langle A,\Theta,H\rangle$.

Доказательство. Для любого $a \in A$, любых $b_1,\dots,b_n$ таких, что $\langle b_1,\dots,b_n\rangle = a\Theta$, и любого $c \in a\Theta$ введем в рассмотрение n-местную функцию $f_{\overline{b},c}(\overline{x})$ на A. Здесь $\overline{b} = \langle b_1,\dots,b_n\rangle$ и $\overline{x} = \langle x_1,\dots,x_n\rangle$, функция $f_{\overline{b},c}(\overline{x})$ определяется формулой

$$f_{\overline{b},c}(e_1,\dots,e_n) = \begin{cases} g(c), & \text{если существует } g \in H \text{ такое, что} \\ & e_1 = g(b_1),\dots,e_n = g(b_n); \\ e_1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Прежде всего, заметим корректность определения функции $f_{\overline{b},c}$ на множестве A. Пусть $g_1,g_2 \in H$ и таковы, что $\overline{e} = g_1(\overline{b}) = g_2(\overline{b})$. Покажем, что $g_1(c) = g_2(c)$. Отметим, что $rg_1 = rg_2$, иначе $|rg_1 \cap rg_2| < |rg_1|$. По условию 7) найдутся $h_1,h_2 \in H$ такие, что $g_1h_1 = g_2h_2$, $rg_2h_2 = rg_1 \cap rg_2$, $rh_i \subseteq dg_i$. Так как $\{e_1,\dots,e_n\} \subseteq rg_1 \cap rg_2$ и $e_i = g_1(b_i) = g_2(b_i)$, то

$\{b_1,\ldots,b_n\} \subseteq rh_1 \cap rh_2$ и неравенство $|rg_1 \cap rg_2| < |rg_1| = |rg_2|$ влечет неравенство $|rh_1 \cap rh_2| < |dg_1|$. Последнее же противоречит предположению $\langle b_1,\ldots,b_n\rangle = dg_1 = a\Theta$. Таким образом, действительно, $rg_1 = rg_2$. Теперь рассмотрим два случая: $\langle b_1, g_1(b_1)\rangle \in \Theta$ и $\langle b_1, g_1(b_1)\rangle \notin \Theta$. В первом случае $dg_1 = dg_2 = rg_1 = rg_2 = a\Theta$. В силу условия 4) найдется $h \in H$ такое, что $dh = rh = a\Theta$ и $g_1 h = g_2$. Тем самым $h(b_1) = b_1, \ldots, h(b_n) = b_n$. Условие 6) и равенство $\langle b_1,\ldots,b_n\rangle = a\Theta$ влекут равенства $h(x) = x$ для любого $x \in a\Theta$. В том числе $g_1(h(c)) = g_1(c)$ и, значит, $g_1(c) = g_2(c)$. Рассмотрим второй случай: пусть $\langle b_1, g_1(b_1)\rangle \notin \Theta$. В силу отмеченных уже выше равенств $rg_1 = rg_2$ и $\langle b_1,\ldots,b_n\rangle = a\Theta$ условия 7) и 8) влекут существование $h_1, h_2 \in H$ таких, что $dh_1 = dh_2 = rh_1 = rh_2 = a\Theta$ и $g_1 h_1 = g_2 h_2$. По условию 4) получим $h = h_1 h_2^{-1} \in H$ и равенство $g_1 h = g_2$. Дальнейшие рассуждения, аналогичные случаю $\langle b_1, g(b_1)\rangle \in \Theta$, показывают, что определение функции $f_{\overline{b},c}(\overline{x})$ корректно и во втором случае.

Пусть $\sigma = \langle f_{\overline{b},c}(\overline{x}), d(x,y,z) \mid \overline{b}, c \in a\Theta$ для некоторого $a \in A$ и при этом $\langle \overline{b}\rangle = a\Theta\rangle$. Для любого $a \in A$ алгебру $\mathcal{A}_{a\Theta}$ сигнатуры σ с основным множеством $a\Theta$ определим, интерпретируя функции типа $f_{\overline{b},c}(\overline{x})$ указанным выше образом, а функцию $d(x,y,z)$ — с помощью дискриминаторной функции на $a\Theta$. В силу определения алгебр $\mathcal{A}_{a\Theta}$ и условия 5) отображения из H осуществляют изоморфные вложения алгебр $\mathcal{A}_{a\Theta}$ друг в друга. Покажем теперь, что 1) любая подалгебра алгебры $\mathcal{A}_{a\Theta}$ имеет вид $h(\mathcal{A}_{b\Theta})$ для некоторого $b \in A$, 2) любое изоморфное вложение алгебры $\mathcal{A}_{a\Theta}$ в алгебру $\mathcal{A}_{b\Theta}$ (для $a, b \in A$) совпадает с некоторыми вложениями $h \in H$. Пусть $C \subseteq a\Theta$ — основное множество некоторой подалгебры алгебры $\mathcal{A}_{a\Theta}$ и $C = \{c_1,\ldots,c_n\}$. Если $C = \langle c_1,\ldots,c_n\rangle$, то (по определению $\langle c_1,\ldots,c_n\rangle$) $C = rh$ для некоторого $h \in H$, т.е. $C = h(\mathcal{A}_{b\Theta})$ для $b \in A$. Если же $\langle c_1,\ldots,c_n\rangle \setminus \{c_1,\ldots,c_n\} \ni d$, то найдутся $h \in H$, $b \in A$ и $b_1,\ldots,b_n, p \in b\Theta$ такие, что $\langle b_1,\ldots,b_n\rangle = b\Theta = dh$ и $c_i = h(b_i)$, $d = h(p)$. Но тогда $f_{\overline{b},c}(c_1,\ldots,c_n) = d$, что противоречит тому, что C — основное множество некоторой подалгебры алгебры $\mathcal{A}_{a\Theta}$. Поэтому действительно любая подалгебра алгебры $\mathcal{A}_{a\Theta}$ имеет вид $h(\mathcal{A}_{b\Theta})$ для $b \in A$. Покажем теперь, что любое изоморфное вложение φ алгебры вида $\mathcal{A}_{a\Theta}$ в алгебру $\mathcal{A}_{b\Theta}$ совпадает с некоторым вложением $h \in H$. Пусть $a\Theta = \{a_1,\ldots,a_n\}$. Если $|a\Theta| \neq 1$, то пусть $a_1 \neq a_2$. Тогда $f_{\overline{a},a_2}(a_1,\ldots,a_n) = a$ и, значит, $f_{\overline{a},a_2}(\varphi(a_1),\ldots,\varphi(a_n)) = \varphi(a_2)$ и $\varphi(a_1) \neq \varphi(a_2)$. По определению функции $f_{\overline{a},a_2}$ найдется $h \in H$ такое, что $dh = a\Theta$ и $h(a_i) = \varphi(a_i)$ для $i \leq n$. То есть $\varphi = h = H$. Пусть теперь $|a\Theta| = 1$. Тогда, т.к. $\varphi(\mathcal{A}_{a\Theta}) \in S_{b\Theta}$, найдется $h \in H$ такой, что $rh = \varphi(\mathcal{A}_{a\Theta})$. Таким образом, $dh = c\Theta$ для некоторого $c \in A$ и $|c\Theta| = 1$. По условию 9) $c = a$ и, значит, $\varphi = h$. Тем самым, действительно, изоморфные вложения на классе $\mathcal{K} = \{\mathcal{A}_{a\Theta} | a \in A\}$ суть отображения из H.

Положим многообразие $\mathcal{M}$ равным $\mathcal{M}(\mathcal{K})$-многообразию, порожденному классом $\mathcal{K}$. Так как алгебры $\mathcal{A}_{a\Theta}$ дискриминаторны, то и многообразие $\mathcal{M}$ дискриминаторно. Покажем, что класс $\mathcal{M}_{SIf}$ состоит из алгебр, изоморфных алгебрам вида $\mathcal{A}_{a\Theta}$. Как хорошо известно (см., напр., [8]), $\mathcal{M}_{SIf}$ состоит из конечных алгебр, входящих в наименьший универсальный класс алгебр, содержащий класс $\mathcal{K}$. Таким образом, достаточно показать, что любая конечная подалгебра любого ультрапроизведения $\mathcal{K}$-алгебр будет изоморфна некоторой $\mathcal{K}$-алгебре. Очевидным образом конечная подалгебра ультрапроизведения конечных алгебр изоморфна подалгебре какого-либо сомножителя. А как замечено выше, подалгебры $\mathcal{K}$-алгебр изоморфны $\mathcal{K}$-алгебрам и, значит, действительно, $\mathcal{M}_{SIf}$-алгебры суть алгебры, изоморфные $\mathcal{K}$-алгебрам.

Условие 10) влечет локальную конечность многообразия $\mathcal{M}$.

Таким образом, построено локально-конечное дискриминаторное многообразие $\mathcal{M}$, остов которого совпадает с тройкой $\langle A, \Theta, H\rangle$. $\square$

В связи с теоремой 1 остается открытым естественный

Вопрос 1. Существуют ли (не локально-конечные) условно рационально эквивалентные дискриминаторные многообразия, не являющиеся рационально эквивалентными?

Отметим еще два открытых вопроса, связанных с условно рациональной и рациональной эквивалентностью многообразий. Хорошо известно [10], что рациональная эквивалентность многообразий $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ равносильна рациональной эквивалентности χ_0-порожденных

$\mathcal{M}_i$-свободных алгебр $\mathcal{F}_{\mathcal{M}_1}(\chi_0)$ и $\mathcal{F}_{\mathcal{M}_2}(\chi_0)$. Если $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ — локально-конечные многообразия, то условно рациональная эквивалентность многообразий $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ влечет условно рациональную эквивалентность n-порожденных $\mathcal{M}_i$-свободных алгебр $\mathcal{F}_{\mathcal{M}_1}(n)$ и $\mathcal{F}_{\mathcal{M}_2}(n)$ как максимальных по мощности n-порожденных $\mathcal{M}_i$-алгебр и, как легко следует отсюда, условно рациональную эквивалентность алгебр $\mathcal{F}_{\mathcal{M}_1}(\chi_0)$ и $\mathcal{F}_{\mathcal{M}_2}(\chi_0)$.

Вопрос 2. Существуют ли (не локально-конечные) условно рационально эквивалентные многообразия $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ такие, что свободные алгебры $\mathcal{F}_{\mathcal{M}_1}(\chi_0)$ и $\mathcal{F}_{\mathcal{M}_2}(\chi_0)$ не являются условно рационально эквивалентными?

Вопрос 3. Существуют ли многообразия $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$, для которых алгебры $\mathcal{F}_{\mathcal{M}_1}(\chi_0)$ и $\mathcal{F}_{\mathcal{M}_2}(\chi_0)$ условно рационально эквивалентны, а сами многообразия $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ такими не являются?

Литература

1. Пинус А.Г. *Об условных термах и тождествах на универсальных алгебрах. — Структурные алгоритмические свойства вычислимости* // Вычисл. системы. – 1996. – Вып. 156. – С. 59–78.
2. Пинус А.Г. *Исчисление условных тождеств и условно рациональная эквивалентность* // Алгебра и логика. – 1998. – Т. 37. – № 4. – С. 432–459.
3. Пинус А.Г. *Об условно рационально эквивалентных алгебрах* // Вычисл. системы. – 1999. – Вып. 166. – С. 47–75.
4. Пинус А.Г. *Об алгебрах, условно рационально эквивалентных полурешеткам и булевым алгебрам* // Сиб. матем. журн. – 1998. – Т. 39. – № 1. – С. 121–128.
5. Пинус А.Г. *Условные термы и программы вычислений на алгебрах* // Вестн. Новосибирск. гос. техн. ун-та. – 1996. – № 2. – С. 145–151.
6. Пинус А.Г. *Йонссоновские локально-конечные условные многообразия и условно рациональная эквивалентность* // Сиб. матем. журн. – 1998. – Т. 39. – № 4. – С. 942–948.
7. Werner H. *Discriminator algebras.* – Berlin: Academie Verlag, 1978. – 92 p.
8. Pinus A.G. *Boolean constructions in universal algebra.* – Dordrecht–Boston–London: Kluver Acad. Publ. – 1993. – 350 p.
9. Yonsson B. *Gongruence distributive varieties* // Math. Yaponica. – 1995. – № 2. – P. 353–401.
10. Мальцев А.И. *Структурная характеристика некоторых классов алгебр* // ДАН СССР. – 1958. – Т. 120. – № 1. – С. 29–32.

Новосибирский государственный технический университет

Поступила 28.03.1997