ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 12 (463)

УДК 519.8

Э.Х. ГИМАДИ, Н.М. КАЙРАН, А.И. СЕРДЮКОВ

О РАЗРЕШИМОСТИ МНОГОИНДЕКСНОЙ АКСИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИЯХ НА ОДНОЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДСТАНОВКАХ

1. Введение

Естественным обобщением классической задачи об оптимальном назначении является ее многоиндексная версия: найти минимум линейной функции

$$\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n} c_{i_1 i_2\cdots i_m} x_{i_1 i_2\cdots i_m} \tag{1}$$

при выполнении условий на переменные

$$x_{i_1 i_2\cdots i_m} \in \{0,1\}; \tag{2}$$

$$\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_{k-1}=1}^{n}\sum_{i_{k+1}=1}^{n}\cdots\sum_{i_m=1}^{n} x_{i_1 i_2\cdots i_m} = 1 \tag{3}$$

для всяких $1 \le i_k \le n$, $1 \le k \le m$. Здесь через $c_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ обозначены элементы прямоугольной $\overbrace{n\times\cdots\times n}^{m}$-матрицы — заданные вещественные числа, $1 \le i_k \le n$, $k = 1,\ldots,m$.

По виду ограничений (3) такую задачу называют аксиальной [1]. Решение задачи может быть представлено выбором в $\overbrace{n\times\cdots\times n}^{m}$-матрице $(c_{i_1 i_2 \ldots i_m})$ ровно n элементов (как и в классической двухиндексной задаче), сумма весов которых и составляет целевую функцию. Именно только этим выбранным элементам соответствуют единичные значения переменных задачи. Многоиндексность позволяет более полно отразить специфику прикладных задач по сравнению с двухиндексным случаем.

Так же, как и в классической (двухиндексной) задаче о назначении, для многоиндексной задачи (1)–(3) удобно использовать более компактную форму ее записи с помощью подстановок из симметрической группы S_n порядка n: минимизировать линейную форму

$$\sum_{i=1}^{n} c_{i,\pi_1(i),\sigma_{31}(i),\ldots,\sigma_{m1}(i)} \tag{4}$$

на множестве подстановок $\{\pi_k \mid 1 \le k < m\}$ таких, что

$$\sigma_{kk'} \in S_n \ \text{ при } \ 1 \le k' < k \le m, \tag{5}$$

где через $\sigma_{kk'}$ обозначена подстановка $\pi_{k-1}\pi_{k-2}\cdots\pi_{k'+1}\pi_{k'}$, $1 \le k' < k \le m$.

Существенным отличием рассматриваемой в данной работе многоиндексной аксиальной задачи о назначениях от задачи (4), (5) является замена условия (5) на условие

$$\sigma_{kk'} \in P_n \ \text{ при } \ 1 \le k' < k \le m, \tag{6}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 99-01-00601) и федеральной целевой программы "Интеграция" (код проекта 274).

где P_n — множество всех одноциклических подстановок из симметрической группы S_n порядка n.

Классическая многоиндексная задача о назначениях (на подстановках из симметрической группы S_n порядка n) NP-трудна, начиная с числа индексов, равного трем [2], [3]. В двухиндексном варианте эта задача полиномиально разрешима, чего нельзя сказать о двухиндексной задаче о назначениях на одноциклических подстановках, поскольку, очевидно, последняя совпадает с классической задачей коммивояжера. Отсюда следует, что рассматриваемая в статье задача MAX SNP-трудна [4], [5].

Более того, в отличие от двухиндексной задачи (коммивояжера) и многоиндексной задачи о назначениях (на подстановках из S_n) многоиндексная аксиальная задача о назначениях на одноциклических подстановках не при всяких входах может иметь решение. В [6] для трехиндексной задачи о назначениях на одноциклических подстановках был обоснован критерий разрешимости задачи: задача разрешима тогда и только тогда, когда n нечетно. Там же предложен приближенный алгоритм решения трехиндексной задачи, имеющий линейную (относительно длины входа) трудоемкость, и получены условия асимптотической точности этого алгоритма при случайно задаваемых входных данных.

В данной работе представлен критерий разрешимости m-индексной аксиальной задачи о назначениях на одноциклических подстановках при $3 \leq m \leq 7$: начиная с некоторого номера n_m, задача разрешима при $n \geq n_m$ тогда и только тогда, когда n нечетно. В качестве одного из нерешенных вопросов сформулирована гипотеза о справедливости критерия для любого $m > 2$.

2. Предварительные замечания и необходимый признак разрешимости задачи

Условия (6) для шестииндексной задачи проиллюстрированы на рис. 1 в следующей наглядной форме:

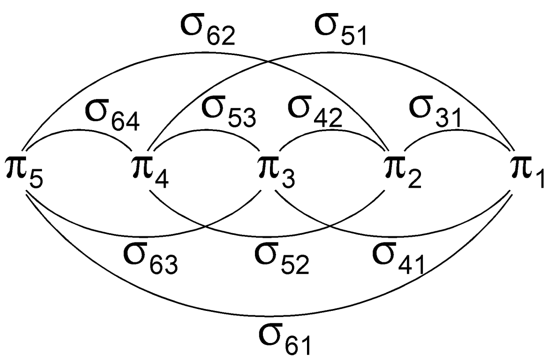

Рис. 1

В частности, здесь $\sigma_{31} = \pi_2\pi_1$, $\sigma_{52} = \pi_4\pi_3\pi_2$, $\sigma_{62} = \pi_5\pi_4\pi_3\pi_2$, $\sigma_{61} = \pi_5\pi_4\pi_3\pi_2\pi_1$.

Далее будем ссылаться на следующие два очевидных утверждения, касающихся свойств подстановок из S_n.

Замечание 1. При умножении произвольной подстановки из S_n на транспозицию (i, j) (как справа, так и слева) четность числа циклов в подстановке меняется. При этом число циклов уменьшается на единицу, если индексы i и j принадлежат разным циклам, и увеличивается на единицу, если i, j находятся в одном цикле.

Замечание 2. Для любых двух подстановок π и α из S_n имеет место свойство: подстановки π и $\alpha\pi\alpha^{-1}$ имеют одинаковое число циклов.

Задачу будем называть *разрешимой*, если для нее существует такая система подстановок $\{\pi_k \mid 1 \leq k < m\}$, для которой выполняются условия (6). В противном случае задачу называем *неразрешимой.* В [6] обоснован необходимый признак — нечетность n — разрешимости трехиндексной задачи. Этот признак легко распространяется на случай произвольного числа индексов $m > 2$.

Теорема 1. *При $n \geq m > 2$ для разрешимости m-индексной задачи о назначении на одноциклических подстановках из S_n необходимо, чтобы n было нечетным.*

Доказательство. Допустим противное: для некоторого четного n нашлись подстановки $\{\pi_k \mid 1 \leq k < m\}$, удовлетворяющие условию (6). Тогда первые две подстановки π_1, π_2 и их произведение $\pi_2\pi_1$ являются одноциклическими. Подстановка π_1 представима в виде произведения $(n-1)$ транспозиций, число которых нечетно в силу четности n. Согласно замечанию 1 после умножения одноциклической подстановки π_2 на нечетное число транспозиций (справа) получим подстановку $\pi_2\pi_1$ с четным числом циклов, т. е. $\pi_2\pi_1 \notin P_n$. Пришли к противоречию. $\square$

3. Критерий разрешимости 7-индексной задачи

Рассмотрим разбиение множества нечетных натуральных чисел на подмножества

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \{n \in N \mid n \neq 0 \ (\mathrm{mod}\, 2),\ n \neq 0 \ (\mathrm{mod}\, 3),\ n \neq 0 \ (\mathrm{mod}\, 5)\},\\
N_2 &= \{n \in N \mid n \neq 0 \ (\mathrm{mod}\, 2),\ n \neq 0 \ (\mathrm{mod}\, 3),\ n = 0 \ (\mathrm{mod}\, 5)\},\\
N_3 &= \{n \in N \mid n \neq 0 \ (\mathrm{mod}\, 2),\ n = 0 \ (\mathrm{mod}\, 3),\ n \neq 0 \ (\mathrm{mod}\, 5)\},\\
N_4 &= \{n \in N \mid n \neq 0 \ (\mathrm{mod}\, 2),\ n = 0 \ (\mathrm{mod}\, 3),\ n = 0 \ (\mathrm{mod}\, 5)\}.
\end{aligned}
$$

Легко видеть, что 7-индексная задача не имеет смысла при $n < 7$.

Далее для определенности положим $\pi = (1, 2, \ldots, n)$.

Лемма 1. *Если $n \in N_1$ и $n \geq 7$, то 7-индексная задача о назначениях на одноциклических подстановках разрешима.*

Доказательство. Покажем, что если $n \in N_1$ и $n \geq 7$, то подстановки $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_5 = \pi_6 = \pi$ являются допустимым решением задачи. Действительно, в этом случае подстановки, входящие в (6), имеют вид π, π^2, π^3, π^4, π^5, π^6 и являются одноциклическими. $\square$

Лемма 2. *7-индексная задача о назначениях на одноциклических подстановках разрешима, если $n \in N_2$, $n \geq 25$.*

Доказательство. Покажем, что если $n \in N_2$, $n \geq 25$, то допустимое решение задачи дают подстановки $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi$, $\pi_5 = \alpha\pi$, $\pi_6 = \alpha\pi\alpha^{-1}$, где $\alpha = (8, 12)(8, 5)(8, 14)(1, 8)$.

В этом случае минимальное значение n равно $\min\{n \in N_2 \mid n \geq 14\} = 25$, а подстановки, входящие в (6), имеют следующий вид (условно разобьем их на три подвида):

I. π, π^2, π^3, π^4;
II. $\alpha\pi\alpha^{-1}$;
III. $\alpha\pi$, $\alpha\pi^2$, $\alpha\pi^3$, $\alpha\pi^4$, $\alpha\pi^5$, $\alpha\pi^6$.

Подстановки первого подвида являются одноциклическими. С учетом замечания 2 подстановка второго подвида также является одноциклической.

Покажем одноцикличность подстановок третьего подвида. Поскольку $n \in N_2$, то π^5 можно представить в виде произведения пяти независимых циклов $(1, 6, \ldots, n-4)(2, 7, \ldots, n-3)(3, 8, \ldots, n-2)(4, 9, \ldots, n-1)(5, 9, \ldots, n)$. Согласно замечанию 1 для того чтобы подстановку π^5 преобразовать в одноциклическую, потребуется, как минимум, домножение ее на четыре транспозиции. При умножении π^5 на транспозицию $(1, 8)$ слева получаем подстановку $(1, 8)\pi^5$ в виде следующего произведения четырех независимых циклов:

$$(1, 8, 13, \ldots, n-2, 3, 6, 11, \ldots, n-4)(2, 7, \ldots, n-3)(4, 9, \ldots, n-1)(5, 10, \ldots, n),$$

представленных на рис. 2.

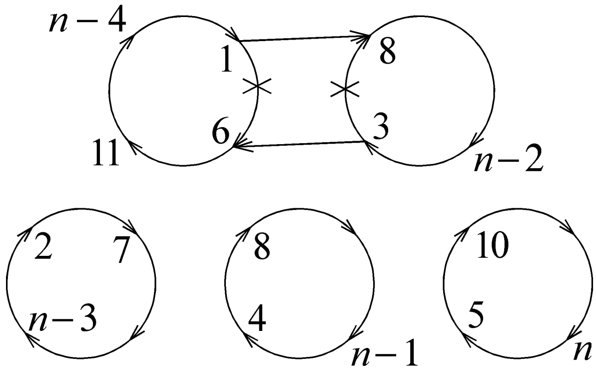

Рис. 2

При умножении текущей подстановки на новую транспозицию каждый раз возникает одинаковая ситуация: элементы транспозиции принадлежат разным циклам подстановки, и число циклов уменьшается на единицу. Поэтому с учетом замечания 1 подстановка $\alpha\pi^5$ одноциклическая.

Подстановки π, π^2, π^3, π^4, π^6 одноциклические. Следовательно, подстановки $(1,8)\pi$, $(1,8)\pi^2$, $(1,8)\pi^3$, $(1,8)\pi^4$, $(1,8)\pi^6$ состоят из двух циклов. При этом, как нетрудно проверить, элементы $\{8\}$, $\{14\}$ принадлежат разным циклам.

Поэтому с учетом замечания 1 подстановки $(8,14)(1,8)\pi$, $(8,14)(1,8)\pi^2$, $(8,14)(1,8)\pi^3$, $(8,14)(1,8)\pi^6$ являются одноциклическими.

Аналогично показывается, что при умножении каждой из последних подстановок на транспозицию (5,8), а затем на (8,12) также получаются одноциклические подстановки.

Рассмотрим далее подстановку $(1,8)\pi^4$. Она состоит из двух циклов и содержит элементы $\{8\}$, $\{14\}$ в одном из этих циклов. С учетом замечания 1 подстановка $(8,14)(1,8)\pi^4$ состоит из трех циклов. При этом элементы $\{5\}$, $\{8\}$ и $\{12\}$ принадлежат разным циклам (см. рис. 3).

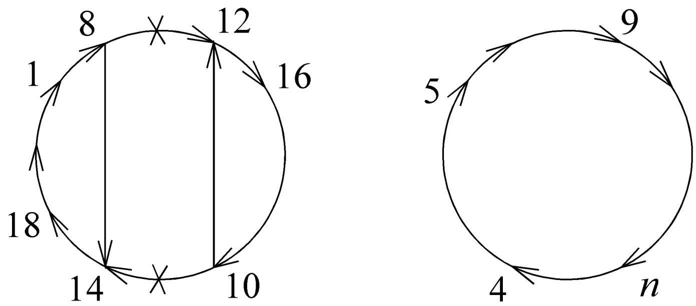

Рис. 3

Отсюда следует, что произведение $(8,12)(5,8)$ на $(8,14)(1,8)\pi^4$ — одноциклическая подстановка.

Итак, все подстановки, фигурирующие в условии (6), являются одноциклическими при $n \in N_2$, $n \geq 25$. $\square$

Лемма 3. *7-индексная задача о назначениях на одноциклических подстановках разрешима, если $n \in N_3$, $n \geq 27$.*

Доказательство. Покажем, что если $n \in N_3$, $n \geq 27$, то в качестве решения задачи можно взять подстановки $\pi_1 = \pi_2 = \pi$, $\pi_3 = \alpha\pi$, $\pi_4 = \pi_5 = \alpha\pi\alpha^{-1}$, $\pi_6 = \beta\alpha\pi\alpha^{-1}$, где $\alpha = (6,14)(1,6)$, $\beta = (23,3)(14,3)$. Минимальное значение n в этом случае равно $\min\{n \in N_3 \mid n \geq 23\} = 27$. При этом подстановки, входящие в условие (6), имеют следующий вид (условно разобьем их на пять подвидов):

I. π, π^2;
II. $\alpha\pi\alpha^{-1}$, $\alpha\pi^2\alpha^{-1}$;
III. $\alpha\pi$, $\alpha\pi^2$, $\alpha\pi^3$, $\alpha\pi^4$, $\alpha\pi^5$;
IV. $\beta\alpha\pi^4$, $\beta\alpha\pi^5$, $\beta\alpha\pi^6$;
V. $\beta\alpha\pi\alpha^{-1}$, $\beta\alpha\pi^2\alpha^{-1}$, $\beta\alpha\pi^3\alpha^{-1}$.

Подстановки первого подвида, а с учетом замечания 2, и подстановки второго подвида являются одноциклическими.

Покажем одноцикличность подстановок третьего подвида. Так как $n \in N_3$, то π^3 можно представить в виде произведения трех независимых циклов. Элементы $\{1\}$, $\{6\}$ и $\{14\}$ лежат в разных циклах. Поэтому произведение $(6,14)(1,6)$ на π^3 — одноциклическая подстановка.

Подстановки π, π^2, π^4, π^5 одноциклические. Следовательно, каждая из подстановок $(1,6)\pi$, $(1,6)\pi^2$, $(1,6)\pi^4$, $(1,6)\pi^5$ состоит из двух циклов. Легко проверить, что в каждой из этих подстановок элементы $\{6\}$ и $\{14\}$ принадлежат разным циклам. Поэтому подстановки $\alpha\pi$, $\alpha\pi^2$, $\alpha\pi^4$, $\alpha\pi^5$ одноциклические по замечанию 1.

Покажем одноцикличность подстановок четвертого подвида. Так как $\alpha\pi^4$ и $\alpha\pi^5$ одноциклические, то подстановки $(3,14)\alpha\pi^4$ и $(3,14)\alpha\pi^5$ состоят из двух циклов. Легко проверить, что в каждой из этих подстановок элементы $\{3\}$, $\{23\}$ принадлежат разным циклам. Поэтому подстановки $\beta\alpha\pi^4$, $\beta\alpha\pi^5$ одноциклические согласно замечанию 1.

Поскольку $n \in N_3$, то подстановка π^6 может быть представлена в виде следующего произведения трех независимых циклов:

$$(1,7,\dots n-2,4,10,\dots,n-6)(2,8,\dots,n-1,5,11,\dots,n-5)(3,9,\dots,n,6,12,\dots,n-4),$$

причем элементы $\{1\}$, $\{6\}$, $\{14\}$ принадлежат разным циклам. Поэтому умножение подстановки $\alpha = (6,14)(1,6)$ на π^6 дает одноциклическую подстановку $\alpha\pi^6$. При умножении подстановки $\beta = (3,23)(3,14)$ на одноциклическую подстановку $\alpha\pi^6$ сначала получаем подстановку $(3,14)\alpha\pi^6$, состоящую из двух циклов. Элементы $\{3\}$, $\{23\}$ принадлежат разным циклам. Следовательно, подстановка $(3,23)(3,14)\alpha\pi^6 = \beta\alpha\pi^6$ одноциклическая.

Аналогичным образом показывается одноцикличность трех подстановок пятого типа. □

Лемма 4. *7-индексная задача о назначениях на одноциклических подстановках разрешима, если $n \in N_4$, $n \geq 45$.*

Доказательство. Если $N_4 = \{n \in N \mid n \neq 0 \pmod 2,\ n = 0 (\mathrm{mod}\, 3),\ n = 0 \pmod 5\}$, то допустимым решением задачи являются подстановки $\pi_1 = \pi_2 = \pi$, $\pi_3 = \alpha\pi$, $\pi_4 = \pi_5 = \alpha\pi\alpha^{-1}$, $\pi_6 = \beta\alpha\pi\alpha^{-1}$, где $\alpha = (11,14)(11,5)(2,18)(1,2)$, $\beta = (32,15)(31,32)$.

В этом случае подстановки, входящие в условие (6), имеют вид

I. π, π^2;
II. $\alpha\pi$, $\alpha\pi^2$, $\alpha\pi^3$, $\alpha\pi^4$, $\alpha\pi^5$;
III. $\alpha\pi\alpha^{-1}$, $\alpha\pi^2\alpha^{-1}$;
IV. $\beta\alpha\pi^4$, $\beta\alpha\pi^5$, $\beta\alpha\pi^6$;
V. $\beta\alpha\pi\alpha^{-1}$, $\beta\alpha\pi^2\alpha^{-1}$, $\beta\alpha\pi^3\alpha^{-1}$.

Как и в предыдущем случае, разбили их на пять подвидов.

Проведя аналогичные рассуждения, можно показать, что приведенные выше подстановки удовлетворяют условию (6). □

Теперь сформулируем критерий разрешимости 7-индексной задачи.

Теорема 2. *Найдется такой номер n_7, что 7-индексная задача о назначениях на одноциклических подстановках из S_n разрешима при $n \geq n_7$ тогда и только тогда, когда n нечетно.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 1. Достаточность получим из лемм 1–4, согласно которым значение $n_7 = 45$ удовлетворяет условиям теоремы. □

4. Заключительные замечания о разрешимости многоиндексной задачи

Непосредственно из критерия разрешимости 7-индексной задачи вытекает справедливость критерия для задач с числом индексов m от 3 до 6.

Теорема 3. *Для всякого $2 < m \leq 7$ найдется такой номер n_m, что m-индексная аксиальная задача о назначениях на одноциклических подстановках из S_n разрешима при $n \geq n_m$ тогда и только тогда, когда n нечетно.*

Отметим некоторые нерешенные вопросы, представляющие интерес для дальнейших исследований.

1. Опровергнуть или доказать, что верна следующая

Гипотеза. Для любого $m > 2$ найдется такой номер n_m, что m-индексная аксиальная задача о назначениях на одноциклических подстановках из S_n разрешима при $n \geq n_m$ тогда и только тогда, когда n нечетно.

2. Для заданного числа индексов $m > 2$ было бы любопытным указать минимальный номер n_m, начиная с которого нечетность n является необходимым и достаточным условием разрешимости m-индексной задачи о назначениях на одноциклических подстановках.

3. Как было сказано в начале статьи, эффективный приближенный алгоритм решения удалось построить только для 3-индексной задачи. Представляется интересным реализация оптимизационного аспекта задачи при большем числе индексов.

Литература

1. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.М. *Многогранники, графы, оптимизация.* – М: Наука, 1981. – 342 с.
2. Balas E., Saltzman M.J. *Facets of the three-index assignment polytope* // Discrete Appl. Math. – 1989. – V. 23. – № 3. – P. 201–229.
3. Balas E., Saltzman M.J.*An algorithm for the three-index assignment problem* // Oper. Res. – 1991. – V. 39. – № 1. – P. 150–161.
4. Papadimitriu C.H., Yannakakis M. *Optimization, approximation and complexity classes* // J. Comput. System Sciences. – 1991. – V. 43. – P. 425–440.
5. Sahni S., Gonzales T.P. *P-complete approximation problem* // J. Association for Computing Machinery. – 1976. – V. 23. – № 3. – P. 555–565.
6. Гимади Э.Х., Сердюков А.И. *Аксиальные трехиндексные задачи о назначении и коммивояжера: быстрые приближенные алгоритмы и их вероятностный анализ* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 12. – С. 19–25.

Институт математики Сибирского
отделения Российской Академии наук

Новосибирский государственный университет

Поступила
31.08.2000