ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 9 (460)

УДК 517.986

А.Р. МИРОТИН

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И НЕКОММУТАТИВНЫЙ ВАРИАНТ ТЕОРЕМЫ ПЭЛИ–ВИНЕРА

1. В [1] описан образ относительно преобразования Лапласа пространства $L^2(S)$, где S — конус в локально-компактной абелевой группе. В данной статье аналогичный результат устанавливается для подполугрупп неабелевых локально-компактных групп. Кроме того, преобразование Лапласа рассматривается и в некоторых алгебрах "растущих" функций. Как и в классическом случае, это дает более широкую область определения, чем у преобразования Фурье функций на такой полугруппе.

Всюду ниже G обозначает унимодулярную локально-компактную группу типа I (см., напр., [2]) с мерой Хаара ν, S — порождающую ее подполугруппу, имеющую внутренние точки. Через S_1^* будем обозначать множество всех неотрицательных ограниченных полухарактеров полугруппы S, т. е. непрерывных гомоморфизмов из S в мультипликативную полугруппу $[0,1]$, отличных от тождественно нулевого. Мы будем предполагать, что $S_1^* \neq \{1\}$ и что любой полухарактер $\rho \in S_1^*$ продолжается до (необходимо единственного) гомоморфизма $\rho : G \to (0;\infty)$. В [3] описан широкий класс полугрупп Ли, удовлетворяющих этим условиям. В частности, указанные условия выполнены, когда G есть разрешимая группа Ли, а S — ее подполугруппа Ли, инвариантная относительно внутренних автоморфизмов группы G. Далее $\widehat{G}$, как обычно, обозначает дуальное пространство группы G, μ — мера Планшереля на $\widehat{G}$ [2], [4]. Обозначим через $\widetilde{S}$ множество (классов) представлений полугруппы S вида $\rho\lambda$, где $\rho \in S_1^*$, $\lambda \in \widehat{G}$, и пусть $\widetilde{S}_0 = \widetilde{S} \setminus \widehat{G}$, $S_0^* = S_1^* \setminus \{1\}$. Положим также $S_c = \{x \in G : \rho(x) \leq 1 \ \forall \rho \in S_1^*\}$. Ясно, что S_c — замкнутая подполугруппа группы G с непустой внутренностью и $(S_c)_c = S_c$. Пространство S_1^* будем считать наделенным топологией поточечной сходимости на S_c. Обозначим через $L^p(S_c)$ пространство (классов) функций из $L^p(G)$, сосредоточенных на S_c, а через $L^1(S_c, \rho_0 d\nu)$ — пространство таких функций f, сосредоточенных на S_c, что $f\rho_0 \in L^1(G)$, где $\rho_0 \in S_1^*$.

Под сверткой функций f, g, сосредоточенных на S_c (если она существует), будем понимать функцию

$$f * g(x) = \int_G f(y)(L_y g)(x) d\nu(y) = \int_{S_c \cap x S_c^{-1}} f(y)(L_y g)(x) d\nu(y),$$

где $(L_y g)(x) = g(y^{-1}x)$.

2. Предложение 1. *Пространство $L^1(S_c, \rho_0 d\nu)$ со сверткой в качестве умножения есть банахова алгебра, содержащая $L^1(S_c)$ в качестве собственного подпространства, если $\rho_0 \neq 1$.*

Доказательство. Первое утверждение сразу следует из легко проверяемого равенства

$$(f\rho_0) * (g\rho_0) = (f * g)\rho_0. \tag{1}$$

Выберем точку $x_0 \in S$ так, что $0 < \rho_0(x_0) < 1$. Если группа G дискретна, то индикатор 1_A множества $A = \{x_0^n : n = 1, 2, \dots\}$ принадлежит $L^1(S_c, \rho_0 d\nu)$, но не принадлежит $L^1(S_c)$ (x_0 — элемент бесконечного порядка), и последнее утверждение доказано.

Пусть группа G не дискретна. Тогда ее мера Хаара непрерывна, и в силу ([5], (11.44)) для достаточно больших n существует такое ν-измеримое $A_n \subset x_0^n S$, что $\nu(A_n) = n\rho_0(x_0)^n$. Поэтому множество $A = \cup A_n$ имеет конечную ν-меру. С другой стороны, в силу неравенства $\rho_0(x) \leq \rho_0(x_0)^n$, справедливого при $x \in x_0^n S_c$, имеем

$$\int\limits_A \frac{1}{\rho_0} d\nu \geq \int\limits_{A_n} \frac{1}{\rho_0} d\nu \geq \frac{1}{\rho_0(x_0)^n} n\rho_0(x_0)^n = n,$$

т. е. функция $1_A/\rho_0$ принадлежит $L^1(S_c, \rho_0 d\nu)$, но не принадлежит $L^1(S_c)$. $\square$

При $\rho_0 \in S_1^*$ положим

$$\rho_0 \widetilde{S} = \{\rho\lambda : \lambda \in \widehat{G},\ \rho \in S_1^*,\ \rho \leq \rho_0\}.$$

Определение 1. Для функции $f \in L^1(S_c, \rho_0 d\nu)$ ее преобразование Лапласа определяется равенством ($\rho\lambda \in \rho_0 \widetilde{S}$)

$$(\mathcal{L}f)(\rho\lambda) = \mathcal{F}(f\rho)(\lambda), \tag{2}$$

где $\mathcal{F}$ есть L^1-преобразование Фурье на G.

Покажем, что $\mathcal{L}$ сохраняет основные аппаратные свойства классического преобразования Лапласа.

Предложение 2. *Пусть $f, g \in L^1(S_c, \rho_0 d\nu)$, $T_\lambda \in \lambda \in \widehat{G}$.*

1) *Оператор $\mathcal{L}$ на $L^1(S_c, \rho_0 d\nu)$ инъективен и справедлива формула обращения*

$$f(x) = \rho(x)^{-1} \int\limits_{\widehat{G}} \operatorname{tr}(\phi(\rho\lambda) T_\lambda^*(x)) d\mu(\lambda),$$

где $\phi(\rho\cdot) = \mathcal{L}f(\rho\cdot) \in L^1(\widehat{G}, \mu), \rho \leq \rho_0$.

2) $\mathcal{L}(L_y f)(\rho\lambda) = \rho(y) T_\lambda(y) \mathcal{L}f(\rho\lambda)$ $(y \in S_c)$.

3) $\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}f\mathcal{L}g$.

4) $\|(\mathcal{L}f)(\rho\lambda)\|_\lambda \to 0$ *равномерно по λ при $\rho \to \infty$ в S_1^*, где $\|\cdot\|_\lambda$ — норма оператора в пространстве H_λ представления λ.*

Доказательство. Свойство 1) сразу следует из определения 1 и соответствующих свойств преобразования Фурье на G.

2) Так как $\rho(y)(L_y \rho)(x) = \rho(x)$, то

$$\mathcal{L}(L_y f)(\rho\lambda) = \mathcal{F}((L_y f)\rho)(\lambda) = \rho(y)\mathcal{F}(L_y(f\rho))(\lambda) = \rho(y) T_\lambda(y) \mathcal{F}(f\rho)(\lambda) = \rho(y) T_\lambda(y) \mathcal{L}f(\rho\lambda).$$

Свойство 3) следует из (1) и теоремы о свертке для $\mathcal{F}$.

4) Заметим, что пространство $S_1^* \cup \{0\}$, наделенное топологией поточечной сходимости на S_c, есть замкнутое подпространство компакта $[0,1]^{S_c}$, а потому тождественно нулевая функция 0 есть бесконечно удаленная точка пространства S_1^*. Теперь оценка ($\rho\lambda \in \rho_0 \widetilde{S}$)

$$\|\mathcal{L}f(\rho\lambda)\|_\lambda = \left\| \int\limits_{S_c} f\rho T_\lambda d\nu \right\|_\lambda \leq \int\limits_{S_c} |f| \rho d\nu$$

и теорема Лебега о мажорированной сходимости показывают, что если $\rho \to \infty$ в S_1^* и $\rho \leq \rho_0$, то $\|\mathcal{L}f(\rho\lambda)\|_\lambda \to 0$, причем равномерно по λ. $\square$

3. В связи со следующим определением отметим, что для $\rho \in S_0^*$, $\lambda \in \widehat{G}$, вещественного τ и неотрицательного σ произведение $\rho^{\sigma + i\tau}\lambda \in \widetilde{S}_0$, т. к. $\rho^{i\tau} := e^{i\tau \ln\rho}$ есть одномерное унитарное представление (характер) группы G, причем пространство этого представления совпадает с пространством H_λ представления λ. Напомним также, что $L^2(\widehat{G}, \mu)$ есть прямой интеграл по мере μ гильбертовых пространств операторов Гильберта–Шмидта в H_λ и что преобразование Фурье $\mathcal{F}$ есть изометрический изоморфизм $L^2(G)$ на $L^2(\widehat{G}, \mu)$. Далее понадобится следующая лемма ($\mathcal{F}^{-1}$ обозначает обратное преобразование Фурье).

Лемма. *Для любых* $\Phi \in L^2(\widehat{G},\mu)$ *и одномерного представления* $\chi \in \widehat{G}$ *функция* $\Phi_\chi(\lambda) := \Phi(\chi\lambda)$ *также принадлежит* $L^2(\widehat{G},\mu)$ *и*

$$(\mathcal{F}^{-1}\Phi_\chi)(x) = \chi(x)(\mathcal{F}^{-1}\Phi)(x) \quad (x \in G).$$

Доказательство. Поскольку Фурье-образ пространства $L^1(G)\cap L^2(G)$ плотен в $L^2(\widehat{G},\mu)$, то достаточно рассмотреть случай, когда $\Phi = \mathcal{F}f$, $f \in L^1(G)\cap L^2(G)$. Тогда $\Phi_\chi(\lambda) = (\mathcal{F}f)(\chi\lambda) = \mathcal{F}(f\chi)(\lambda)$, а потому $\Phi_\chi \in L^2(\widehat{G},\mu)$. Далее, если $T_\lambda \in \lambda$, то, дважды применяя формулу обращения преобразования Фурье, имеем при $x \in G$

$$\mathcal{F}^{-1}(\Phi_\chi)(x) = \int\limits_{\widehat{G}} \mathrm{tr}(\mathcal{F}(f\chi)(\lambda)T^*_\lambda(x))d\mu(\lambda) = f(x)\chi(x) = \chi(x)(\mathcal{F}^{-1}\Phi)(x). \quad \square$$

Положим $\Pi = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\}$, $\Pi_o = \Pi \cup \{0\}$, $z = \sigma + i\tau$. Кроме того, через $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_2$ будем обозначать нормы в пространствах $L^2(\widehat{G},\mu)$ и $L^2(S_c)$ соответственно.

Определение 2. Пространство Харди $H^2(\widetilde{S}_0)$ есть множество всех (операторнозначных) функций ϕ на $\widetilde{S}_0$ таких, что

1) при $\rho \in S_0^*$ срез-функция $\phi(\rho\cdot)(\lambda) := \phi(\rho\lambda)$ принадлежит $L^2(\widehat{G},\mu)$ и

$$\|\phi\|_{H^2} := \sup\{\|\phi(\rho\cdot)\| : \rho \in S_0^*\} < \infty;$$

2) при $\rho, \rho_1 \in S_0^*$ отображение $z \mapsto \phi(\rho_1\rho^z\cdot) : \Pi_0 \to L^2(\widehat{G},\mu)$, где $\phi(\rho_1\rho^z\cdot)(\lambda) := \phi(\rho_1\rho^z\lambda)$, голоморфно в Π и непрерывно в $+0$.

Определение 3. Пусть $f \in L^2(S_c)$. Определим преобразование Лапласа $\mathcal{L}f$ формулой (2), где $\rho \in S_1^*, \lambda \in \widehat{G}, \mathcal{F} - L^2$-преобразование Фурье на G.

Теорема. *Если S и G удовлетворяют указанным выше условиям, то преобразование Лапласа $\mathcal{L}$ есть изометрический изоморфизм пространств $L^2(S_c)$ и $H^2(\widetilde{S}_0)$.*

Доказательство. При $f \in L^2(S_c)$, $\rho \in S_0^*$ в силу формулы Планшереля $(\mathcal{L}f)(\rho\cdot) \in L^2(\widehat{G},\mu)$ и

$$\|(\mathcal{L}f)(\rho\cdot)\| = \|\mathcal{F}(f\rho)\| = \|f\rho\|_2 \le \|f\|_2, \tag{3}$$

т. е. $\mathcal{L}f$ удовлетворяет условию 1) определения 2. Далее, поскольку отображение $\alpha : z \mapsto \rho_1\rho^z f : \Pi_0 \to L^2(S_c)$ голоморфно в Π и непрерывно в $+0$, то композиция $\mathcal{F}\circ\alpha$ также обладает этими свойствами. Для проверки выполнения условия 2) осталось доказать, что $(\mathcal{L}f)(\rho_1\rho^z\cdot) = (\mathcal{F}\circ\alpha)(z)$. Для этого выберем последовательность $f_n \in L^2(S_c)\cap L^1(G)$, сходящуюся к f в $L^2(S_c)$. Тогда, с одной стороны,

$$\mathcal{F}(f_n\rho_1\rho^\sigma)(\rho^{i\tau}\lambda) = \mathcal{F}(f_n\rho_1\rho^z)(\lambda) \to \mathcal{F}(f\rho_1\rho^z)(\lambda),$$

а с другой стороны,

$$\mathcal{F}(f_n\rho_1\rho^\sigma)(\rho^{i\tau}\lambda) \to \mathcal{F}(f\rho_1\rho^\sigma)(\rho^{i\tau}\lambda) = (\mathcal{L}f)(\rho_1\rho^z\lambda),$$

где стрелка обозначает сходимость в $L^2(\widehat{G},\mu)$.

Из (3) сразу следует, что $\|\mathcal{L}f\|_{H^2} \le \|f\|_2$. Но если $\rho_0 \in S_0^*$, то $\rho_0^{1/n} \to 1$ равномерно на компактных подмножествах S_c при $n \to \infty$. Поэтому

$$\|\mathcal{L}f\|_{H^2} = \sup\{\|\mathcal{F}(f\rho)\| : \rho \in S_0^*\} = \sup\{\|f\rho\|_2 : \rho \in S_0^*\} \ge \lim_{n\to\infty}\|f\rho_0^{1/n}\|_2 = \|f\|_2.$$

Таким образом, отображение $\mathcal{L}$ изометрично.

Осталось доказать сюръективность $\mathcal{L}$. Зафиксируем $\phi \in H^2(\widetilde{S}_0)$, компакт $C \subset G$ и рассмотрим отображение

$$\beta(z) = \rho_1^{-1}\rho^{-z}\mathcal{F}^{-1}\phi(\rho_1\rho^z\cdot)|_C : \Pi_0 \to L^2(G).$$

Тогда β голоморфно в Π и непрерывно в $+0$, поскольку этими свойствами обладают отображения $z \mapsto \phi(\rho_1\rho^z\cdot)$ и $z \mapsto \rho_1^{-1}\rho^{-z}|_C$ из Π_0 в $L^2(\widehat{G},\mu)$ и $L^2(G)$ соответственно. С другой стороны, т.к. $\phi(\rho_1\rho^z\cdot) = (\phi(\rho_1\rho^\sigma\cdot))_{i\tau}$, лемма дает

$$(\mathcal{F}^{-1}\phi(\rho_1\rho^z\cdot))(x) = \rho^{i\tau}(x)(\mathcal{F}^{-1}\phi(\rho_1\rho^\sigma\cdot))(x) \quad (x \in G).$$

Следовательно, голоморфная функция

$$\beta(z) = \rho_1^{-1}\rho^{-z}\rho^{i\tau}\mathcal{F}^{-1}\phi(\rho_1\rho^\sigma\cdot)|_C$$

не зависит от τ, поэтому $\beta = \mathrm{const}$ в Π. Тогда по непрерывности $\beta(0) = \beta(1)$, т.е. в силу произвольности C имеем

$$\rho_1^{-1}\mathcal{F}^{-1}\phi(\rho_1\cdot) = \rho_1^{-1}\rho^{-1}\mathcal{F}^{-1}\phi(\rho_1\rho\cdot).$$

Меняя здесь ρ и ρ_1 местами, получаем, что функция

$$f(x) := \rho(x)^{-1}(\mathcal{F}^{-1}\phi(\rho\cdot))(x)$$

не зависит от ρ, причем

$$f\rho = \mathcal{F}^{-1}\phi(\rho\cdot). \tag{4}$$

Покажем, что f равна нулю на $G \setminus S_c$. Если это не так, то найдется компакт $A \subset G \setminus S_c$ положительной ν-меры и число $b > 0$ такие, что $|f(x)| > b$ при $x \in A$. Для некоторого $x_0 \in A$ имеем $\nu(U \cap A) > 0$ для любой окрестности U точки x_0. Пусть $\rho \in S_0^*$ таков, что $\rho(x_0) > 1$ (см. определение S_c). Выберем окрестность U точки x_0 так, что $\rho(x) > k > 1$ при всех $x \in U$. Тогда для любого натурального n

$$\int\limits_G |f|^2\rho^{2n}d\nu \geq \int\limits_{A\cap U} |f|^2\rho^{2n}d\nu \geq b^2k^{2n}\nu(A\cap U),$$

что противоречит неравенству

$$\|f\rho\|_2 = \|\phi(\rho\cdot)\| \leq \|\phi\|_{H^2}, \tag{5}$$

вытекающему из (4).

Из (5) следует также, что $f \in L^2(G)$. В самом деле, если $f \notin L^2(G)$, то при некотором компактном $D \subset S_c$ имеем $\int\limits_D |f|^2d\nu \geq 2\|\phi\|_{H^2}$. Но тогда $\int\limits_D |f|^2\rho^2d\nu > \|\phi\|_{H^2}$ для $\rho \in S_0^*$ такого, что $\rho^2(x) > 2/3$ при $x \in D$ (такое ρ существует в силу отмеченной выше равномерной сходимости $\rho_0^{1/n} \to 1$), что невозможно ввиду (5).

Итак, $f \in L^2(S_c)$. Поскольку из (4) следует, что $\mathcal{L}f = \phi$, то оператор $\mathcal{L}$ сюръективен. $\square$

Следствие 1. Пространство $H^2(\widetilde{S}_0)$ гильбертово.

Следствие 2. Для $\phi \in H^2(\widetilde{S}_0)$ существует граничная функция $\phi^* \in L^2(\widehat{G},\mu)$ в том смысле, что $\phi(\rho\cdot) \to \phi^*$ в $L^2(\widehat{G},\mu)$ при $\rho \to 1$ равномерно на компактных подмножествах S_c. При этом $\phi = \mathcal{L}\mathcal{F}^{-1}\phi^*$, и отображение $\phi \mapsto \phi^*$ есть изометрический изоморфизм пространства $H^2(\widetilde{S}_0)$ на подпространство

$$H^2_S(\widehat{G}) := \{\Phi \in L^2(\widehat{G},\mu) : \mathcal{F}^{-1}\Phi = 0 \ \text{ на } \ G \setminus S_c\}$$

пространства $L^2(\widehat{G},\mu)$.

Доказательство. Пусть $\phi = \mathcal{L}f$, где $f \in L^2(S_c)$, $\rho \to 1$. Тогда $f\rho \to f$ в $L^2(G)$, поэтому $\phi(\rho\cdot) \to \mathcal{F}f =: \phi^* \in L^2(\widehat{G},\mu)$. Следовательно, $\phi^* \in H^2_S(\widehat{G}), \phi = \mathcal{L}f = \mathcal{L}\mathcal{F}^{-1}\phi^*$. Ясно, что $\|\phi\|_{H^2} = \|\phi^*\|$. Если $\Phi \in H^2_S(\widehat{G})$, $f := \mathcal{F}^{-1}\Phi$, то $f \in L^2(S_c)$ и $\Phi = \phi^*$, где $\phi := \mathcal{L}f$. $\square$

Автор благодарит Е.А. Горина за постановку задачи.

Литература

1. Миротин А.Р. *Теорема Пэли–Винера для конусов в локально-компактных абелевых группах* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 3. – С. 35–44.
2. Диксмье Ж. *C^*-алгебры и их представления.* – М.: Наука, 1974. – 399 с.
3. Mirotin A.R. *Positive semicharacters of Lie semigroups* // Positivity. – 1999. – V. 3. – № 1. – P. 23–31.
4. Кириллов А.А. *Элементы теории представлений.* – М.: Наука, 1978. – 343 с.
5. Хьюитт Э., Росс К. *Абстрактный гармонический анализ.* Т. 1. *Структура топологических групп. Теория интегрирования. Представления групп.* – М.: Наука, 1975. – 654 с.

Гомельский государственный университет
(*Беларусь*)

Поступила
15.06.1999