ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 2 (429)

УДК 519.624.3

И.Е. КОШЕЛЕВ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА 1-ГО РОДА МНОГОСЕТОЧНЫМ МЕТОДОМ

Многосеточные методы являются классом специальных итерационных методов, предназначенных для решения систем алгебраических уравнений, полученных при дискретизации на некоторой совокупности сеток дифференциальных и интегральных уравнений. В течение трех десятилетий, начиная с первых работ [1], [2], теория этих методов развивалась, главным образом, применительно к уравнениям в частных производных (см. библиографию в [6]). Теоретические оценки и вычислительный опыт показывают, что многосеточные процедуры существенно эффективнее (по числу операций для достижения заданной точности), чем обычные итерационные методы. Что касается рассмотрения многосеточных алгоритмов для интегральных уравнений, то здесь теоретические и численные результаты значительно беднее. По-видимому, одной из первых работ в этом направлении была статья Хакбуша [3], который предложил и исследовал ряд многосеточных алгоритмов для линейных и нелинейных уравнений Фредгольма 2-го рода. Для линейных интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода (т.е. некорректных задач) первые результаты были получены в [4], [5]. Используемый здесь подход заключается в предварительной регуляризации исходного уравнения методом Тихонова с последующей дискретизацией проекционным методом полученного уравнения Фредгольма 2-го рода и применением несколько модифицированной стандартной схемы многосеточного метода.

Объект исследования данной работы — линейное операторное уравнение 1-го рода на паре гильбертовых пространств. Как и в [5], проводится дискретизация регуляризованного по Тихонову исходного уравнения 1-го рода, но в отличие от [5], где для этой цели применялся проекционный метод в пространстве правых частей, в данной работе используется общая схема дискретной аппроксимации как в пространстве правых частей, так и в пространстве решений. Это позволяет включить в рассмотрение естественные и удобные для приложений квадратурные методы. Устанавливается сходимость многосеточной итерационной схемы и предлагается способ численной реализации этой схемы, позволяющий избежать трудоемкой операции перемножения матриц, полученных аппроксимацией исходного оператора на мелкой сетке. Результаты иллюстрируются на примере квадратурных методов для интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода.

1. Описание численного метода

Рассмотрим абстрактное уравнение Фредгольма 1-го рода

$$Ku = f, \tag{1}$$

где K — линейный непрерывный оператор, действующий на паре гильбертовых пространств U, F. В ряде случаев (напр., если K — компактный оператор) задача (1) поставлена некорректно, следовательно, в общем случае невозможно получить устойчивую дискретную аппроксимацию (см. пример в [7], с. 67–69) непосредственно исходного уравнения (1). Поэтому на первом этапе регуляризуем уравнение (1) методом Тихонова

$$\min\{\|Ku - \overline{f}\|^2 + \alpha\|u - u^0\|^2;\ u \in U\}, \tag{2}$$

где $\|f - \overline{f}\| < \overline{\tau}$, u^0 — пробное решение.

Затем, задав некоторую схему дискретной аппроксимации, поставим в соответствие (2) последовательность конечномерных задач

$$\min\{\|K_i u_i - f_i\|^2 + \alpha\|u_i - u_i^0\|^2;\ u_i \in U_i\}, \tag{3}$$

где $K_i : U_i \to F_i$; будем далее считать, что

$$U_i \subset U_{i+1} \subset \cdots \subset U, \quad \overline{\cup U_i} = U; \quad F_i \subset F_{i+1} \subset F; \quad \overline{\cup F_i} = F.$$

Используя необходимое условие минимума для квадратичного функционала, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$A_i u_i = g_i, \tag{4}$$

где

$$A_i = (K_i^* K_i + \alpha I), \quad g_i = K_i^* f_i + \alpha u_i^0; \quad A_i : U_i \to U_i, \quad g_i \in U_i,$$

причем u_n — искомое решение.

Сформулируем известный результат о сходимости дискретных аппроксимаций ([7], с. 69–70). Обозначим

$$\gamma_i = \|K_{|U_i} - K_i\|, \tau_i = \|f - f_i\|.$$

Теорема 1. *Пусть U, F — гильбертовы пространства; K, K_i — линейные ограниченные операторы из U в F. Тогда для любых $[K_i, f_i]$, $u^0 \in U$, $\alpha > 0$ существует единственное решение (4) и*

$$\lim_{\triangle_i \to 0} \|u_i^\alpha - \overline{u}\| \to 0, \quad \triangle_i = (\gamma_i, \tau_i),$$

если $(\gamma_i + \tau_i)^2/\alpha(\delta_i) \to 0$, $\alpha(\delta_i) \to 0$ при $\delta_i \to 0$, где

$$\overline{u} = \operatorname{argmin}\{\|u - u^0\|,\ u \in T\};$$

T — множество решений (1).

Задачу (4) в пространстве U_i при $i = n$ будем решать теперь следующим итерационным многосеточным методом. Если u^k — приближенное решение (4), полученное на k-й итерации, то для перехода к

$$u_i^{k+1} = u_i^k + B_i(g_i - A_i u_i^k) = M_i u_i^k + B_i g_i \tag{5}$$

последовательно вычисляются вспомогательные функции

$$u_i^{k,1} = u_i^k + B_{i-1} Q_{i-1}(g_i - A_i u_i^k), \tag{6}$$

$$u_i^{k,2} = u_i^{k,1} + \beta_i(I - Q_{i-1})(g_i - A_i u_i^k). \tag{7}$$

Наконец, вычисляется

$$u_i^{k+1} = u_i^{k,2} + B_{i-1} Q_{i-1}(g_i - A_i u_i^{k,2}), \tag{8}$$

где $B_0 = A_0^{-1}$. (Заметим, что в соответствие с общепринятой терминологией шаги (6) и (8) называются сглаживающей частью многосеточной процедуры, а (7) — коррекцией на грубой сетке.)

2. Основные определения и обозначения

Пусть $Q_i : U \to U_i$ — ортопроектор. Обозначим

$$\overline{\gamma}_{i-1} = \|K_i(I - Q_{i-1})\| = \|(I - Q_{i-1})K_i^*\|.$$

Пусть μ_i — минимальное собственное число оператора $K_i^* K_i$; известно [5], что

$$\mu_i < \overline{\gamma}_{i-1}^2. \tag{9}$$

Для $x, y \in U_i$ введем форму

$$a_i(x, y) = (A_i x, y).$$

В пространстве U_{i-1} введем конечномерный оператор $\overline{A}_{i-1}$, порожденный формой

$$a_i(x, y) = (\overline{A}_{i-1} x, y), \quad x, y \in U_{i-1}.$$

Будем также обозначать

$$\|x\|_i = a_i(x, x)^{1/2}.$$

Пусть $P_{i-1} : U_i \to U_{i-1}$ — ортопроектор относительно скалярного произведения

$$a_i(P_{i-1} x, y) = a_i(x, y), \quad x \in U_i, \ \ y \in U_{i-1}.$$

Известно (напр., [9], с. 28), что

$$\overline{A}_{i-1} P_{i-1} = Q_{i-1} A_i. \tag{10}$$

3. Вспомогательные утверждения

Лемма 1 ([9]). *Пусть* $\|K_i\| \le 1$. *Тогда справедлива оценка*

$$\|A_{i-1} - \overline{A}_{i-1}\| \le 2(\gamma_i + \gamma_{i-1}).$$

Лемма 2 ([9]). *Если* $K : U \to F$ *— компактный оператор, то*

$$\text{a)} \ \ \|K(I - Q_i)\| \to 0, \quad \text{b)} \ \ \gamma_i \to 0 \Rightarrow \overline{\gamma}_i \to 0.$$

Лемма 3 ([5]). *Пусть*

$$0 < \beta_i < 1/(\overline{\gamma}_{i-1}^2 + \alpha), \quad \|K_i\| \le 1.$$

Тогда оператор $T_i = I - \beta_i(I - Q_{i-1})(K_i^* K_i + \alpha I)$ *симметричен и положителен относительно формы* $a_i(\cdot, \cdot)$ *и его спектр* $\sigma(T_i) \subset (0; 1]$. *Более того, если* $u \in (I - P_{i-1})U_i$, *то* $a_i(T_i u, u) < \delta_i a_i(u, u)$, *где* $\delta_i = 1 - (\mu_i + \alpha)\beta_i < 1$

Лемма 4. *Для* $\varphi \in U_{i-1}$

$$(1 - 2(\gamma_i + \gamma_{i-1})/\alpha) a_{i-1}(\varphi, \varphi) \le a_i(\varphi, \varphi) \le (1 + 2(\gamma_i + \gamma_{i-1})/\alpha) a_{i-1}(\varphi, \varphi).$$

Доказательство. Правое неравенство следует из соотношений

$$a_i(\varphi, \varphi) = (A_i \varphi, \varphi) = (A_{i-1}\varphi, \varphi) + ((\overline{A}_{i-1} - A_{i-1})\varphi, \varphi) \le \\ \le a_{i-1}(\varphi, \varphi) + 2(\gamma_i + \gamma_{i-1})(\varphi, \varphi) \le (1 + 2(\gamma_i + \gamma_{i-1})/\alpha) a_i(\varphi, \varphi).$$

Левое неравенство доказывается аналогично. □

Лемма 5. *Если* $B : U_{i-1} \to U_{i-1}$, *то*

$$\|B\|_i = \sup_{\varphi \in U_{i-1}} \frac{a_i(B\varphi, \varphi)}{a_i(\varphi, \varphi)} \le \left(\frac{1 + \xi_i}{1 - \xi_i} \right)^{1/2} \|B\|_{i-1},$$

где $\xi_i = 2(\gamma_i + \gamma_{i-1})/\alpha$.

Доказательство следует из цепочки неравенств

$$\|B\|_i^2 = \sup_{\varphi \in U_{i-1}} \frac{a_i(B\varphi, B\varphi)}{a_i(\varphi,\varphi)} \le \sup\Big(\frac{a_{i-1}(B\varphi, B\varphi)}{a_i(\varphi,\varphi)} + \frac{((\overline{A}_{i-1} - A_{i-1})B\varphi, B\varphi)}{a_i(\varphi,\varphi)}\Big) \le$$
$$\le \sup \frac{1}{1-\xi_i}\frac{a_{i-1}(B\varphi, B\varphi)}{a_{i-1}(\varphi,\varphi)} + \sup \|\overline{A}_{i-1} - A_{i-1}\| \frac{(B\varphi, B\varphi)}{a_i(\varphi,\varphi)} \le$$
$$\le (1-\xi_i)^{-1}\|B\|_{i-1} + 2(\gamma_i + \gamma_{i-1})\alpha^{-1} \sup \frac{a_{i-1}(B\varphi, B\varphi)}{a_i(\varphi,\varphi)} =$$
$$= (1-\xi_i)^{-1}(\|B\|_{i-1}^2 + 2(\gamma_i+\gamma_{i-1})/\alpha\|B\|_{i-1}^2). \quad \square \qquad (11)$$

Лемма 6 ([9]). *Пусть $0 < \overline{\beta} \le \beta_i < (\overline{\gamma}_i^2 + \alpha)^{-1}$, $\|K_i\| \le 1$, $\gamma_i \to 0$. Тогда для двухсеточного метода, построенного на подпространствах U_i и U_{i-1} (т.е. при $B_{i-1} = A_{i-1}^{-1}$, $n = 1$) справедливо неравенство*

$$a_i(M_i\varphi,\varphi) \le (\delta_i + 4(1+\alpha)^{1/2}\alpha^{-3/2}(\gamma_i+\gamma_{i-1}) + 4(1+\alpha)\alpha^{-3}(\gamma_i+\gamma_{i-1})^2)a_i(\varphi,\varphi).$$

4. Основные результаты

Теорема 2. *Пусть справедливы условия леммы 6. Тогда для матрицы M_i многосеточного метода справедливо*

$$a_i(M_i\varphi,\varphi) \le \varepsilon_i a_i(\varphi,\varphi),$$

где

$$\varepsilon_i = \delta_i + 3\frac{1+\xi_i}{1-\xi_i}\Big(\varepsilon_{i-1} + \frac{1-\varepsilon_{i-1}}{\alpha_i}\xi_i\Big)^2.$$

Доказательство. Используя (10), выполним преобразование

$$a_i(M\varphi,\varphi) = a_i((I - B_{i-1}Q_{i-1}A_i)T_i(I - B_{i-1}Q_{i-1}A_i)\varphi,\varphi) =$$
$$= a_i((I - B_{i-1}\overline{A}_{i-1}P_{i-1})T_i(I - B_{i-1}\overline{A}_{i-1}P_{i-1})\varphi,\varphi) = a_i((I-P_{i-1})T_i(I-P_{i-1})\varphi,\varphi) +$$
$$+ a_i((\overline{A}_{i-1}^{-1} - B_{i-1})\overline{A}_{i-1}P_{i-1}T_i(I - B_{i-1}\overline{A}_{i-1}P_{i-1})\varphi,\varphi) +$$
$$+ a_i((I - B_{i-1}\overline{A}_{i-1}P_{i-1})T_i(\overline{A}_{i-1}{-1} - B_{i-1})\overline{A}_{i-1}P_{i-1}\varphi,\varphi) +$$
$$+ a_i((\overline{A}_{i-1}^{-1} - B_{i-1})\overline{A}_{i-1}P_{i-1}T_i(\overline{A}_{i-1}{-1} - B_{i-1})\overline{A}_{i-1}P_{i-1}\varphi,\varphi). \qquad (12)$$

Имеем

$$\|(\overline{A}\,_{i-1}^{-1} - B_{i-1})\overline{A}_{i-1}\|_i = \|M_{i-1} + B_{i-1}(A_{i-1} - \overline{A}_{i-1})\| \le$$
$$\le \|M_{i-1}\|_i + \|B_{i-1}\|_i\|(A_{i-1} - \overline{A}_{i-1})\|_i \le \Big(\frac{1+\xi_i}{1-\xi_i}\Big)^{1/2}(\varepsilon_{i-1} + (1-\varepsilon_{i-1})/\alpha\|(A_{i-1} - \overline{A}_{i-1})\|_i) \le$$
$$\le \Big(\frac{1+\xi_i}{1-\xi_i}\Big)^{1/2}(\varepsilon_{i-1} + (1-\varepsilon_{i-1})/\alpha\xi_i). \qquad (13)$$

Оценим второе слагаемое суммы (12), используя выкладку (13),

$$a_i((\overline{A}\,_{i-1}^{-1} - B_{i-1})\overline{A}_{i-1}P_{i-1}T_i(I - B_{i-1}\overline{A}_{i-1})\varphi,\varphi) = a_i((\overline{A}\,_{i-1}^{-1} - B_{i-1})\overline{A}_{i-1}P_{i-1}T_i(I -$$
$$- P_{i-1})(P_{i-1} - B_{i-1}A_{i-1}P_{i-1} + B_{i-1}(A_{i-1} - \overline{A}_{i-1})P_{i-1})\varphi,\varphi) \le$$
$$\le \|T_i\|_i\,\|(M_{i-1} + B_{i-1}(A_{i-1} - \overline{A}_{i-1}))P_{i-1}\|_i^2 a_i(\varphi,\varphi) = \frac{1+\xi_i}{1-\xi_i}\Big(\varepsilon_{i-1} + \frac{1-\varepsilon_{i-1}}{\alpha}\xi_i\Big)^2 a_i(\varphi,\varphi).$$

Третье слагаемое оценивается аналогично. Оценим четвертое слагаемое суммы (12):

$$a_i((\overline{A}_{i-1} - B_{i-1})P_{i-1}T_i(\overline{A}_{i-1} - B_{i-1})P_{i-1}\varphi, \varphi) \le$$
$$\le \|M_{i-1} + B_{i-1}(A_{i-1} - \overline{A}_{i-1})\|_i^2 a_i(\varphi, \varphi) = \frac{1+\xi_i}{1-\xi_i}\left(\varepsilon_{i-1} + \frac{1-\varepsilon_{i-1}}{\alpha}\xi_i\right)^2 a_i(\varphi, \varphi). \quad \square$$

Следствие 1. Для ε_i из теоремы 2 справедливо представление

$$\varepsilon_i = \delta_i + O(\xi_i/\alpha, \varepsilon_{i-1}). \tag{14}$$

Следствие 2. Пусть выполнены условия леммы 6 и

$$\beta_i = (1/(\overline{\gamma}_{i-1}^2 + \alpha) - b_i),$$

где $b_i \to 0$, $b_i > 0$. Тогда при фиксированном $\alpha \in (0,1)$ для любого $\varepsilon \in (0,1)$ найдется такой номер $J(\varepsilon)$, что многосеточный метод, построенный на подпространствах $U_J, U_{J+1}, \ldots, U_{J+n}$ (из цепочки (3)), будет сходиться по норме $\|\cdot\|_i$ и $\|M_i\| < \varepsilon$.

Доказательство. Из (9) и леммы 3 следует

$$0 < \delta_i < 1 - (\mu_i + \alpha)/(\overline{\gamma}_{i-1}^2 + \alpha) + (\mu_i + \alpha)\beta_i \to 0 \quad (i \to \infty).$$

Поэтому и ε_i из (14) будет стремиться к нулю (т.к. ξ_i/α также стремятся к нулю при фиксированном α). $\square$

5. Численная реализация

Рассмотрим два варианта использования вышеописанного метода.

Вариант 1. Имеющиеся объемы памяти позволяют хранить все необходимые матрицы (прежде всего, матрицу K_i на самой мелкой сетке n). В этом случае метод является вполне конкурентноспособным как с прямыми, так и с итерационными методами за счет, во-первых, быстрой сходимости, и во-вторых, т.к. не нужно выполнять дорогостоящей операции перемножения матриц K_i^* и K_i на самой мелкой сетке: например, вектор $A_i u_i = (K_i^* K_i + \alpha I)u_i$ можно получить как

$$K_i^*(K_i u_i) + \alpha u_i.$$

Вариант 2. Памяти недостаточно. Тогда в ней хранится только матрица $B_0 = A_0^{-1}$; остальные же матрицы воспроизводятся (или поэлементно считываются с жесткого диска) каждый раз, когда в них возникает надобность. При таком подходе возрастает стоимость метода (за один шаг только матрицу K_i на самой мелкой сетке нужно воспроизвести 6 раз), но он позволяет работать с очень большими матрицами и получать решения на очень мелких сетках. Естественно, метод в такой редакции более выгоден для задач, в которых можно дешево посчитать матрицу K_i (напр., для интегральных уравнений с относительно простым ядром).

Будем решать описанным методом следующее двумерное линейное интегральное уравнение 1-го рода:

$$Ku = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{H^2}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + H^2} dx\, dy = f(x, y)$$

(которое является линейным приближением уравнения гравиметрии), где $U, F = L_2[-1,1] \times [-1,1]$, $H = 2$, $f(x,y)$ такое, что $u(\xi,\eta) = (\cos(\pi\xi/2)\cos(\pi\eta/2))^2$ является решением этого уравнения.

Выберем следующую дискретизацию уравнения (9). Пусть N_n — целое число. Положим $h_n = 1/N_n$, $t_j = -1 + h_n/2 + jh_n, s_k = -1 + h_n/2 + kh_n$. Тогда U_n есть множество кусочно-постоянных на сегментах $[t_i - h/2, t_i + h/2] \times [s_j - h/2, s_j + h/2]$ функций u_n. Множество U_{n-1} строится аналогично при $h_{n-1} = h_n/2$, $N_{n-1} = 2N_n$ и т.д.

Определим операторы $K_i : U_i \to F_i$: для $u_i \in U_i$

$$(K_i u_i)(x,y) = \sum_j \sum_k h_i^2 K(t_j, s_k, x, y)$$

— кусочно-постоянная функция, где $x \in [t_l - h_i/2, t_l + h_i/2]$, $y \in [s_m - h_i/2, s_m + h_i/2]$, $j,k,l,m \in \overline{1, N_i}$.

Определим оператор перехода с мелкой сетки на грубую

$$Q_{i-1} : U_i \to U_{i-1},$$

$$Q_{i-1} : (\ldots, u_{2j-1,2k-1}, u_{2j-1,2k}, \ldots u_{2j,2k-1}, u_{2j,2k}, \ldots) \to \\ (u_{2j-1,2k-1} + u_{2j-1,2k} + u_{2j,2k-1} + u_{2j,2k})/4h_{j,k},$$

где $j,k \in \overline{1, N_{i-1}}$.

Десять итераций трехсеточного метода при $n = 40$ и $u^0 = 0$ ($\alpha = 10^{-6}$, $\beta_i = 1$ для всех i) позволили уменьшить невязку $\|K_n u_n - g_n\|$ в $3.5 \cdot 10^4$ раза. На это потребовалось порядка $4 \cdot 10^8$ операций (для сравнения решение этой задачи прямым методом, напр., методом квадратного корня требует порядка $8 \cdot 10^9$ операций, считая и перемножение матриц K_i^* и K_i).

Литература

1. Федоренко Р.П. *О скорости сходимости одного итерационного процесса* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1964. – Т. 4. – № 3. - С. 559–564.
2. Бахвалов Н.С. *О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1966. – Т. 6. – № 5. – С. 861–883.
3. Hackbush W. *Multigrid methods of the second kind* // Multigrid methods for integral and differential equations. – Eds. Paddons D.J., Holstein H. – Oxford–New York: Clarendon Press, 1985. – P. 11–83.
4. King J.T. *On the construction of preconditioners by subspace decomposition* // J. Comput. and Appl. Math. – 1990. – V. 29. – № 2. – P. 195–205.
5. King J.T. *Multilevel iterative methods for ill-posed problems* // Proc. internat. Conf. Ill-posed probl. in natural sci., Moscow, 1991 / Ed. by Tikhonov A.N. – TVP, Moscow, 1992. – P. 594.
6. Brandt A. *Multilevel adaptive solution to boundary-value problem* // Math. Comput. – 1977. – V. 31. – № 138. – P. 333–390.
7. Васин В.В. *Методы решения неустойчивых задач.* – Свердловск: Изд-во УрГУ, 1989. – 94 с.
8. Вайникко Г.М. *Анализ дискретизационных методов.* – Тарту: Изд-во. Тарт. ун-та, 1976. – 162 с.
9. Кошелев И.Е. *Модификация двусеточного метода для приближенного решения операторных уравнений 1-го рода* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 1. – С. 25–31.

Диагностический центр
лабораторной диагностики
Екатеринбурга

Поступила
07.06.1995