ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 12 (499)

УДК 517.853

И.В. КОННОВ, О.В. ПИНЯГИНА

МЕТОД СПУСКА ПО ИНТЕРВАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ДЛЯ НЕГЛАДКИХ ЗАДАЧ РАВНОВЕСИЯ

1. Введение

Пусть U — непустое замкнутое выпуклое множество в пространстве R^n, $\Phi : R^n \times R^n \to R$ — равновесная функция, т. е. $\Phi(u,u) = 0$ для любого $u \in U$. Задача равновесия определяется следующим образом: найти точку $u^* \in U$ такую, что

$$\Phi(u^*, v) \geq 0 \quad \forall v \in U.$$

Задачи равновесия позволяют единым образом формулировать и исследовать разнообразные сложные проблемы, возникающие в экономике, математической физике, исследовании операций и других областях. Более того, они тесно связаны с другими общими задачами нелинейного анализа, как, например, задачи оптимизации, задачи о дополнительности и вариационные неравенства. По этой причине теория и методы решения задач равновесия довольно интенсивно исследуются [1]–[4]. Как известно, один из наиболее распространенных подходов к решению вариационных неравенств состоит в сведении их к соответствующей оптимизационной задаче с помощью так называемых интервальных (или оценочных) функций [5]. Хотя эти функции, как правило, являются невыпуклыми, они позволяют преодолеть многие трудности как в теории, так и при построении методов решения вариационных неравенств.

Главная цель данной работы состоит в применении аппарата интервальных функций к довольно широкому классу задач равновесия, включающих негладкие функции. На этой основе исходная задача заменяется эквивалентной задачей о необходимых условиях оптимальности в негладкой оптимизации. Кроме того, показано, что можно построить итерационный метод спуска по интервальной функции, сходящийся к решению задачи при некоторых дополнительных предположениях.

2. Интервальная функция для задач равновесия

Пусть $f : R^n \to R$ — выпуклая, но не обязательно дифференцируемая функция, $h : R^n \times R^n \to R$ — равновесная функция. Будем также предполагать, что h — дифференцируемая функция и $h(u, \cdot)$ — выпуклая функция для любого $u \in R^n$.

Рассмотрим задачу равновесия в следующей форме [1].

Задача 2.1. *Найти точку $u^* \in U$ такую, что*

$$h(u^*, v) + f(v) - f(u^*) \geq 0 \quad \forall v \in U.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов №№ 01-01-00068, 03-01-96012), фонда НИОКР Академии наук Республики Татарстан и Академии наук Финляндии (проект № 77796).

Множество решений задачи 2.1 будем обозначать через U^*, а через $\nabla_u h(\cdot,\cdot)$ ($\nabla_v h(\cdot,\cdot)$) — частный градиент функции h по первому (второму) векторному аргументу.

Вначале сформулируем условие оптимальности для задачи 2.1 в форме смешанного вариационного неравенства.

Предложение 2.1. *Точка $u^* \in U$ является решением задачи* 2.1 *тогда и только тогда, когда*

$$\langle \nabla_v h(u^*, u^*), v - u^* \rangle + f(v) - f(u^*) \geq 0 \quad \forall v \in U. \tag{1}$$

Доказательство. Необходимость. Так как $u^* \in U^*$, то u^* является решением задачи выпуклого программирования

$$\min_{v \in U} \to h(u^*, v) + f(v).$$

Записав условия оптимальности для этой задачи, получим

$$\langle \nabla_v h(u^*, u^*) + g, v - u^* \rangle \geq 0 \quad \forall v \in U,$$

где g — субградиент функции f в точке u^*. По определению субградиента $f(v) - f(u^*) \geq \langle g, v - u^* \rangle$. Поэтому для u^* выполняется условие (1).

Достаточность. Предположим, что для u^* выполняется условие (1). Принимая во внимание, что $h(u^*, \cdot)$ выпукла, получим

$$\langle \nabla_v h(u^*, u^*), v - u^* \rangle \leq h(u^*, v) - h(u^*, u^*) = h(u^*, v) \quad \forall v \in U.$$

Отсюда в силу условия (1) имеем $h(u^*, v) + f(v) - f(u^*) \geq 0$ $\forall v \in U$, т. е. $u^* \in U^*$. □

Рассмотрим модифицированную по отношению к 2.1 задачу равновесия.

Задача 2.2. *Найти точку $\overline{u} \in U$ такую, что*

$$h(\overline{u}, v) + f(v) - f(\overline{u}) + 0.5\alpha\|v - \overline{u}\|^2 \geq 0 \quad \forall v \in U,$$

где $\alpha > 0$ — заданное число.

Обозначим через U^α множество решений задачи 2.2.

Предложение 2.2. *Множества решений задач* 2.1 *и* 2.2 *совпадают, т. е. $U^* = U^\alpha$.*

Доказательство. Результат следует непосредственно из предложения 2.1, поскольку $\nabla_v h(u, u) = \nabla_v \overline{h}(u, u)$, где $\overline{h}(u, v) = h(u, v) + 0.5\alpha\|v - u\|^2$. □

Введем обозначения

$$L(u, v) = -h(u, v) - f(v) + f(u) - 0.5\alpha\|v - u\|^2,$$
$$\psi(u) = \sup_{v \in U} L(u, v) = L(u, v(u)). \tag{2}$$

Заметим, что точка $v(u)$ всегда существует и является единственным решением задачи (2), поскольку $L(u, \cdot)$ — сильно вогнутая и непрерывная функция. Условие оптимальности для этой задачи можно сформулировать следующим образом.

Предложение 2.3. *Для всех $u' \in U$ верно неравенство*

$$\langle \nabla_v h(u', v(u')) + \alpha(v(u') - u'), v - v(u') \rangle + f(v) - f(v(u')) \geq 0 \quad \forall v \in U. \tag{3}$$

Доказательство. Выберем любую точку $v \in U$ и для краткости обозначим $v' = v(u')$. Записав условия оптимальности для задачи (2), имеем

$$\langle -\nabla_v h(u', v') - \alpha(v' - u') - g, v' - v\rangle \geq 0,$$

где g — субградиент функции f в точке v'. Отсюда согласно определению субградиента получим

$$\langle \nabla_v h(u', v') + \alpha(v' - u'), v - v'\rangle + f(v) - f(v') \geq 0,$$

т. е. (3) выполняется. $\square$

Покажем, что определенная в (2) функция ψ является интервальной в задаче равновесия 2.1, т. е. что имеет место

Предложение 2.4. *Функция ψ обладает следующими свойствами*:

(i) $\psi(u) \geq 0 \ \forall u \in U$;
(ii) $\psi(u) = 0$ *и* $u \in U \Longleftrightarrow u \in U^*$.

Доказательство. Утверждение (i) следует из того факта, что $L(u, u) = 0$. Докажем утверждение (ii). Предположим, что $u \in U$ и $\psi(u) = 0$, тогда

$$-h(u, v) - f(v) + f(u) - 0.5\alpha\|v - u\|^2 \leq 0 \quad \forall v \in U,$$

т. е. $u \in U^\alpha$ и $u \in U^*$ в силу предложений 2.1 и 2.2.

Предположим теперь, что $u \in U^*$. Тогда по определению

$$-h(u, v) - f(v) + f(u) \leq 0 \quad \forall v \in U.$$

Следовательно,

$$-h(u, v) - f(v) + f(u) - 0.5\alpha\|v - u\|^2 \leq 0 \quad \forall v \in U.$$

С другой стороны, в силу утверждения (i)

$$\psi(u) \geq 0 \quad \forall u \in U.$$

Отсюда следует $\psi(u) = 0$. $\square$

Приведем еще одну формулировку условия оптимальности для задачи 2.1 в форме неподвижной точки отображения $u \mapsto v(u)$.

Предложение 2.5. $u^* = v(u^*) \Longleftrightarrow u^* \in U^*$.

Доказательство. Предположим, что $u^* \in U^*$, тогда вследствие предложения 2.2 имеем $u^* \in U^\alpha$ и в силу предложения 2.1 выполняется

$$\langle \nabla_v h(u^*, u^*), v(u^*) - u^*\rangle + f(v(u^*)) - f(u^*) \geq 0.$$

В то же время в силу предложения 2.3

$$\langle \nabla_v h(u^*, v(u^*)), u^* - v(u^*)\rangle + f(u^*) - f(v(u^*)) - \alpha\|u^* - v(u^*)\|^2 \geq 0.$$

Сложив оба неравенства, получим

$$-\alpha\|u^* - v(u^*)\|^2 \geq \langle \nabla_v h(u^*, v(u^*)) - \nabla_v h(u^*, u^*), v(u^*) - u^*\rangle \geq 0,$$

поскольку $\nabla_v h(u^*, \cdot)$ является монотонным отображением. Отсюда следует $u^* = v(u^*)$. Теперь докажем обратное. Предположим, что $u^* = v(u^*)$, тогда по определению $u^* \in U$ и

$$\psi(u^*) = L(u^*, u^*) = -h(u^*, u^*) - f(u^*) + f(u^*) - 0.5\alpha\|u^* - u^*\| = 0,$$

отсюда в силу (ii) предложения 2.4 $u^* \in U^*$. $\square$

Свойства функции ψ, доказанные в предложении 2.4, т. е. неотрицательность на допустимом множестве и равенство нулю на множестве решений, показывают, что ψ может служить интервальной функцией для задачи 2.1. Отсюда, в частности, следует, что исходная задача 2.1 эквивалентна задаче условной минимизации

$$\min_{u\in U} \longrightarrow \psi(u). \tag{4}$$

Однако выпуклость функции ψ не гарантируется и данная задача может иметь в принципе локальные минимумы, отличные от глобальных. Поэтому было бы удобнее заменить эту задачу на ее условия стационарности. Это потребует дополнительных предположений, которые изучаются в следующем параграфе.

3. Непрерывность и стационарность

В дальнейшем будут использованы следующие предположения.

(A1) Для отображения $\nabla_v h(\cdot, v)$ выполняется условие Липшица с константой L_h для любого $v \in R^n$.

(A2) Для любых $u, v \in R^n$ выполняется неравенство

$$\langle \nabla_u h(u,v) + \nabla_v h(u,v), v-u\rangle \geq \varkappa \|u-v\|^2,$$

где $\varkappa > 0$.

Отметим, что в случае вариационного неравенства, т. е. когда функция h представлена в виде $h(u,v) = \langle G(u), v-u\rangle$, свойство (A2) выглядит следующим образом:

$$\langle \nabla G(u)^T(v-u), v-u\rangle \geq \varkappa \|u-v\|^2,$$

что соответствует требованию сильной монотонности отображения G.

Лемма 3.1. *Если условие* (A1) *выполняется, то отображение* $u \mapsto v(u)$ *удовлетворяет условию Липшица.*

Доказательство. Выберем произвольные точки $u', u'' \in U$ и обозначим $v' = v(u')$, $v'' = v(u'')$. Тогда в силу предложения 2.3 имеем

$$\langle \nabla_v h(u',v') + \alpha(v'-u'), v''-v'\rangle + f(v'') - f(v') \geq 0,$$
$$\langle \nabla_v h(u'',v'') + \alpha(v''-u''), v'-v''\rangle + f(v') - f(v'') \geq 0.$$

Сложив эти неравенства, получим

$$\langle \nabla_v h(u',v') - \nabla_v h(u'',v''), v''-v'\rangle + \alpha\langle (v'-v'') + (u''-u'), v''-v'\rangle \geq 0.$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}\langle \nabla_v h(u',v') - \nabla_v h(u'',v'), v''-v'\rangle + \alpha\langle u''-u', v''-v'\rangle \geq\\ \geq \langle \nabla_v h(u'',v') - \nabla_v h(u'',v''), v'-v''\rangle + \alpha\|v''-v'\|^2 \geq \alpha\|v''-v'\|^2,\end{aligned}$$

поскольку $\nabla h_v(u'', \cdot)$ монотонно. Далее, используя (A1), получим

$$(L_h+\alpha)\|u'-u''\|\,\|v'-v''\| \geq \alpha\|v'-v''\|^2,$$

отсюда

$$\|v'-v''\| \leq (1 + L_h/\alpha)\|u'-u''\|. \quad \square$$

Из леммы 3.1 и формулы (2), в частности, следует, что функция ψ непрерывна на U.

Лемма 3.2. *Пусть выполняется условие* (A1). *Тогда функция* ψ *имеет производную в любой точке* $u \in U$ *по любому направлению* $d \in R^n$, *причем*

$$\psi'(u;d) = f'(u;d) - \langle \nabla_u h(u, v(u)) + \alpha(u - v(u)), d\rangle.$$

Доказательство. Выберем произвольно вектор $d \in R^n$. Учитывая свойство непрерывности отображения $u \mapsto v(u)$ и определение функции ψ, получаем, что в данных условиях можно применить теорему 3.4 из [6] о дифференцировании функции максимума, откуда следует, что функция ψ дифференцируема по направлениям в любой точке $u \in U$ и

$$\psi'(u;d) = f'(u;d) - \langle \nabla_u h(u, v(u)) + \alpha(u - v(u)), d\rangle. \quad \square$$

Сформулируем необходимое и достаточное условие оптимальности для задачи (4).

Теорема 3.1 (условие стационарности). *Пусть выполняются условия* (A1) *и* (A2). *Тогда*

$$\psi'(u'; u - u') \geq 0 \quad \forall u \in U \Longleftrightarrow u' \in U^*.$$

Доказательство. То, что решение задачи 2.1 должно удовлетворять условию неотрицательности производной по любому направлению в этой точке, является очевидным. Предположим теперь, что

$$\psi'(u'; u - u') \geq 0 \quad \forall u \in U.$$

Из определения производной по направлению следует

$$f'(u'; u - u') - \langle \nabla_u h(u', v(u')) + \alpha(u' - v(u')), u - u'\rangle \geq 0 \quad \forall u \in U.$$

Полагая здесь $u = v(u')$, получим

$$f'(u'; v(u') - u') - \langle \nabla_u h(u', v(u')) + \alpha(u' - v(u')), v(u') - u'\rangle \geq 0.$$

С другой стороны, в силу предложения 2.3, полагая в (3) $v = u'$, имеем

$$\langle \nabla_v h(u', v(u')) + \alpha(v(u') - u'), u' - v(u')\rangle + f(u') - f(v(u')) \geq 0.$$

Складывая два последних неравенства, получим

$$f'(u'; v(u') - u') + f(u') - f(v(u')) - \langle \nabla_u h(u', v(u')) + \nabla_v h(u', v(u')), v(u') - u'\rangle \geq 0. \qquad (5)$$

Сумма первых трех слагаемых неположительна вследствие выпуклости функции f, поэтому в силу предположения (A2) из (5) следует $-\varkappa\|u' - v(u')\| \geq 0$, что выполняется только если $u' = v(u')$. Тогда согласно предложению 2.5 следует $u' \in U^*$. $\square$

Итак, любая стационарная точка задачи (4) дает решение исходной задачи равновесия 2.1, поэтому для отыскания решения можно использовать соответствующие итеративные методы минимизации с учетом негладкости функции ψ. Отметим, что из теоремы 3.1 и предложения 2.4 следует, что условие (A2) фактически гарантирует отсутствие локальных минимумов функции ψ, отличных от глобального.

В следующем разделе покажем, что если точка u не является решением задачи 2.1, то вектор $d = v(u) - u$ представляет собой направление убывания для функции ψ в точке u. Основываясь на этом утверждении, построим метод спуска для решения задачи 2.1.

4. Метод спуска

Лемма 4.1. *Пусть выполняются условия* (A1) *и* (A2). *Тогда для любого* $u \in U \setminus U^*$

$$\psi'(u; v(u) - u) < 0.$$

Доказательство. Выберем любую точку $u \in U$. Согласно лемме 3.2

$$\psi'(u; v(u) - u) = f'(u; v(u) - u) - \langle \nabla_u h(u, v(u)) + \alpha(u - v(u)), v(u) - u\rangle.$$

С другой стороны, в силу предложения 2.3, полагая в (3) $u = u'$, $v = u$, имеем

$$0 \leq \langle \nabla_v h(u, v(u)) + \alpha(v(u) - u), u - v(u)\rangle + f(u) - f(v(u)).$$

Складывая эти соотношения, получим

$$\psi'(u; v(u) - u) \leq f'(u; v(u) - u) + f(u) - f(v(u)) - \langle \nabla_u h(u, v(u)) + \nabla_v h(u, v(u)), v(u) - u \rangle.$$

Для любой точки u из множества $U \setminus U^*$ сумма первых трех слагаемых в правой части неравенства неположительна вследствие выпуклости функции f, четвертое слагаемое отрицательно в силу предположения (A2), поскольку $u \neq v(u)$. Таким образом, $\psi'(u; v(u) - u) < 0$. $\square$

Итак, решение задачи (2) позволяет получить направление убывания функции ψ в любой точке $u \in U$.

Построим теперь для решения задачи 2.1

Метод спуска

Шаг 0. Выберем произвольно точку $u^0 \in U$ и параметр $\alpha > 0$. Положим $k = 0$.

Шаг 1. Вычислим $\psi(u^k)$ и $v(u^k)$ по формуле

$$\psi(u^k) = \sup_{v \in U} L(u^k, v) = L(u^k, v(u^k)).$$

Если $\psi(u^k) = 0$, то u^k является решением задачи 2.1, процесс решения останавливается.

Шаг 2. Вычислим $w(u^k) = u^k + l_k d^k$, где $d^k = v(u^k) - u^k$, а l_k представляет собой решение задачи одномерной минимизации

$$\min_{0 \leq l \leq 1} \longrightarrow \psi(u^k + l d^k),$$

положим $u^{k+1} = w(u^k)$, заменим k на $k+1$ и перейдем к шагу 1.

Введем дополнительное предположение.

(A3) Для любого $v \in R^n$ отображение $\nabla_v h(\cdot, v)$ является сильно монотонным на множестве U с константой τ.

Теорема 4.1. *Пусть выполняется предположение* (A3)*. Тогда найдется число $\sigma > 0$ такое, что*

$$\sigma \|u - u^*\|^2 \leq \psi(u) \quad \forall u \in U,$$

где $u^* \in U^*$.

Доказательство. Выберем произвольно число $\mu \in (0, 1]$ и точку $u^* \in U^*$ и определим $v_\mu = \mu u^* + (1 - \mu) u$. Учитывая выпуклость функций $h(u, \cdot)$ и f, имеем

$$\begin{aligned}\psi(u) \geq -h(u, v_\mu) + f(u) - f(v_\mu) - 0.5\alpha \|u - v_\mu\|^2 \geq -\mu h(u, u^*) - (1 - \mu) h(u, u) + \\ + f(u) - \mu f(u^*) - (1 - \mu) f(u) - 0.5\alpha\mu^2 \|u - u^*\|^2 = \\ = -\mu h(u, u^*) + \mu[f(u) - f(u^*)] - 0.5\alpha\mu^2 \|u - u^*\|^2.\end{aligned}$$

Далее, из выпуклости функции $h(u, \cdot)$, свойства $h(u, u) = 0$ и соотношения (1) следует

$$-h(u, u^*) + f(u) - f(u^*) \geq \langle \nabla_v h(u, u^*) - \nabla_v h(u^*, u^*), u - u^* \rangle.$$

Поэтому с учетом свойства (A3) получим

$$\begin{aligned}\psi(u) \geq \mu \langle \nabla_v h(u, u^*) - \nabla_v h(u^*, u^*), u - u^* \rangle - 0.5\alpha\mu^2 \|u - u^*\|^2 \geq \\ \geq (\mu\tau - 0.5\alpha\mu^2) \|u - u^*\|^2 \geq \sigma \|u - u^*\|^2,\end{aligned}$$

где

$$\sigma = \begin{cases} \tau - 0.5\alpha & \text{при } \tau \geq \alpha; \\ 0.5\tau^2/\alpha & \text{при } \tau < \alpha. \end{cases} \quad \square$$

Введем обозначение

$$S(u) = \{v \in U^n \mid \psi(v) \leq \psi(u)\} \quad \forall u \in U^n.$$

Следствие 4.1. Пусть выполняется предположение (A3). Тогда лебегово множество $S(u)$ для любого $u \in U^n$ является ограниченным.

Следствие 4.2. Пусть выполняется предположение (A3). Тогда задача 2.1 имеет единственное решение.

Доказательство. Поскольку функция ψ непрерывна, то она достигает своего минимального значения на непустом компактном множестве $S(u')$, где u' — произвольная точка из U, т. е. существует решение задачи (4), которое, очевидно, является стационарной точкой. Из теоремы 3.1 следует, что существует решение задачи 2.1. В силу теоремы 4.1 и предложения 2.4 это решение единственно. □

Теорема 4.2 (глобальная сходимость). *Пусть выполняются предположения* (A1), (A2) *и* (A3). *Тогда итерационная последовательность* $\{u^k\}$, *построенная методом спуска, сходится к единственному решению задачи* 2.1.

Доказательство. Для доказательства сходимости метода воспользуемся теоремой сходимости A из ([7], гл. 4, раздел 4.5). Прежде всего покажем, что выполняются все условия этой теоремы.

1) Все точки последовательности $\{u^k\}$ принадлежат компактному подмножеству U. Условие следует из следствия 4.1.

2) $\psi(u^{k+1}) < \psi(u^k)$ для $u^k \notin U^*$ и $u^k \in U^*$ в случае $\psi(u^{k+1}) \geq \psi(u^k)$. Условие следует непосредственно из теоремы 3.1, леммы 4.1 и правила выбора шага в методе.

3) Алгоритмическое отображение $u \mapsto w(u)$ замкнуто в любой точке $u \notin U^*$. Условие следует из непрерывности отображения $u \mapsto v(u)$, непрерывности функции ψ на U и компактности множества $U \cap S(u^0)$.

Таким образом, все условия теоремы сходимости A ([7], гл. 4, раздел 4.5) выполняются, поэтому любая предельная точка последовательности $\{u^k\}$ является стационарной (по свойству 1) хотя бы одна такая точка существует). Следовательно, в силу теоремы 4.1 и следствия 4.2 последовательность $\{u^k\}$ сходится к единственному решению задачи 2.1. □

Литература

1. Байокки К., Капело А. *Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей.* – М.: Наука, 1988. – 448 с.
2. Blum E., Oettli W. *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems* // The Mathem. Student. – 1994. – V. 63 – № 1. – P. 123–145.
3. Bianchi M., Schaible S. *Generalized monotone bifunctions and equilibrium problems* // J. Optim. Theory Appl. – 1996. – V. 90. – № 1. – P. 31–43.
4. Konnov I.V., Schaible S. *Duality for equilibrium problems under generalized monotonicity* // J. Optim. Theory Appl. – 2000. – V. 104. – № 2. – P. 395–408.
5. Patriksson M. *Merit functions and descent algorithms for a class of variational inequality problems* // Optimization. – 1997. – V. 41. – № 1. – P. 37–55.
6. Демьянов В.Ф., Рубинов А.И. *Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.* – М.: Наука, 1990. – 432 с.
7. Зангвилл У. *Нелинейное программирование. Единый подход.* – М.: Советское радио, 1973. – 312 с.

Казанский государственный университет

Поступила
15.04.2003