Межрегиональная предметная олимпиада
Казанского федерального университета
по предмету "Математика"
Очный тур
2016-2017 учебный год
11 класс

1. Сколько существует способов представить число 2017 в виде суммы натуральных членов геометрической прогрессии?

Решение: Пусть b_1 - первый член геометрической прогрессии, а q -- множитель этой прогрессии.

По условию задачи любой элемент прогрессии $b_k \in \mathbb{N}$. В таком случае $q = \frac{b_2}{b_1}$ обязательно является дробным числом, то есть $q \in \mathbb{Q}$.

Пусть $q = \frac{n}{m}$ представление множителя прогрессии в виде несократимой дроби и $b_1(1 + q + q^2 + \cdots + q^k) = 2017$. Предположим, что $q = 1$, тогда $kb_1 = 2017$ и либо $k = 2017, b_1 = 1$, либо $b_1 = 2017, k = 1$.
Далее будем полагать, что $q \neq 1$. Подставим $q = \frac{n}{m}$ в уравнение

$$b_1(q^{k+1} - 1) = 2017(q - 1)$$

Получаем

$$b_1\left(\left(\frac{n}{m}\right)^{k+1} - 1\right) = 2017\left(\frac{n}{m} - 1\right),$$

откуда $b_1(n^{k+1} - m^{k+1}) = 2017(n - m)m^k$. Поскольку $q \neq 1$\$, то $n \neq m$, следовательно последнее уравнение можно переписать в виде

$$b_1(n^k + n^{k-1}m + n^{k-2}m^2 + \cdots + nm^{k-1} + m^k) = 2017\, m^k.$$

Заметим, что $b_1 = 2017^i m^j$ в силу последнего равенства, поскольку иначе сумма $n^k + n^{k-1}m + \cdots + m^k$ не могла бы быть равна натуральному числу. Так как все элементы суммы $b_1 + b_2 + \cdots + b_k$ натуральны и в сумме должны давать 2017, то $b_1 < 2017$ и $i = 0$. Теперь $b_{k+1} = b_1\left(\frac{n}{m}\right)^k \in \mathbb{N}$ и n и m взаимно простые, откуда следует, что $j \geq k$, а значит $b_1 \geq m^k$. Предположим, что $b_1 > m^k$, тогда $b_1 = m^{k+p}$, а значит сумма $n^k + n^{k-1}m + \cdots + nm^{k-1} + m^k$ не может давать натурального числа. Следовательно $b_1 = m^k$.

Осталось найти все комбинации, когда $n^k + n^{k-1}m + n^{k-2}m^2 + \cdots + nm^{k-1} + m^k = 2017$.

При $k = 1$ подходят все суммы типа $1 + 2016 = 2017,\ 2 + 2015 = 2017, 3 + 2014 = 2017,\ 4 + 2013 = 2017, \ldots, 2016 + 1 = 2017$.

При $k = 2$ получаем уравнение $n^2 + nm + m^2 = 2017$. Достаточно рассмотреть случай n>m.

$$n = \frac{-m + \sqrt{4 \cdot 2017 - 3m^2}}{2}$$

Из условия $\frac{-m+\sqrt{4\cdot 2017-3m^2}}{2} > m$ получаем, что $m < \sqrt{\frac{2017}{3}}$, а следовательно нужно перебрать все возможные m от 1 до 25 в поисках такого, что $\sqrt{4\cdot\ 2017-3m^2}$ будет натуральным числом.

Подбором получаем, что таким числом из указанного диапазона является только число 7, при котором n=41.

Проверим $7^2+7*41+41^2=2017$.

Для нечетных k>1 верно, что

$$n^k + n^{k-1}m + n^{k-2}m^2 + \cdots + m^k = (n+m)(n^{k-1} + n^{k-3}m^2 + \cdots m^{k-1}).$$

Поскольку 2017 – простое число, то оно не может быть произведением двух челых чисел.

При k=4 получаем уравнение $n^4 + n^3m + n^2m^2 + nm^3 + m^4 = 2017$, причем $n^4, m^4 \leq 2017$, а следовательно $n, m \leq\ 6$. Поскольку n, m взаимно простые стоит проверить лишь пары чисел (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 5), (3, 4), (3,5) (4,5), (5,6).
Для проверки рекомендуем перейти к уравнению $n^5 - m^5 = 2017(n-m)$
Ни одна из пар не подходит.

При k=6 получаем уравнение $n^6 + n^5m + n^4m^2 + n^3m^3 + n^2m^4 + nm^5 + m^6 = 2017$, причем $n^6, m^6 \leq 2017$, а следовательно $n, m \leq 3$. Нужно проверить пары чисел (1, 2), (1,3), (2,3). Для проверки рекомендуем перейти к уравнению $n^7 - m^7 = 2017(n-m)$. Ни одна из пар не подходит.

При $k \geq 8$ получаем, что $n^8, m^8 \leq 2017$, а следовательно $n, m \leq 2$. Поскольку $n.m$ взаимно простые, то необходимо рассмотреть лишь пару (1,2).
Тогда $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$, однако число 2018 не является натуральной степеню числа 2, поэтому такого быть не может.

С точностью до перестановок слагаемых существет 1008 способов представить число 2017 в виде двух слагаемых, 1 способ представить в виде суммы трех слагаемых, и 1 способ представить в виде 2017 слагаемых. Итого 1010 способов.

2. При каких значениях вещественного параметра а система уравнений $x^y = a = y^x$ имеет единственное решение?

Решение: Запишем ОДЗ: $x, y \in\ (0, +\infty)$.

Обратим внимание, что уравнение $x^y = y^x$ можно логарифмировать и записать в виде

$$\frac{\ln y}{y} = \frac{\ln x}{x}.$$

Исследуем функцию $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ на монотонность. Для этого найдем производную

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Оказывается, что функция $f(x)$ возрастает на промежутке $(0, e)$ и убывает на промежутке $(e, +\infty)$.

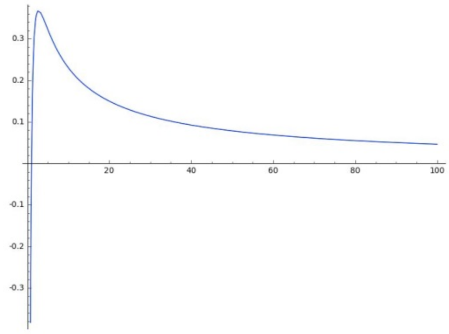
Вычислим пределы

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = +0$$

Найдем, когда $f(x) \leq 0$\$. Решением этого неравенства оказывается промежуток $(0,1]$.

Сделаем эскиз графика функции $f(x)$.



Очевидно, что одним из решений уравнения $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$ всегда является полупрямая $x = y > 0$.

Второе решение существует только в том случае, если $x \in (1, e)$, $y \in (e, +\infty)$ или $x \in (e, +\infty), y \in (1, e)$.
Уравнение $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$ имеет единственное решение только в случае если

$$x = y \in (0,1] \cup \{e\}.$$

В таком случае $a = x^x$, где $x \in (0,1) \cup \{e\}$.

Исследуем функцию $g(x) = x^x$\$. Для этого найдем ее производную

$$g'(x) = (e^{xlnx})' = e^{xlnx}(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

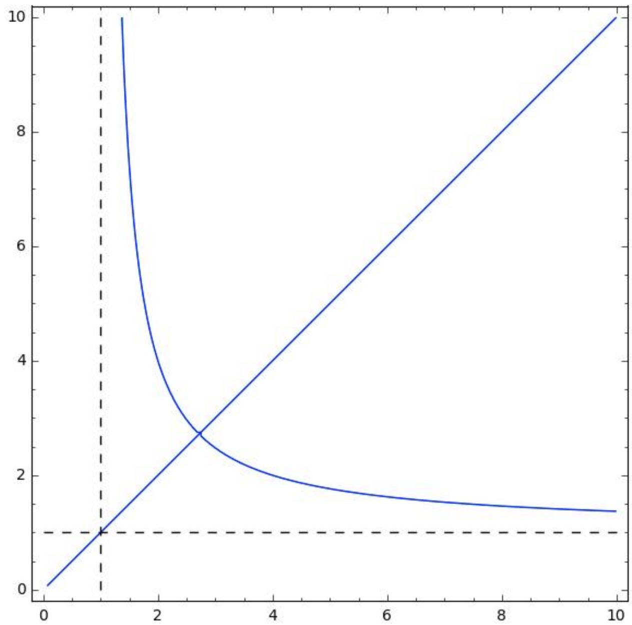
Поскольку x^x >0, то функция g убывает при $x \in (0, \frac{1}{e})$ и возрастает при $x \in$ $(\frac{1}{e}, +\infty)$.
Выясним предел функции g в нуле.

$$\lim_{x \to 0} x^x = \lim_{x \to 0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \to 0} x\, lnx} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = \lim_{y \to +\infty} -\frac{\ln y}{y} = 0$$

Таким образом в области $(0,1] \cup \{e\}$ функция g принимает значения $\left(e^{-\frac{1}{e}}, 1\right] \cup \{e^e\}$,

а значит система обладает единственным решением при $a \in \left(e^{-\frac{1}{e}}, 1\right] \cup \{e^e\}$.



3. Докажите, что в любой момент времени на поверхности Солнца есть точка, которую можно наблюдать не более чем с трех планет из восьми известных.

формализуем планеты и Солнце как сферы, причем ради- ус сферы Солнца больше любого другого радиуса. Выберем две планеты и проведем через центры этих планет и Солнца плоскость α. Точки в которых к сфере Солнца проходят касательные плоскости параллель- ные плоскости α будем называть полярными. Полярные точки не видны с планет, центры которых находятся в плоскости α, поскольку радиус Солнца больше радиуса любой из планет. Помимо планет, центры которых лежат в плоскости α, осталось не более 6-и планет, поэтому с одной из сторон от плоскости α лежит не более чем три центра планет. Полярная точка, расположенная в том по- лупространстве, где находится не более трех центров планет, видна разве что с этих планет, поэтому она видна не более чем с трех планет.

4. Сержант, стоящий справа в шеренге солдат, командует: «НАЛЕ-ВО!» После этого часть солдат поворачивается налево, а часть направо. Оказавшись лицом к лицу, солдаты разворачиваются спина к спине. На каждый разворот солдаты тратят по одной секунде. Каково наибольшее время, за которое n солдат (не считая сержанта) повернутся налево, имея в виду, что сам сержант не поворачивается при очередном виде лица ефрейтора, стоящего перед ним, а ефрейтор все время забывает, что уже видел грозный взгляд сержанта?

Рассмотрим случай, когда n = 1, тогда солдат либо уже находится в правильном положении, либо приходит в него за 1 секунду. Если n = 2, то перебирая все варианты начального расположения при- ходим к выводу, что максимальное время – 3 секунды. Если n = 3, то максимальное время – 5 секунд. Сделаем предположение индукции, что для произвольного n время 5будет 2n − 1. Пусть есть n + 1 солдат. Заметим, что для движущихся левее ефрейтора солдат оказывается, что после того как ефрейтор оказывается смотрящим налево, солдаты действуют также как если бы ефрейтор постоянно смотрел налево, по- скольку на следующего за ефрейтором солдата положение ефрейтора влияет только в тех случаях, когда они стоят с ефрейтором лицом-к- лицу. Ефрейтор после каждого своего разворота возвращается в «пра- вильное» положение за одну секунду и не меняет своего положения до тех пор, пока следующий за ним солдат не придет в «неправильное» по- ложение, а для того, чтобы стоящий за ефрейтором солдат вернулся в «неправильное» положение также должно пройти не менее одной секун- ды. Пусть ефрейтор изначально находится в «правильном» положенни, тогда дальнейшая эволюция системы из n солдат, стоящих за ним будет проходить накже как в случае n солдат – за $2n - 1$ секунду они выстро- ятся в «правильном» порядке. Если ефрейтор изначально не находится в правильном положении, то он потратит 1 секунду перед этим, чтобы придти в него. После того как n солдат выстроились правильно, в неправильном положении может остаться ефрейтор, которому нужно потратить 1 секунду, чтобы придти в правилньое положение. Складывая необоходимое время получаем, что $n+1$ солдат выстроятся правильно за $2n-1+1+1 = 2(n+1)-1$ секунду. Чтобы показать, что это время действительно максимально (то есть оценку $2n - 1$ для n солдат нельзя улучшить), приведем пример конфи- гурации, которая дает ровно $2n - 1$ секунду. Обозначим за $\rightarrow$, соладата, смотрящего направо, и за $\leftarrow$ – солдата, смотрящего налево. Таким свойством обладает конфигурация $\rightarrow\rightarrow \cdots \rightarrow\leftarrow$, где послед- няя стрелка отвечает сержанту. Через n секунд система будет находиться в состоянии $\leftarrow\rightarrow\leftarrow\rightarrow \cdots \leftarrow$, имея в виду, что положения солдат будут повторяться через одного. После этого через каждую секунду слева бу- дет увеличиваться количество солдат, смотрящих «налево» и стоящих при этом подряд. Процесс закончится, когда слева окажется n, смотрящих «налево» солдат, стоящих при этом подряд. Для этого нужно, чтобы после n-той секунды слева «приросло» ещё $n - 1$ солдат, поэтому после n-той секун- ды понадобиться еще $n - 1$ секунда. Таким образом солдаты придут в «правильное» положение ровно через $n + n - 1 = 2n - 1$ секунду. 6Таким образом максимальное время для n солдат не больше, чем $2n - 1$ секунда, и не меньше, чем $2n - 1$ секунда.