ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 5 (420)

УДК 517.946

Э.И. АБДУРАГИМОВ

О ПОЛОЖИТЕЛЬНОМ РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ И ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ ЕГО ПОЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим в единичном круге $K = \{(x, y) \in R^2,\ r^2 = x^2 + y^2 < 1\}$ с границей Γ задачу Дирихле:

$$\Delta u + ar^m u^{2k} = 0, \quad (x, y) \in K, \tag{1}$$

$$u|_\Gamma = 0. \tag{2}$$

Здесь $m \geq 0$, $k \geq 1$ — целые числа, $a \equiv \mathrm{const} > 0$.

Пользуясь методом сферического расслоения С.И. Похожаева (см. [1], [2] и др.), можно доказать существование положительного решения задачи (1)–(2) $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(K)$. Из общей теории квазилинейных эллиптических уравнений следует аналитичность этого решения при $r < 1$. При $m = 0$, как известно (см. [4]), любое положительное решение задачи (1)–(2) является радиально-симметричным. В работе [3] доказана единственность положительного решения задачи (1)–(2) при $m = 0$, $k = 1$.

В данной работе доказано существование единственного положительного решения задачи (1)–(2) в классе $C^2(\overline{K})$ и предложен численный метод нахождения этого решения.

Заметим, что единственность положительного решения задачи Дирихле для более общих, чем (1), уравнений изучалась и другими авторами, но в другой постановке и другими методами. Например, в [5] с помощью априорных оценок была доказана единственность положительного решения задачи Дирихле с граничным условием $u|_{\partial\Omega} = +\infty$ для уравнения $\Delta u = p(x)u^k$, в [6] для аналогичных уравнений доказана условная теорема единственности положительного решения задачи Дирихле в кольце.

1. Существование и единственность радиально-симметрического положительного решения

Покажем, что существует радиально-симметрическое решение задачи (1)–(2), т.е. функция $u = u(r)$ из класса $C^2[0, 1]$, удовлетворяющая следующей двухточечной краевой задаче:

$$u'' + \frac{u'}{r} + ar^m u^{2k} = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{1.1}$$

$$u'(0) = 0, \quad u(1) = 0. \tag{1.2}$$

Для этой цели воспользуемся группой линейных преобразований, примененной Ц. На в [7]

$$\begin{aligned} r &= A^{\alpha_1}\overline{r}, \\ u &= A^{\alpha_2}\overline{u}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где α_1, α_2 — некоторые константы, A — параметр преобразования. Преобразованное уравнение (1.1) будет иметь вид

$$A^{\alpha_2-2\alpha_1}\overline{u}'' + A^{\alpha_2-2\alpha_1}\frac{\overline{u}'}{\overline{r}} + aA^{\alpha_1 m+2k\alpha_2}\overline{r}^m\overline{u}^{2k} = 0. \tag{1.4}$$

Выберем α_1, α_2 так, чтобы уравнение (1.4) не зависело от параметра преобразования A, т.е.

$$\alpha_2 - 2\alpha_1 = \alpha_1 m + 2k\alpha_2. \tag{1.5}$$

Положим параметр преобразования равным значению решения задачи (1.1)–(1.2) в начальной точке 0 отрезка $[0,1]$:

$$u(0) = A.$$

В координатах $(\overline{r},\overline{u})$ это условие примет вид

$$A^{\alpha_2}\overline{u}(0) = A$$

и не будет зависеть от параметра, если взять

$$\alpha_2 = 1. \tag{1.6}$$

Тогда $\overline{u}(0) = 1$. Из системы (1.5), (1.6) следует, что при

$$\alpha_1 = -\frac{2k-1}{m+2}, \quad \alpha_2 = 1 \tag{1.7}$$

$\overline{u}(\overline{r})$ является решением задачи Коши

$$\overline{u}'' + \frac{\overline{u}'}{\overline{r}} + a\overline{r}^m\overline{u}^{2k} = 0, \tag{1.8}$$

$$\overline{u}(0) = 1, \quad \overline{u}'(0) = 0. \tag{1.9}$$

Лемма 1. *Существует единственное значение $\overline{r}_0 \in R_+ = (0,+\infty)$ такое, что существует единственное решение $\overline{u}(\overline{r}) \in C^2[0,\overline{r}_0]$ задачи Коши* (1.8)–(1.9) *и* $\overline{u}(\overline{r}_0) = 0$.

Доказательство. Из уравнения (1.8) следует

$$(\overline{r}\,\overline{u}')' = -a\overline{r}^{m+1}\overline{u}^{2k}.$$

Интегрируя это равенство от 0 до $\overline{r}$, получим

$$\overline{u}'(\overline{r}) = -\frac{a}{\overline{r}}\int_0^{\overline{r}} t^{m+1}\overline{u}^{2k}(t)dt < 0. \tag{1.10}$$

Следовательно, функция $\overline{u}(\overline{r})$ убывающая.

Заменой

$$\overline{r} = e^{-t} \tag{1.11}$$

задача (1.8)–(1.9) сводится к задаче

$$v'' = -a\overline{e}^{(m+1)t}v^{2k}, \tag{1.12}$$

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = 1, \quad \lim_{t\to+\infty} v'(t) = 0, \tag{1.13}$$

где $v(t) = \overline{u}(e^{-t})$.

Из уравнения (1.12) следует, что $v(t)$ — выпуклая вверх функция. Так как в силу (1.10) $v'(t) = \overline{u}'(\overline{r})e^{-t}(-1) > 0$, то $v(t)$ — возрастающая функция и $v(t) \le 1$. Тогда существует значение $t = t_0 \in R$ такое, что $v(t_0) = 0$. Поскольку коэффициенты уравнения (1.12) бесконечно дифференцируемы, $0 \le v(t) \le 1$ при $t \ge t_0$, то при $t \ge t_0$ решение задачи Коши (1.12)–(1.13) существует и единственно. Поэтому значение $t_0 \in R$, где $v(t)$ обращается в нуль, единственно. Из (1.11) следует, что $\overline{r} = e^{-t_0}$ при $t = t_0$. Таким образом, существует единственное значение $\overline{r}_0 = e^{-t_0}$ такое, что решение задачи Коши (1.8)–(1.9) при $\overline{r} = \overline{r}_0$ обращается в нуль. Из существования и единственности решения задачи Коши (1.12)–(1.13) в $C^2[t_0, +\infty)$ следует существование и единственность решения задачи Коши (1.8)–(1.9) в $C^2[0, \overline{r}_0]$. Лемма доказана. $\square$

В силу этой леммы из формул (1.3) следует, что решение задачи Коши для уравнения (1.1) с начальными условиями

$$u(0) = A, \quad u'(0) = 0$$

единственно в $C^2[0, r_0]$ и обращается в нуль в единственной точке $r = r_0 \equiv A^{\alpha_1}\overline{r}_0$, где

$$\alpha_1 = -\frac{2k-1}{m+2}.$$

А так как из уравнения

$$A^{\alpha_1}\overline{r}_0 = 1 \tag{1.14}$$

A определяется единственным образом, то справедлива

Теорема 1. *Существует единственное радиально-симметричное решение задачи* (1)–(2) *из класса* $C^2(\overline{K})$.

2. Численный метод нахождения радиально-симметричного положительного решения

Численный метод нахождения радиально-симметричного положительного решения задачи (1)–(2) основывается на методе, предложенном Ц. На в [7] и примененном нами при доказательстве единственности. Он состоит из следующих шагов.

1. Решаем задачу Коши (1.8)–(1.9) каким-либо численным методом при $\overline{r}| \ge 0$, начиная с $\overline{r} = 0$ до тех пор, пока не будет найдена точка $\overline{r}_0$, в которой $\overline{u}(\overline{r}_0) = 0$. Существование единственной такой точки следует из леммы.
2. Находим A из уравнения (1.14):
$$A = (\overline{r}_0)^{\frac{2k-1}{m+2}}.$$
3. По формулам (1.3) вычисляем (r, u) — радиально-симметричное решение исходной задачи (1)–(2).

Литература

1. Похожаев С.И. *Об одном подходе к нелинейным уравнениям* // ДАН СССР. – 1979. – Т. 247. – № 6. – С. 1327–1331.
2. Похожаев С.И. *Об одном конструктивном методе вариационного исчисления* // ДАН СССР. – 1988. – Т. 298. – № 6. – С.1330–1333.
3. Похожаев С.И. *Об одной задаче Л.В. Овсянникова* // Журн. прикл. механ. и техн. физ. – 1989. – № 2. – С. 5–10.
4. Gidas B, Ni Wei-Ming, Nirenberg L. *Symmetry and related properties via the maximum principle* // Commun. Math. Phys. – 1974. – V. 68. – № 3.
5. Кондратьев В.А., Никишкин В.А. *О единственности решения сингулярной краевой задачи для полулинейных эллиптических уравнений* // Применение новых методов анализа в теории краевых задач. – Воронеж, 1990. – С. 52–58.

6. Bandl C., Man Kam K. *Semilinear elliptic problems in annular domains* // J. of Appl. Math. and Phys. – 1989. – № 40. – P. 245–257.
7. На Ц. *Вычислительные методы решения прикладных граничных задач.* – М.: Мир, 1982. – 296 с.

Дагестанский государственный университет

Поступила
30.11.1994