ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 12 (535)

УДК 519.626

А.Я. ЗОЛОТУХИН, Р.В. НАММ, А.В. ПАЧИНА

О ЛИНЕЙНОЙ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ С ИТЕРАТИВНОЙ ПРОКСИМАЛЬНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ

1. Введение

Известно, что при решении задач выпуклого программирования методом итеративной проксимальной регуляризации в общем случае не удается получить оценку скорости сходимости. Учет специфики минимизируемого функционала и допустимого множества в некоторых классах задач позволил оценить скорость сходимости указанного итеративного метода. В работе ([1], с. 885), в предположении единственности решения, установлена линейная скорость сходимости метода итеративной проксимальной регуляризации. В [2] обоснование линейной скорости сходимости проведено без предположения единственности решения, но в конечномерном случае, с привлечением так называемых функций качества ([2], с. 238). В данной работе рассматривается некоторая абстрактная схема, позволяющая обосновать линейную скорость сходимости метода с проксимальной регуляризацией при решении полукоэрцитивных вариационных неравенств механики, допускающих неединственность решения. Работа близка по содержанию к статье [3], но, в отличие от [3], регуляризация в работе проводится в норме более слабого пространства. При этом детально рассмотрено приложение к решению полукоэрцитивной контактной задачи теории упругости.

2. Абстрактная схема

Пусть V, H — гильбертовы пространства, причем $H \subset V$, H_1 — конечномерное подпространство в H, $Q_1 : H \to H_1$ — ортопроектор, $Q_2 = I - Q_1$, где I — тождественный оператор, $H_2 = Q_2 H$.

Предположим далее, что задан функционал $\gamma : H \to R$, обладающий свойством $\gamma(v) = \gamma_1(Q_1 v) + \gamma_2(Q_2 v)$, где $\gamma_1 : H_1 \to R$ — выпуклый функционал, а $\gamma_2 : H_2 \to R$ — сильно выпуклый функционал (с константой $\delta > 0$), т. е.

$$\gamma_2(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2) \le \lambda\gamma_2(v_1) + (1-\lambda)\gamma_2(v_2) - \delta\lambda(1-\lambda)\|v_1 - v_2\|_H^2, \quad 0 \le \lambda \le 1, \quad \forall v_1, v_2 \in H_2.$$

Обозначим через $(\cdot,\cdot)$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скалярные произведения в пространствах H и V соответственно. Введем в H новое скалярное произведение

$$((u,v)) \equiv \langle u,v\rangle + \delta(Q_2 u, Q_2 v) \tag{1}$$

и предположим, что соответствующая норма $|||\cdot|||_H = \sqrt{((\cdot))}$ эквивалентна норме $\|\cdot\|_H$.

Рассматривается экстремальная задача

$$\gamma(v) - \min, \quad v \in G, \tag{2}$$

где G — выпуклое замкнутое множество в H. В дальнейшем условимся, что запись $u = \arg\min\limits_{v\in G} F(v)$, где $u \in G$ и F — произвольный функционал на H, означает, что $F(u) = \min\limits_{v\in G} F(v)$. Для решения задачи (2) рассмотрим метод итеративной проксимальной регуляризации:

i) задаемся произвольным элементом $u^0 \in H$,

ii) обозначая $\overline{u}^{k+1} = \arg\min_{u\in G}\{\gamma(u) + \|u-u^k\|_V^2\}$, определяем u^{k+1} по критерию $\|u^{k+1} - \overline{u}^{k+1}\|_H \le \varepsilon_{k+1}$, где $\{\varepsilon_k\}$ — заданная последовательность положительных чисел.

В [4] исследуемый метод рассматривался для функционалов более общего вида. В ранних работах [3], [5] абстрактная схема строилась в одном гильбертовом пространстве H, хотя в конкретных приложениях естественно, наряду с пространством H, введение более слабого пространства V.

Пусть множество решений $G^* = \{v \in G : \gamma(v) = \inf_{w\in G}\gamma(w)\}$ непусто. Тогда, как показано в [4], последовательность $\{u^k\}$ сходится к некоторому элементу $u^* \in G^*$.

Обозначим $\partial\gamma(v)$ — субдифференциал выпуклого функционала γ в точке v, $\nabla\gamma(v)$ — произвольный элемент $\partial\gamma(v)$. На основании теоремы Рисса о представлении линейного непрерывного функционала в гильбертовых пространствах можно считать, что $\partial\gamma(v) \subset H \quad \forall v \in H$. Поскольку Q_i, $i = 1, 2$, — ортопроекторы, то $(Q_i u, v) = (u, Q_i v)$ для любых $u, v \in H$. Применяя теорему о субдифференциале суммы выпуклых функций и теорему о сложной функции [6], получаем

$$\partial\gamma(v) = Q_1\partial\gamma_1(Q_1 v) + Q_2\partial\gamma_2(Q_2 v). \qquad (3)$$

Следовательно, для любого $\nabla\gamma(v^k)$ существуют элементы $\nabla\gamma_1(Q_1v^k) \in \partial\gamma_1(Q_1v^k)$, $\nabla\gamma_2(Q_2v^k) \in \partial\gamma_2(Q_2v^k)$ такие, что $\nabla\gamma(v^k) = Q_1\nabla\gamma_1(Q_1v^k) + Q_2\nabla\gamma_2(Q_2v^k)$. Так как u^* — решение задачи (2), то существует $b^* \in \partial\gamma(u^*)$ такой, что $(b^*, v - u^*) \ge 0 \quad \forall v \in G$. Можно считать, что $b^* \ne 0$.

Обозначим $H_{b^*} = \{v \in H : (b^*, v) = 0\}$, $B = \{v \in H : \|v\| \le 1\}$.

Пусть $b_1^* \in \partial\gamma_1(Q_1u^*)$ и $b_2^* \in \partial\gamma_2(Q_2u^*)$ такие, что $b^* = Q_1b_1^* + Q_2b_2^*$. Кроме этого, относительно b_1^* примем следующие предположения.

Предположение 1. *Множество решений G^* задачи* (2) *представимо в виде*

$$G^* = (u^* + \widehat{R})\bigcap G,$$

где $\widehat{R} = \{v \in H_1 : (b_1^*, v) = 0\}$.

Нетрудно показать, что $\widehat{R} \subset H_{b^*}$.

Для любого $s \in B$ и произвольного фиксированного $\varkappa > 0$ рассмотрим множество

$$\mathbf{m}(u^*, s, \varkappa) = \{v \in H : v = u^* + \alpha(s + \varkappa\widetilde{s})\ \forall\widetilde{s} \in B,\ \forall\alpha > 0\}.$$

Предположение 2. *Если для некоторого $s \in \widehat{R}\bigcap B$ и $\forall\alpha > 0$ выполнено условие $u^* + \alpha s \notin G$, то существует $\varkappa = \varkappa(s) > 0$, для которого справедливо одно из условий*:

a) $\mathbf{m}(u^*, s, \varkappa(s))\bigcap G = 0$,

b) *в некоторой окрестности U_{u^*} решения u^* для любого $u \in \mathbf{m}(u^*, s, \varkappa(s))\bigcap G$ справедливо неравенство $\rho(u - u^*, H_{b^*}) \ge C^*\|u - u^*\|_H^2$ с константой $C^* > 0$ и окрестностью U_{u^*}, не зависящей от s, где $\rho(v, X) = \inf_{z\in X}\|v - z\|_H$.*

Теорема. *Пусть предположения 1 и 2 выполнены и при $q \in (0, 1)$, выбранном соответствующим образом, для всех k выполнено неравенство $\varepsilon_k \le q^k$. Тогда последовательность $\{u^k\}$, вырабатываемая в методе итерационной проксимальной регуляризации, сходится к некоторому решению $u^* \in G^*$ с линейной скоростью, т. е. $\exists\widehat{q} \in (0, 1)$ такой, что $\|u^k - u^*\|_H \le C_0\widehat{q}^k$, $C_0 > 0$ — const, $k = 1, 2, \ldots$*

Доказательство. Известно [4], что последовательность $\{u^k\}$ сходится к некоторому элементу $u^* \in G^*$. Остается получить оценку скорости сходимости. Так как $\overline{u}^k$ — точка минимума функционала ψ_k на множестве G, то из теоремы о субдифференциале суммы выпуклых функций [6] вытекает существование такого элемента $b \in \partial\gamma(\overline{u}^k)$, что

$$0 \le (b, w - \overline{u}^k) + 2\langle\overline{u}^k - u^{k-1}, w - \overline{u}^k\rangle \quad \forall w \in G. \qquad (4)$$

Из (3) следует, что для всех $v, w \in H$

$$(\nabla\gamma(v), w-v) = (Q_1\nabla\gamma_1(Q_1 v) + Q_2\nabla\gamma_2(v), w-v) = \\ = (\nabla\gamma_1(v), Q_1(w-v)) + (\nabla\gamma_2(Q_2 v), Q_2(w-v)).$$

Поэтому с учетом выпуклости γ_1 в H_1 и сильной выпуклости γ_2 в H_2 имеем

$$\gamma(w) - \gamma(v) \geq (\nabla\gamma(v), w-v) + \delta\|Q_2(w-v)\|_H^2. \tag{5}$$

Пусть $\widehat{u} \in G^*$ — произвольное решение задачи (2). Тогда с учетом (4) получаем $2\langle\overline{u}^k - u^{k-1}, \widehat{u} - \overline{u}^k\rangle \geq (b, \overline{u}^k - \widehat{u})$. Из выпуклости γ следует $2\langle\overline{u}^k - u^{k-1}, \widehat{u} - \overline{u}^k\rangle \geq \gamma(\overline{u}^k) - \gamma(\widehat{u})$. По теореме косинусов имеем

$$2\langle\overline{u}^k - u^{k-1}, \widehat{u} - \overline{u}^k\rangle = \|\widehat{u} - u^{k-1}\|_V^2 - \|\widehat{u} - \overline{u}^k\|_V^2 - \|u^{k-1} - \overline{u}^k\|_V^2.$$

Тем самым $\|\widehat{u} - u^{k-1}\|_V^2 - \|\widehat{u} - \overline{u}^k\|_V^2 - \|u^{k-1} - \overline{u}^k\|_V^2 \geq \gamma(\overline{u}^k) - \gamma(\widehat{u})$.

Из (5) вытекает существование $\widehat{b} \in \partial\gamma(\widehat{u})$ такого, что

$$\gamma(\overline{u}^k) - \gamma(\widehat{u}) \geq (\widehat{b}, \overline{u}^k - \widehat{u}) + \delta\|Q_2(\overline{u}^k - \widehat{u})\|_H^2 \geq \delta\|Q_2(\overline{u}^k - \widehat{u})\|_H^2.$$

Поэтому

$$\|\widehat{u} - \overline{u}^k\|_V^2 + \|u^{k-1} - \overline{u}^k\|_V^2 + \delta\|Q_2(\overline{u}^k - \widehat{u})\|_H^2 \leq \|\widehat{u} - u^{k-1}\|_V^2. \tag{6}$$

С учетом (1) неравенство (6) дает $|||\widehat{u} - \overline{u}^k|||_H^2 \leq |||\widehat{u} - u^{k-1}|||_H^2$.

Поскольку

$$|||\widehat{u} - \overline{u}^k|||_H = |||\widehat{u} - u^k + u^k - \overline{u}^k|||_H \geq |||\widehat{u} - u^k|||_H - |||u^k - \overline{u}^k|||_H \geq |||\widehat{u} - u^k|||_H - C\varepsilon_k,$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная, то

$$|||\widehat{u} - u^k|||_H \leq |||\widehat{u} - u^{k-1}|||_H + C\varepsilon_k \leq |||\widehat{u} - u^{k-2}|||_H + C(\varepsilon_k + \varepsilon_{k-1}) \leq \\ \leq \cdots \leq |||\widehat{u} - u^0|||_H + C\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k.$$

Так как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k$ сходится, то последовательность $\{u^k\}$ ограничена в H. Тогда в H ограничена и последовательность $\{\overline{u}^k\}$. Кроме того,

$$|||u^k - \widehat{u}|||_H^2 = |||u^k - \overline{u}^k + \overline{u}^k - \widehat{u}|||_H^2 \leq (|||u^k - \overline{u}^k|||_H + |||\overline{u}^k - \widehat{u}|||_H)^2 \leq \\ \leq (C\varepsilon_k + |||\overline{u}^k - \widehat{u}|||_H)^2 = C^2\varepsilon_k^2 + 2C\varepsilon_k|||\overline{u}^k - \widehat{u}|||_H + |||\widehat{u} - u^{k-1}|||_H^2.$$

Отсюда следует

$$|||u^{k+m} - \widehat{u}|||_H^2 \leq C^2\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_{k+i}^2 + 2C\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_{k+i}|||\overline{u}^{k+i} - \widehat{u}|||_H + |||\widehat{u} - u^{k-1}|||_H^2. \tag{7}$$

Ввиду ограниченности $\{\overline{u}^k\}$ получаем $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\varepsilon_{k+i}|||\overline{u}^{k+i} - \widehat{u}|||_H < \infty$.

Теперь рассмотрим числовую функцию

$$\eta(\tau) = \tau\gamma(u^*) + (1-\tau)\gamma(u^{k-1}) + \tau^2\|u^* - u^{k-1}\|_V^2 \quad \forall\tau \in [0,1].$$

Обозначим $\tau_{k-1} = \arg\min\limits_{\tau\in[0,1]}\eta(\tau)$. Легко показать, что

$$\tau_{k-1} = \min\left\{1, \frac{\gamma(u^{k-1}) - \gamma(u^*)}{2\|u^* - u^{k-1}\|_V^2}\right\}.$$

Если $\tau_{k-1}=1$, то $\frac{\gamma(u^{k-1})-\gamma(u^*)}{2\|u^*-u^{k-1}\|_V^2}\geq 1$, откуда $\|u^*-u^{k-1}\|_V^2\leq\frac{\gamma(u^{k-1})-\gamma(u^*)}{2}$. Поэтому

$$\eta(\tau_{k-1})=\gamma(u^*)+\|u^*-u^{k-1}\|_V^2\leq\gamma(u^*)+\frac{\gamma(u^{k-1})-\gamma(u^*)}{2}=\frac{\gamma(u^*)+\gamma(u^{k-1})}{2}.$$

Если $\tau_{k-1}=\frac{\gamma(u^{k-1})-\gamma(u^*)}{2\|u^*-u^{k-1}\|_V^2}$, то $\eta(\tau_{k-1})=\gamma(u^{k-1})-\frac{(\gamma(u^{k-1})-\gamma(u^*))^2}{4\|u^*-u^{k-1}\|_V^2}$. Поскольку $\{u^k\}$ и $\{\overline{u}^k\}$ — ограниченные последовательности, то [6] существует такая постоянная C_1, что $\gamma(u^k)-\gamma(\overline{u}_k)\leq C_1\|u^k-\overline{u}^k\|$, $k=1,2,\dots$ Далее

$$\begin{aligned}\|u^k-u^{k-1}\|_V^2-\|\overline{u}^k-u^{k-1}\|_V^2&=\|u^k-\overline{u}^k+\overline{u}^k-u^{k-1}\|_V^2-\|\overline{u}^k-u^{k-1}\|_V^2=\\&=\|u^k-\overline{u}^k\|_V^2+2\langle u^k-\overline{u}^k,\overline{u}^k-u^{k-1}\rangle+\|\overline{u}^k-u^{k-1}\|_V^2-\|\overline{u}^k-u^{k-1}\|_V^2\leq\\&\leq C_2\|u^k-\overline{u}^k\|_H^2+C_3\|u^k-\overline{u}^k\|_H\leq C_2\varepsilon_k^2+C_3\varepsilon_k\leq C_4\varepsilon_k,\end{aligned}$$

где $C_i>0$ — const, $i=2,3,4$. Следовательно,

$$\gamma(u^k)+\|u^k-u^{k-1}\|_V^2\leq\gamma(\overline{u}^k)+\|\overline{u}^k-u^{k-1}\|_V^2+\widetilde{C}\varepsilon_k,\quad\text{где}\quad\widetilde{C}=C_1+C_4,$$

откуда $\gamma(u^k)+\|u^k-u^{k-1}\|_V^2\leq\gamma(v)+\|v-u^{k-1}\|_V^2+\widetilde{C}\varepsilon_k\quad\forall v\in G$.

Положим $v=u^{k-1}+\tau(u^*-u^{k-1})$, $\tau\in[0,1]$. Тогда

$$\gamma(u^k)+\|u^k-u^{k-1}\|_V^2\leq\tau\gamma(u^*)+(1-\tau)\gamma(u^{k-1})+\tau^2\|u^*-u^{k-1}\|_V^2+\widetilde{C}\varepsilon_k=\eta(\tau)+\widetilde{C}\varepsilon_k$$

для всех $\tau\in[0,1]$. Поэтому, если $\tau_{k-1}=1$, то $\gamma(u^k)\leq\eta(\tau_{k-1})+\widetilde{C}\varepsilon_k\leq\frac{\gamma(u^{k-1})+\gamma(u^*)}{2}+\widetilde{C}\varepsilon_k$,

$$\gamma(u^k)-\gamma(u^*)\leq\frac{1}{2}(\gamma(u^{k-1})-\gamma(u^*))+\widetilde{C}\varepsilon_k.\tag{8}$$

Если $\tau_{k-1}=\frac{\gamma(u^{k-1})-\gamma(u^*)}{2\|u^*-u^{k-1}\|_V^2}$, то

$$\gamma(u^k)\leq\eta(\tau_{k-1})+\widetilde{C}\varepsilon_k=\gamma(u^{k-1})-\frac{(\gamma(u^{k-1})-\gamma(u^*))^2}{4\|u^*-u^{k-1}\|_V^2}+\widetilde{C}\varepsilon_k,$$

$$\gamma(u^k)-\gamma(u^*)\leq\left(1-\frac{\gamma(u^{k-1})-\gamma(u^*)}{4\|u^*-u^{k-1}\|_V^2}\right)(\gamma(u^{k-1})-\gamma(u^*))+\widetilde{C}\varepsilon_k.\tag{9}$$

Допустим, что существует бесконечно убывающая геометрическая прогрессия q_0^n, $n=1,2,\dots$, $q_0\in(0,1)$, такая, что $\varepsilon_k\leq q_0^k$, $k=1,2,\dots$

С учетом (7) введем следующие обозначения: $S_n=C^2\sum\limits_{k=1}^n\varepsilon_k^2+2C\sum\limits_{k=1}^n\varepsilon_k$, $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$. Тогда

$$S-S_n=C^2\sum_{k=n+1}^\infty\varepsilon_k^2+2C\sum_{k=n+1}^\infty\varepsilon_k\leq C^2\frac{q_0^{2(n+1)}}{(1-q_0)^2}+2C\frac{q_0^{n+1}}{1-q_0}\leq\frac{(C^2+2C)q_0}{1-q_0}q_0^n.$$

Напомним, что $\widehat{R}=\{v\in H_1:(b_1^*,v)=0\}\subset H_1$. Обозначим $\widehat{R}^\perp$ – ортогональное дополнение $\widehat{R}$ в H_1 относительно скалярного произведения $(\cdot,\cdot)$, $H_1^\perp$ — ортогональное дополнение H_1 относительно $(\cdot,\cdot)$. Тогда $H=\widehat{R}\oplus\widehat{R}^\perp\oplus H_1^\perp$.

Можно считать, что $u^k\neq u^*$, $k=1,2,\dots$ Представим разность $u^k-u^*=(\alpha_1^ks_1^k+\alpha_2^ks_2^k+\alpha_3^ks_3^k)\|u^k-u^*\|_H$, где $s_1^k\in\widehat{R}$, $s_2^k\in\widehat{R}^\perp$, $s_3^k\in H_1^\perp$; $\|s_i^k\|_H=1$, $i=1,2,3$, $\sum\limits_{i=1}^3(\alpha_i^k)^2=1$. С учетом того, что $\widehat{R}^\perp$ — одномерное множество (как коядро линейного ограниченного функционала $l(v)=(b_1^*,v)\quad\forall v\in H_1$), вместо s_2^k будем писать s_2. Для определенности положим

$$(b_1^*,s_2)>0.\tag{10}$$

Поскольку норма $\|\cdot\|_H$ эквивалентна $|||\cdot|||_H$, то существуют положительные константы $\widehat{C}$, $\widehat{\widehat{C}}$ такие, что $\widehat{C}|||v|||_H^2\leq\|v\|_H^2\leq\widehat{\widehat{C}}|||v|||_H^2\quad\forall v\in H$.

Теорема будет доказана, если

$$|||u^n - u^*|||_H^2 \le \theta q_0^n, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \theta = \left\{ \frac{2(C^2 + 2C)q_0}{\widehat{C}|||\widehat{s_1}|||_H^2 (1 - q_0)} \right\}.$$

Предположим противное. Пусть существуют такие номера n_j, для которых $|||u^{n_j} - u^*|||_H^2 > \theta q_0^{n_j}$, $j = 1, 2, \ldots$ Если количество таких n_j конечно, то существует такое положительное число C^{**}, что $|||u^n - u^*|||_H^2 \le C^{**} q_0^n$, $n = 1, 2, \ldots$

Предположим теперь, что последовательность номеров $\{n_j\}$, для которых $|||u^{n_j} - u^*|||_H^2 > \theta q_0^{n_j}$, $j = 1, 2, \ldots$, бесконечна. Отсюда следует

$$\frac{\widehat{C}|||\widehat{s_1}|||_H^2}{2} |||u^{n_j} - u^*|||_H^2 > C^2 \sum_{k=n_j+1}^{\infty} \varepsilon_k^2 + 2C \sum_{k=n_j+1}^{\infty} \varepsilon_k. \tag{11}$$

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_m, \ldots$ — предельные точки компактной последовательности $\{\alpha_1^k s_1^k\}$, причем такие, что $u^* + \alpha y_i \notin G \quad \forall \alpha > 0$. Обозначим $x_i = y_i / \|y_i\|_H$, $i = 1, 2, \ldots$ Очевидно, $x_i \in \widehat{R}$, $i = 1, 2, \ldots$

Среди элементов указанной выше последовательности $\{u^{n_j}\}$ выберем точки, не принадлежащие множествам $\mathbf{m}(u^*, x_i, \varkappa(x_i))$, $i = 1, 2, \ldots$, т.е. построим такую последовательность $\{u^{n_{j_k}}\}$, что $u^{n_{j_k}} \notin \bigcup\limits_i \mathbf{m}(u^*, x_i, \varkappa(x_i))$.

Лемма 1. *Существует константа $\alpha^* > 0$, для которой*

$$(\alpha_2^{n_{j_k}})^2 + (\alpha_3^{n_{j_k}})^2 \ge \alpha^*, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Доказательство. Предположим противное. Если для некоторого номера $\widehat{n_{j_k}}$ справедливо равенство $(\alpha_2^{\widehat{n_{j_k}}})^2 + (\alpha_3^{\widehat{n_{j_k}}})^2 = 0$, то $\gamma(u^{\widehat{n_{j_k}}}) = \gamma(u^*)$, $u^* = u^{\widehat{n_{j_k}}}$, и поэтому теорема будет доказана.

Исключая этот случай, положим $(\alpha_2^{n_{j_k}})^2 + (\alpha_3^{n_{j_k}})^2 \ne 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и согласно предположению выберем сходящуюся к нулю подпоследовательность. Не нарушая общности, считаем $\lim\limits_{k\to\infty} [(\alpha_2^{n_{j_k}})^2 + (\alpha_3^{n_{j_k}})^2] = 0$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} (\alpha_1^{n_{j_k}})^2 = 1$. Для упрощения обозначений пусть последовательность $\{\alpha_1^{n_{j_k}} s_1^{n_{j_k}}\}$ имеет только одну предельную точку $\widehat{s_1}$, т.е. $\widehat{s_1} = \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_1^{n_{j_k}} s_1^{n_{j_k}}$. Тем самым $\widehat{s_1} \in \widehat{R}$.

Для $\widehat{s_1}$ возможны следующие два случая:

1) для любого $\alpha > 0$ справедливо условие $u^* + \alpha \widehat{s_1} \notin G$,

2) существует некоторое $\alpha_0 > 0$, для которого $u^* + \alpha_0 \widehat{s_1} \in G$.

Для случая 1) будем использовать предположение 2. Имеем

$$u^{n_{j_k}} = u^* + \|u^{n_{j_k}} - u^*\|_H [\widehat{s_1} + (\alpha_1^{n_{j_k}} s_1^{n_{j_k}} - \widehat{s_1}) + \alpha_2^{n_{j_k}} s_2^{n_{j_k}} + \alpha_3^{n_{j_k}} s_3^{n_{j_k}}].$$

Так как $\alpha_2^{n_{j_k}} \to 0$, $\alpha_3^{n_{j_k}} \to 0$ при $k \to \infty$, то

$$\lim_{k\to\infty} [(\alpha_1^{n_{j_k}} s_1^{n_{j_k}} - \widehat{s_1}) + \alpha_2^{n_{j_k}} s_2 + \alpha_3^{n_{j_k}} s_3^{n_{j_k}}] = 0. \tag{12}$$

Положим $\alpha = \|u^{n_{j_k}} - u^*\|_H$. Из (12) следует, что элементы $u^{n_{j_k}}$ должны принадлежать множествам $\mathbf{m}(u^*, \widehat{s_1}, \varkappa)$ при достаточно малом $\varkappa$ и достаточно больших номерах k. Но это невозможно, поскольку $u^{n_{j_k}} \notin \bigcup\limits_i \mathbf{m}(u^*, x_i, \varkappa(x_i))$. Полученное противоречие исключает случай 1).

Рассмотрим теперь случай 2). Зафиксируем номер n_{j_k}, для которого $\|u^{n_{j_k}-1} - u^*\|_H \le \alpha_0$ и обозначим $\widehat{u}^{n_{j_k}-1} = u^* + \|u^{n_{j_k}-1} - u^*\|_H \widehat{s_1} \in G^*$, $\widehat{p}^{n_{j_k}-1} = (\alpha_1^{n_{j_k}-1} s_1^{n_{j_k}-1} - \widehat{s_1}) + \alpha_2^{n_{j_k}-1} s_2 + \alpha_3^{n_{j_k}-1} s_3^{n_{j_k}-1}$. Имеем

$$u^{n_{j_k}-1} - \widehat{u}^k = u^* + \|u^{n_{j_k}-1} - u^*\|_H (\alpha_1^{n_{j_k}-1} s_1^{n_{j_k}-1} + \alpha_2^{n_{j_k}-1} s_2 + \alpha_3^{n_{j_k}-1} s_3^{n_{j_k}-1}) - \\ - u^* - \|u^{n_{j_k}-1} - u^*\|_H \widehat{s_1} = \|u^{n_{j_k}} - u^*\|_H \widehat{p}^{n_{j_k}-1}. \tag{13}$$

Из (12) следует, что существует такой номер N_1, что при $n_{j_k} \geq N_1$ справедливо условие

$$|||\widehat{p}^{n_{j_k}-1}|||_H^2 < \frac{\widehat{C}|||s_1|||_H^2}{4\widehat{\widehat{C}}}. \tag{14}$$

Так как $\widehat{u}^{n_{j_k}-1} - u^* = \|u^{n_{j_k}-1} - u^*\|_H \widehat{s}_1$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \widehat{u}^{n_{j_k}-1} = u^*$. Кроме того, существует такой номер N_2, что при $n_{j_k} \geq N_2$ и $m \geq N_2$ выполняется неравенство

$$|||\overline{u}^m - \widehat{u}^{n_{j_k}-1}|||_H < 1. \tag{15}$$

Пусть $N = \max\{N_1, N_2\}$ и предположим, что зафиксированный указанным выше способом номер n_{j_k} больше, чем N. Тогда неравенства (14) и (15) выполнены.

Из (13) и (14) следует

$$|||u^{n_{j_k}-1} - \widehat{u}^{n_{j_k}-1}|||_H^2 = \|u^{n_{j_k}-1} - u^*\|_H^2 |||\widehat{p}^{n_{j_k}-1}|||_H^2 <$$
$$< \widehat{\widehat{C}}\|u^{n_{j_k}-1} - u^*\|_H^2 \frac{\widehat{C}|||s_1|||_H^2}{4\widehat{\widehat{C}}} = \frac{\widehat{C}|||s_1|||_H^2}{4}\|u^{n_{j_k}-1} - u^*\|_H^2. \tag{16}$$

С другой стороны,

$$u^{n_{j_{k+l}}} = u^* + (u^{n_{j_{k+l}}} - u^*) = \widehat{u}^{n_{j_k}-1} + (u^* - \widehat{u}^{n_{j_k}-1}) + (u^{n_{j_{k+l}}} - u^*) =$$
$$= \widehat{u}^{n_{j_k}-1} - \widehat{s}_1\|u^{n_{j_k}-1} - u^*\|_H + (u^{n_{j_{k+l}}} - u^*),$$
$$|||u^{n_{j_{k+l}}} - \widehat{u}^{n_{j_k}-1}|||_H^2 = \|u^{n_{j_k}-1} - u^*\|_H^2 |||\widehat{s}_1|||_H^2 - 2\|u^{n_{j_k}-1} - u^*\|_H((\widehat{s}_1, u^{n_{j_{k+l}}} - u^*)) +$$
$$+|||u^{n_{j_{k+l}}} - u^*|||_H^2 \geq \widehat{C}|||\widehat{s}_1|||_H^2 |||u^{n_{j_k}-1} - u^*|||_H^2 - 2\|u^{n_{j_k}-1} - u^*\|_H((\widehat{s}_1, u^{n_{j_{k+l}}} - u^*)) +$$
$$+|||u^{n_{j_{k+l}}} - u^*|||_H^2.$$

Поэтому при достаточно большом l

$$|||u^{n_{j_{k+l}}} - u^{n_{j_k}-1}|||_H^2 > \frac{3\widehat{C}|||\widehat{s}_1|||_H^2}{4}|||u^{n_{j_k}-1} - u^*|||_H^2.$$

Из (11), (15), (16) непосредственно следует

$$|||u^{n_{j_{k+l}}} - \widehat{u}^{n_{j_k}-1}|||_H > C^2\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon^2_{n_{j_k+i}} + 2C\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_{n_{j_k+i}}|||\overline{u}^{k+i} - u^{n_{j_k}-1}|||_H + |||\widehat{u}^{n_{j_k}-1} - u^{n_{j_k}-1}|||_H^2,$$

что не согласуется с (7). Полученное противоречие завершает доказательство. □

Лемма 2. *Существует некоторая константа* $\beta > 0$, *для которой*

$$\gamma(u^{n_j}) - \gamma(u^*) \geq \beta\|u^{n_j} - u^*\|_H^2, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Доказательство. Для любой точки u^{n_j}, не принадлежащей выделенной ранее последовательности $\{u^{n_{j_k}}\}$, существует по крайней мере одно множество $\mathbf{m}(u^*, x_i, \varkappa(x_i))$ такое, что $u^{n_j} \in \mathbf{m}(u^*, x_i, \varkappa(x_i))$, и на основании предположения 2 при достаточно больших номерах j имеем

$$\gamma(u^{n_j}) - \gamma(u^*) \geq (b^*, u^{n_j} - u^*) = \|b^*\|_H \rho(u^{n_j} - u^*, H_{b^*}) \geq \|b^*\|_H C^* \|u^{n_j} - u^*\|_H^2.$$

Поэтому для таких точек можем положить $\beta = C^*\|b^*\|_H$. Тогда остается учесть только точки последовательности $\{u^{n_{j_k}}\}$. Из (5) вытекает

$$\gamma(u^{n_{j_k}}) - \gamma(u^*) \geq (b^*, u^{n_{j_k}} - u^*) + \delta\|Q_2(u^{n_{j_k}} - u^*)\|_H^2 = (Q_1 b_1^* + Q_2 b_2^*, u^{n_{j_k}} - u^*) + \delta\|Q_2(u^{n_{j_k}} - u^*)\|_H^2.$$

Как и выше, разложим $(u^{n_{j_k}} - u^*)$ по ортогональным составляющим

$$u^{n_{j_k}} - u^* = \|u^{n_{j_k}} - u^*\|_H(\alpha_1^{n_{j_k}} s_1^{n_{j_k}} + \alpha_2^{n_{j_k}} s_2 + \alpha_3^{n_{j_k}} s_3^{n_{j_k}}).$$

Нетрудно показать, что

$$\gamma(u^{n_{j_k}})-\gamma(u^*)\geq[\alpha_2^{n_{j_k}}(b_1^*,s_2)+\alpha_3^{n_{j_k}}(b_2^*,s_3^{n_{j_k}})]\|u^{n_{j_k}}-u^*\|_H+\delta(\alpha_3^{n_{j_k}})^2\|u^{n_{j_k}}-u^*\|_H^2. \quad (17)$$

Так как $[\alpha_2^{n_{j_k}}(b_1^*,s_2)+\alpha_3^{n_{j_k}}(b_2^*,s_3^{n_{j_k}})]\|u^{n_{j_k}}-u^*\|_H=(b^*,u^{n_{j_k}}-u^*)\geq 0$, то

$$\alpha_2^{n_{j_k}}(b_1^*,s_2)+\alpha_3^{n_{j_k}}(b_2^*,s_3^{n_{j_k}})\geq 0 \quad (18)$$

и при этом $(b_1^*,s_2)>0$ согласно (10).

Обозначим $\alpha_{23}^{n_{j_k}}=(\alpha_2^{n_{j_k}})^2+(\alpha_3^{n_{j_k}})^2$. По лемме 1 существует $\alpha^*>0$, для которого при любом k имеет место неравенство $\alpha_{23}^{n_{j_k}}>\alpha^*>0$.

Если $\alpha_2^{n_{j_k}}<0$, то из (18) следует

$$-(\alpha_{23}^{n_{j_k}}-(\alpha_3^{n_{j_k}})^2)^{1/2}(b_1^*,s_2)+\alpha_3^{n_{j_k}}(b_2^*,s_3^{n_{j_k}})\geq 0,$$

$$(\alpha_3^{n_{j_k}})^2\geq\frac{\alpha_{23}^{n_{j_k}}(b_1^*,s_2)^2}{(b_2^*,s_3^{n_{j_k}})^2+(b_1^*,s_2)^2}\geq\frac{\alpha^*(b_1^*,s_2)^2}{\|b_2^*\|_H^2+(b_1^*,s_2)^2}.$$

В силу (17) для случая $\alpha_2^{n_{j_k}}<0$ можно взять

$$\beta=\frac{\delta\alpha^*}{\|b_2^*\|_H^2+(b_1^*,s_2)^2}.$$

Для другого возможного случая имеем $\alpha_2^{n_{j_k}}\geq 0$ и

$$\alpha_2^{n_{j_k}}(b_1^*,s_2)+\alpha_3^{n_{j_k}}(b_2^*,s_3^{n_{j_k}})\geq\alpha_2^{n_{j_k}}(b_1^*,s_2)-|\alpha_3^{n_{j_k}}|\|b_2^*\|_H=(\alpha_{23}^{n_{j_k}}-(\alpha_3^{n_{j_k}})^2)^{1/2}(b_1^*,s_2)-|\alpha_3^{n_{j_k}}|\|b_2^*\|_H.$$

Из (7) вытекает

$$|||u^{k+m}-u^*|||_H^2\leq|||u^{k-1}-u^*|||_H^2+C^2\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_{k+i}^2+2C\sum_{i=1}^{\infty}\varepsilon_{k+i}|||\overline{u}^{k+i}-u^*|||_H\quad\forall k,m.$$

При $k=1$ получим

$$|||u^{m+1}-u^*|||_H^2\leq|||u^0-u^*|||_H^2+L\leq L_1|||u^0-u^*|||_H^2\quad\forall m, \quad (19)$$

где L, L_1 — некоторые положительные константы.

Обозначим $\xi=\|b_2^*\|_H$, $\eta=L_1^{1/2}|||u^0-u^*|||_H$, $\tau=(b_1^*,s_2)$. Зафиксируем произвольное $\varepsilon>0$ и решим приведенное ниже неравенство относительно переменной $\alpha_3^{n_{j_k}}$:

$$(\alpha_{23}^{n_{j_k}}-(\alpha_3^{n_{j_k}})^2)^{1/2}\tau-|\alpha_3^{n_{j_k}}|\xi\geq\varepsilon\eta,$$

$$0\leq|\alpha_3^{n_{j_k}}|\leq\frac{-\xi\varepsilon\eta+\tau(\alpha_{23}^{n_{j_k}}(\tau^2+\xi^2)-\varepsilon^2\eta^2)^{1/2}}{\tau^2+\xi^2}\equiv\widehat{\varkappa}.$$

Определим те $\varepsilon>0$, при которых $\widehat{\varkappa}>0$:

$$0<-\xi\varepsilon\eta+\tau(\alpha_{23}^{n_{j_k}}(\tau^2+\xi^2)-\varepsilon^2\eta^2)^{1/2},$$

$$\varepsilon<\frac{(\alpha_{23}^{n_{j_k}})^{1/2}\tau}{\eta}.$$

Если $|\alpha_{23}^{n_{j_k}}|\leq\widehat{\varkappa}$, то из (17) и (19) следует

$$\gamma(u^{n_{j_k}})-\gamma(u^*)\geq\varepsilon\eta\|u^{n_{j_k}}-u^*\|_H=\varepsilon L_1^{1/2}|||u^0-u^*|||_H\|u^{n_{j_k}}-u^*\|_H\geq$$

$$\geq\varepsilon L_1^{1/2}|||u^0-u^*|||_H\widehat{C}^{1/2}|||u^{n_{j_k}}-u^*|||_H\geq\frac{\varepsilon\widehat{C}^{1/2}}{\widehat{\widehat{C}}}\|u^{n_{j_k}}-u^*\|_H^2.$$

Если $|\alpha_{23}^{n_{j_k}}| > \widehat{\varkappa}$, то из (17) имеем $\gamma(u^{n_{j_k}}) - \gamma(u^*) > \delta\widehat{\varkappa}^2\|u^{n_{j_k}} - u^*\|_H^2$. Поэтому при $\alpha_2^{n_{j_k}} \geq 0$, выбирая $\alpha_{23}^{n_{j_k}}$ так, чтобы $\alpha_{23}^{n_{j_k}} \geq \alpha^*$, получаем

$$\beta = \sup_{0<\varepsilon<\frac{(\alpha^*)^{1/2}\tau}{\eta}} \min\left\{\frac{\varepsilon\widehat{C}^{1/2}}{\widehat{\widehat{C}}}, \delta\left(\frac{-\xi\varepsilon\eta + \tau(\alpha^*(\tau^2+\xi^2) - \varepsilon^2\eta^2)^{1/2}}{\tau^2+\xi^2}\right)^2\right\} \equiv T.$$

Объединяя этот результат со случаем $\alpha_2^{n_{j_k}} < 0$, окончательно получаем

$$\beta = \min\left\{\frac{\alpha^*\tau^2}{\tau^2+\xi^2}\delta, T\right\}. \quad \square$$

Продолжим теперь доказательство теоремы. Дальнейшие рассуждения основаны на неравенствах (8) и (9). Напоминаем, что $\varepsilon_k \leq q_0$ для любого k.

Зафиксируем произвольный номер m. Если $(m-1)$ принадлежит последовательности $\{n_j\}$, то из леммы 2 следует $\gamma(u^{m-1}) - \gamma(u^*) \geq \beta\|u^{m-1} - u^*\|_H^2$. Поэтому, если на m-м шаге имеем формулу (9), то

$$\begin{aligned}
\gamma(u^m) - \gamma(u^*) &\leq \left(1 - \frac{\gamma(u^{m-1}) - \gamma(u^*)}{4\|u^* - u^{m-1}\|_V^2}\right)(\gamma(u^{m-1}) - \gamma(u^*)) + \widetilde{C}\varepsilon_m \leq \\
&\leq \left(1 - \frac{\gamma(u^{m-1}) - \gamma(u^*)}{4|||u^* - u^{m-1}|||_H^2}\right)(\gamma(u^{m-1}) - \gamma(u^*)) + \widetilde{C}\varepsilon_m \leq \\
&\leq \left(1 - \frac{\widehat{C}(\gamma(u^{m-1}) - \gamma(u^*))}{4\,||\,u^* - u^{m-1}\,||_H^2}\right)(\gamma(u^{m-1}) - \gamma(u^*)) + \widetilde{C}\varepsilon_m \leq \\
&\leq \left(1 - \frac{\widehat{C}\beta}{4}\right)(\gamma(u^{m-1}) - \gamma(u^*)) + \widetilde{C}\varepsilon_m.
\end{aligned}$$

Обозначим $\mu = \max\{1/2,\ 1 - \widehat{C}\beta/4\}$. Тогда неравенство

$$\gamma(u^m) - \gamma(u^*) \leq \mu(\gamma(u^{m-1}) - \gamma(u^*)) + \widetilde{C}\varepsilon_m \tag{20}$$

справедливо в следующих двух случаях:

1) формула (8) имеет место на m-м шаге,

2) формула (9) имеет место на m-м шаге и, кроме того, $(m-1)$ принадлежит последовательности $\{n_j\}$.

1. Пусть для каждого шага $l = 1, 2, \ldots, k$ имеем случай 1) или случай 2). Это означает, что неравенство (20) справедливо при $l = 1, 2, \ldots, k$. Выберем ε_l в соответствии с условием

$$\varepsilon_l \leq \frac{1}{\widetilde{C}}\left(\frac{1+\mu}{2}\right)^{l-1}\frac{1-\mu}{2}(\gamma(u^0) - \gamma(u^*)), \quad l = 1, 2, \ldots, k.$$

Тогда из (20) следует

$$\begin{aligned}
\gamma(u^1) - \gamma(u^*) &\leq \mu(\gamma(u^0) - \gamma(u^*)) + \frac{1-\mu}{2}(\gamma(u^0) - \gamma(u^*)) \leq \frac{1+\mu}{2}(\gamma(u^0) - \gamma(u^*)), \\
\gamma(u^2) - \gamma(u^*) &\leq \mu(\gamma(u^1) - \gamma(u^*)) + \frac{1+\mu}{2}\frac{1-\mu}{2}(\gamma(u^0) - \gamma(u^*)) \leq \\
&\leq \mu\frac{1+\mu}{2}(\gamma(u^0) - \gamma(u^*)) + \frac{1+\mu}{2}\frac{1-\mu}{2}(\gamma(u^0) - \gamma(u^*)) = \\
&= \frac{1+\mu}{2}\frac{1+\mu}{2}(\gamma(u^0) - \gamma(u^*)) = \left(\frac{1+\mu}{2}\right)^2(\gamma(u^0) - \gamma(u^*)),
\end{aligned}$$

и по индукции получаем

$$\gamma(u^l) - \gamma(u^*) \leq \left(\frac{1+\mu}{2}\right)^l(\gamma(u^0) - \gamma(u^*)), \quad l = 1, 2, \ldots, k.$$

2. Пусть на некотором N-м шаге не реализуется ни случай 1), ни случай 2). Тогда номер $(N-1)$ не принадлежит последовательности $\{n_j\}$. В этом случае $\tau_{k-1} = \arg\min\limits_{\tau\in[0,1]} \eta(\tau) < 1$ и

$$\frac{\gamma(u^{N-1}) - \gamma(u^*)}{2\|u^* - u^{N-1}\|_V^2} < 1.$$

Отсюда $\gamma(u^{N-1}) - \gamma(u^*) \le 2\|u^* - u^{N-1}\|_V^2 \le 2|||u^* - u^{N-1}|||_H^2 \le \frac{2}{\widehat{\widetilde{C}}}\|u^* - u^{N-1}\|_H^2$. Напомним, что условие $(N-1) \notin \{n_j\}$ означает справедливость неравенства $|||u^* - u^{N-1}|||_H^2 \le \theta q_0^{N-1}$. Тогда $\gamma(u^{N-1}) - \gamma(u^*) \le 2\theta q_0^{N-1}$. С учетом (9) и $\varepsilon_N \le q_0^N$ имеем

$$\gamma(u^N) - \gamma(u^*) \le \left(1 - \frac{\gamma(u^{N-1}) - \gamma(u^*)}{4\|u^* - u^{N-1}\|_V^2}\right)(\gamma(u^{N-1}) - \gamma(u^*)) + \widetilde{C}\varepsilon_N \le$$

$$\le \gamma(u^{N-1}) - \gamma(u^*) + \widetilde{C}\varepsilon_N \le 2\theta q_0^{N-1} + \widetilde{C} q_0^N = \left(\frac{2\theta}{q_0} + \widetilde{C}\right) q_0^N.$$

3. Теперь пусть на следующих шагах $N+1, N+2, \dots, N+p$ вновь имеем случай 1) или 2). Из (20) следует $\gamma(u^{N+1}) - \gamma(u^*) \le \mu(\frac{2\theta}{q_0} + \widetilde{C}) q_0^N + \widetilde{C}\varepsilon_{N+1}$. Выберем $\varepsilon_{N+1} \le \frac{1-\mu}{2\widetilde{C}}(\frac{2\theta}{q_0} + \widetilde{C}) q_0^N$.

Тогда

$$\gamma(u^{N+1}) - \gamma(u^*) \le \mu\left(\frac{2\theta}{q_0} + \widetilde{C}\right) q_0^N + \frac{1-\mu}{2}\left(\frac{2\theta}{q_0} + \widetilde{C}\right) q_0^N =$$

$$= \left(\frac{2\theta}{q_0} + \widetilde{C}\right)\frac{1+\mu}{2} q_0^N \le \left(\frac{2\theta}{q_0} + \widetilde{C}\right) q_1^{N+1},$$

где $q_1 = \max\{\frac{1+\mu}{2}, q_0\}$. Повторяя этот процесс для номеров $(N+i)$, $i = 2, \dots, p$, имеем

$$\gamma(u^{N+i}) - \gamma(u^*) \le \mu(\gamma(u^{N+i-1}) - \gamma(u^*)) + \widetilde{C}\varepsilon_{N+i} \le \text{ (по индукции) } \le$$

$$\le \mu\left(\frac{2\theta}{q_0} + \widetilde{C}\right) q_1^{N+i-1} + \widetilde{C}\varepsilon_{N+i}.$$

Предполагая $\varepsilon_{N+i} \le \frac{1-\mu}{2\widetilde{C}}(\frac{2\theta}{q_0} + \widetilde{C}) q_1^{N+i-1}$, получаем

$$\gamma(u^{N+i}) - \gamma(u^*) \le \mu\left(\frac{2\theta}{q_0} + \widetilde{C}\right) q_1^{N+i-1} + \frac{1-\mu}{2}\left(\frac{2\theta}{q_0} + \widetilde{C}\right) q_0^{N+i-1} \le$$

$$\le \mu\left(\frac{2\theta}{q_0} + \widetilde{C}\right) q_1^{N+i-1} + \frac{1-\mu}{2}\left(\frac{2\theta}{q_0} + \widetilde{C}\right) q_1^{N+i-1} =$$

$$= \left(\frac{2\theta}{q_0} + \widetilde{C}\right) q_1^{N+i-1}\frac{1+\mu}{2} \le \left(\frac{2\theta}{q_0} + \widetilde{C}\right) q_1^{N+i}, \quad i = 2, \dots, p.$$

Из пп. 1–3 следует, что при

$$\varepsilon_l \le \min\left\{q_0^l, \left(\frac{1+\mu}{2}\right)^{l-1}\frac{1-\mu}{2\widetilde{C}}\left(\gamma(u^0) - \gamma(u^*)\right), \frac{1-\mu}{2\widetilde{C}}\left(\frac{2\theta}{q_0} + \widetilde{C}\right)\right\} \tag{21}$$

справедливо неравенство $\gamma(u^l) - \gamma(u^*) \le C_{00} q_1^l$, $l = 1, 2, \dots$, где $C_{00} = \max\{\gamma(u^0) - \gamma(u^*), (\frac{2\theta}{q_0} + \widetilde{C})\}$. Тогда если $k \notin \{n_j\}$, то $\frac{1}{\widehat{\widetilde{C}}}\|u^k - u^*\|_H^2 \le |||u^k - u^*|||_H^2 \le \theta q_0^k$, $\|u^k - u^*\|_H^2 \le \frac{\theta}{\widehat{\widetilde{C}}} q_0^k$.

Если же $k \in \{n_j\}$, то по лемме 2 $\beta\|u^k - u^*\|_H^2 \le \gamma(u^k) - \gamma(u^*) \le C_{00} q_1^k$, $\|u^k - u^*\|_H^2 \le \frac{C_{00}}{\beta} q_1^k$. Далее, если ε_k, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяет условию (21), то

$$\|u^k - u^*\|_H \le C_0 \widehat{q}^k, \quad \text{где} \quad C_0 = \max\left\{\left(\frac{\theta}{\widehat{\widetilde{C}}}\right)^{1/2}, \left(\frac{C_{00}}{\beta}\right)^{1/2}, C^{**1/2}\right\}, \quad \widehat{q} = q_1^{1/2}.$$

Напомним, что C^{**} соответствует случаю, когда множество $\{n_j\}$ конечно. $\square$

3. Приложение к полукоэрцитивной контактной задаче теории упругости

Пусть $\Omega = \Omega' \bigcup \Omega'' \subset R^2$, где Ω', Ω'' — области с непрерывными по Липшицу границами $\partial\Omega'$, $\partial\Omega''$, причем $\Omega' \bigcap \Omega'' = \emptyset$, $\Gamma_C = \partial\Omega' \bigcap \partial\Omega''$, $\operatorname{mes}\Gamma_C > 0$. При фиксированных разбиениях $\partial\Omega' = \Gamma_u \bigcup \Gamma'_\tau \bigcup \Gamma_C$, $\partial\Omega'' = \Gamma''_\tau \bigcup \Gamma_C$ ($\operatorname{mes}\Gamma_u > 0$) и фиксированных функциях $C^M_{ijpl} \in L_\infty(\Omega^M)$, $i,j,p,l = 1,2$; $F^M = [L_2(\Omega^M)]^2$; $T^M \in [L_2(\Gamma^M_\tau)]^2$, $M = \{','' \}$ требуется найти минимум функционала

$$\gamma(u) = \int_\Omega C_{ijpl}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{pl}(u)d\Omega - 2\int_\Omega F_i u_i\, d\Omega - 2\int_{\Gamma_\tau} T_i u_i\, d\Gamma \quad (\Gamma_\tau = \Gamma'_\tau \bigcup \Gamma''_\tau)$$

на множестве $G = \{u = (u', u'') \in H : u''_n - u'_n \le 0 \text{ на } \Gamma_C\}$, где $H = \{u = (u', u'') \in [W^1_2(\Omega')]^2 \times [W^1_2(\Omega'')]^2 : u' = 0 \text{ на } \Gamma_u\}$, n — единичный вектор нормали к $\partial\Omega''$, внешней относительно Ω'' (по повторяющимся индексам подразумевается суммирование).

В качестве пространства H_1 абстрактной схемы возьмем ядро R_H билинейной формы $a(u,v) = \int\limits_\Omega C_{ijpl}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{pl}(u)d\Omega$, т. е. $H_1 = R_H = \{s = (s', s'') : s' \equiv 0,\ s''_1(x) = a''_1 - b''x_2,\ s''_2(x) = a''_2 + b''x'_1\}$. Тогда $H_2 = R_H^\perp$ относительно скалярного произведения [7], [8]

$$(u,v) = \Big(\int_\Omega u_i d\Omega\Big)\Big(\int_\Omega v_i d\Omega\Big) + \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega. \tag{22}$$

Полагая $\gamma_1(Q_1 v) = -L(Q_1 v)$, $\gamma_2(Q_2 v) = \frac{1}{2}a(Q_2 v, Q_2 v) - L(Q_2 v)$, где Q_i, $i = 1,2$, — ортопроекторы на R_H и $R_H^\perp$ соответственно, имеем $\gamma(v) = \gamma_1(Q_1 v) + \gamma_2(Q_2 v)$, где γ_1 и γ_2 удовлетворяют всем требованиям абстрактной схемы п. 2.

В качестве пространства V возьмем $[L_2(\Omega')]^2 \times [L_2(\Omega'')]^2$. Из неравенства Корна [8] вытекает, что нормы, порожденные скалярными произведениями (1) и (22), эквивалентны. Поэтому метод итеративной проксимальной регуляризации (i), (ii) вырабатывает последовательность точек $\{u^k\}$, сходящуюся к некоторому элементу $u^* = G^* = \{v \in G : \gamma(v) = \inf\limits_{w \in G}\gamma(w)\}$.

Легко видеть, что $\widehat{R} = \Big\{v \in R_H : \int\limits_\Omega F_i v_i dz + \int\limits_{\Gamma_\tau} T_i v_i d\Gamma = 0\Big\}$, и поэтому предположение 1 абстрактной схемы выполнено.

Предположим, что область контакта $\Gamma_C = \partial\Omega \bigcap \partial\Omega$ — прямолинейный отрезок. В этом случае условие разрешимости контактной задачи формулируется так [7], [8]:

$$L(z) = \int_\Omega F_i z_i d\Omega + \int_{\Gamma_\tau} T_i z_i d\Gamma \le 0 \ \text{ для любого } z \in G \cap R_H, \text{ причем } L(z) < 0 \text{ при } z''_n < 0. \tag{23}$$

Пусть область контакта Γ_C лежит на оси Ox_1. Обозначим $E = \{x \in \Gamma_C : (u^*)''_n - (u^*)'_n = 0\}$, где $(u^*)^M_n = (u^*)^M_n$, $M = \{','' \}$. Как и в [9], определим точку пересечения центральной оси системы сил второго тела с областью контакта Γ_C

$$x_1^* = \frac{\int\limits_{\Omega''}(F''_1 x_2 - F''_2 x_1)d\Omega + \int\limits_{\Gamma''_\tau}(T''_1 x_2 - T''_2 x_1)d\Gamma}{\int\limits_{\Omega''} F''_2 d\Omega + \int\limits_{\Gamma''_\tau} T''_2 d\Gamma}.$$

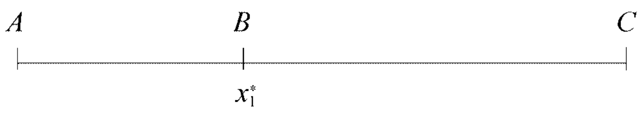

Рис. 1. Область контакта Γ_C

Из условия разрешимости (23) задачи вытекает, что x_1^* должна быть внутренней точкой Γ_C ([8], с. 140). Предполагаем, что область слипания E есть множество ненулевой меры и сосредоточена по обе стороны от точки x_1^*, т. е. $\operatorname{mes}(E \cap [AB]) > 0$ и $\operatorname{mes}(E \cap [BC]) > 0$.

С точки зрения механики контактной задачи это предположение представляется естественным. Покажем, что из него вытекает условие a) предположения 2, т. е. если для некоторого $s \in \widehat{R}$ при любом $\alpha > 0$ имеет место $u^* + \alpha s \notin G$, то существует такая постоянная $\varkappa > 0$, зависящая от u^* и s, что $u^* + \alpha(s + \varkappa\widetilde{s}) \notin G \quad \forall \widetilde{s} \in B = \{v \in H : \|v\|_H = 1\}$. Действительно, если $u^* + \alpha s \notin G$ для любого $\alpha > 0$, то $s \in \widehat{R} \setminus R^*$, где $R^* = \{z \in R_H : z''_n = 0$ на $\Gamma_C\}$. Так как $s''_n(x_1^*) = 0$ [9], то из предположения относительно множества E следует существование подмножества $E' \subset E$ ($\operatorname{mes} E' > 0$), на котором $s''_n > 0$. Поэтому можно подобрать такое число $\widetilde{\beta} > 0$ и множество $\ell \subset E'$ ($\operatorname{mes} \ell > 0$), что $s''_n \geq \widetilde{\beta}$ на ℓ. Возьмем произвольное $\widetilde{s} \in B$. Из неравенства Чебышева для любого $C > 0$ вытекает

$$\operatorname{mes}\{x : x \in \ell,\ |\widetilde{s}''_n(x) - \widetilde{s}'_n(x)| \geq C\} \leq \frac{1}{C} \int_\ell |\widetilde{s}''_n - \widetilde{s}'_n| d\Gamma.$$

Имеем

$$\int_\ell |\widetilde{s}'_n - \widetilde{s}''_n| d\Gamma \leq (\operatorname{mes} \ell)^{1/2} \|\widetilde{s}''_n - \widetilde{s}'_n\|_{L_2(\ell)} \leq (\operatorname{mes} \ell)^{1/2} (\|\widetilde{s}''_n\|_{L_2(\ell)} + \|\widetilde{s}'_n\|_{L_2(\ell)}) \leq$$
$$\leq (\operatorname{mes} \ell)^{1/2} (\|\widetilde{s}''_n\|_{L_2(\partial\Omega'')} + \|\widetilde{s}'_n\|_{L_2(\partial\Omega')}) \leq C_1 \|\widetilde{s}\|_{[L_2(\partial\Omega')]^2 \times [L_2(\partial\Omega'')]^2} \leq C_2,$$

где C_1, C_2 — некоторые постоянные, не зависящие от $\widetilde{s} \in B$. Последнее неравенство вытекает из вложения пространства $[W_2^1(\Omega')]^2 \times [W_2^1(\Omega'')]^2$ в $[L_2(\partial\Omega')]^2 \times [L_2(\partial\Omega'')]^2$. Тем самым для любого $\widetilde{s} \in B$ имеем $\operatorname{mes}\{x \in \ell : |\widetilde{s}''_n(x) - \widetilde{s}'_n(x)| \geq C\} \leq \frac{C_2}{C}$.

Возьмем $C = \frac{2C_2}{\operatorname{mes} \ell}$. Тогда $\operatorname{mes}\{x : x \in \ell : |\widetilde{s}''_n(x) - \widetilde{s}'_n(x)| \geq \frac{2C_2}{\operatorname{mes} \ell}\} \leq \frac{\operatorname{mes} \ell}{2}$. Обозначая $\ell' = \{x : x \in \ell : |\widetilde{s}''_n(x) - \widetilde{s}'_n(x)| \geq \frac{2C_2}{\operatorname{mes} \ell}\}$, имеем $|\widetilde{s}''_n(x) - \widetilde{s}'_n(x)| < \frac{2C_2}{\operatorname{mes} \ell}$ на $\ell \setminus \ell'$, причем $\operatorname{mes}(\ell \setminus \ell') > \frac{\operatorname{mes} \ell}{2} > 0$.

Возьмем $\varkappa$ таким, чтобы $\varkappa \frac{2C_2}{\operatorname{mes} \ell} = \frac{\widetilde{\beta}}{2}$. Тогда $\varkappa |\widetilde{s}''_n(x) - \widetilde{s}'_n(x)| < \frac{\widetilde{\beta}}{2}$ на $\ell \setminus \ell'$. Поэтому для любого $\alpha > 0$ элемент $u_\alpha = u^* + \alpha(s + \varkappa\widetilde{s}) \notin G$. Действительно

$$(u_\alpha)''_n - (u_\alpha)'_n = \alpha[(s'' + \varkappa\widetilde{s}'')_n - \varkappa\widetilde{s}'_n] = \alpha[s''_n + \varkappa(s''_n - \widetilde{s}'_n)] \geq \alpha\left(\widetilde{\beta} - \frac{\widetilde{\beta}}{2}\right) = \frac{\alpha\overline{\beta}}{2} > 0.$$

Тем самым условие a) предположения 2 выполнено. Это означает, что для метода итеративной проксимальной регуляризации, примененного к рассмотренной выше постановке контактной задачи теории упругости, выполнены заключения п. 2 теоремы.

Литература

1. Rockafellar R.T. *Monotone operators and the proximal point algorithm* // SIAM J. Contr. Optim. – 1976. – V. 14. – P. 877–898.
2. Tseng P. *On linear convergence of iterative methods for the variational inequality problem* // J. Comp. Appl. Math. – 1995. – V. 60. – P. 237–252.
3. Каплан А.А., Намм Р.В. *Об оценке скорости сходимости итерационных процессов с prox-регуляризацией* // Исследов. по условной коррект. задач матем. физ. Сб. научн. тр. под ред. акад. М.М. Лаврентьева. СО АН СССР. Ин-т матем. – 1989. – С. 60–77.
4. Вихтенко Э.М., Намм Р.В. *О методе решения полукоэрцитивных вариационных неравенств, основанном на методе итеративной проксимальной регуляризации* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 1. – С. 31–35.
5. Каплан А.А. *Об устойчивости методов решения задач выпуклого программирования и вариационных неравенств* // Модели и методы оптимизации. Тр. Ин-та матем. СО АН СССР. – 1988. – Т. 10. – С. 132–159.
6. Экланд И., Темам Р. *Выпуклый анализ и вариационные проблемы.* – М.: Мир, 1979. – 399 с.
7. Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И., Ловишек Я. *Решение вариационных неравенств в механике.* – М.: Мир, 1986. – 270 с.
8. Фикера Г. *Теоремы существования в теории упругости.* – М.: Мир, 1974. – 159 с.
9. Намм Р.В. *К характеристике предельной точки в методе итеративной prox-регуляризации* // Сиб. журн. вычисл. матем. – 1998. – Т. 1. – № 2. – С. 143–152.

Тихоокеанский государственный университет
Тульский государственный университет

Поступила
29.12.2005