ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 3 (514)

УДК 517.55

А.А. КЫТМАНОВ

ОБ АНАЛОГЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БОХНЕРА–МАРТИНЕЛЛИ В d-КРУГОВЫХ ПОЛИЭДРАХ ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{C}^d$

Введение

Как известно, ядро интегрального представления Бохнера–Мартинелли в $\mathbb{C}^{n+1}$ связано с формой Фубини–Штуди для проективного пространства $\mathbb{P}^n = \mathbb{CP}^n$ следующим образом:

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{d\lambda}{\lambda} \wedge \omega_0([\xi]) \tag{1}$$

(напр., [1], с. 400; [2], с. 162). Здесь

$$\omega(z) = \frac{n!}{(2\pi i)^{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{\overline{z}_k}{|z|^{2n+2}} d\overline{z}[k] \wedge dz$$

— форма Бохнера–Мартинелли, $dz = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{n+1}$, $d\overline{z}[k]$ получается из $d\overline{z}$ вычеркиванием дифференциала $d\overline{z}_k$,

$$\omega_0([\xi]) = \frac{n!}{(2\pi i)^n} \frac{E(\xi) \wedge \overline{E(\xi)}}{|\xi|^{2(n+1)}}$$

есть форма объема для метрики Фубини–Штуди в $\mathbb{P}^n$ ([3], с. 21), где $E(\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \xi_k d\xi[k]$ — форма Эйлера, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n+1})$ — однородные координаты точки $[\xi] \in \mathbb{P}^n$. При этом $\xi, z \in \mathbb{C}^{n+1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ связаны соотношением $z = \lambda\xi$.

Форма Бохнера–Мартинелли есть "эталонная" форма степени $2n+1$ в множестве $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$. А это множество есть расслоение над $\mathbb{P}^n$, слой которого является одномерным тором $\mathbb{C}_*$. Другими словами, $\mathbb{P}^n = [\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}]/G$, где $G = \{(\lambda, \dots, \lambda) \in \mathbb{C}^{n+1} : \lambda \in \mathbb{C}_*\}$ — группа преобразований, образованная диагональными матрицами. Проективное пространство есть частный случай торического многообразия. В общем случае n-мерное торическое многообразие является факторпространством ([4]–[6])

$$\mathbb{X} = [\mathbb{C}^d \setminus Z(\Sigma)]/G.$$

Здесь $Z(\Sigma)$ представляет собой объединение некоторых координатных подпространств в $\mathbb{C}^d$, построенных по вееру $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ с d образующими, G — группа, изоморфная тору $(\mathbb{C}_*)^r$, $r = d - n$, также построенная по вееру Σ.

В своем докладе на конференции "Nordan" по комплексному анализу (Стокгольм, апрель 1999 г.) А.К. Цих поставил задачу вычисления форм объема $\omega_0([\xi])$ на торических многообразиях $\mathbb{X}$ (форм Фубини–Штуди) и эталонных форм $\omega(z)$ на $\mathbb{C}^d \setminus Z(\Sigma)$ со свойством

$$\omega(z) \sim \frac{1}{(2\pi i)^r} \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} \wedge \dots \wedge \frac{d\lambda_r}{\lambda_r} \wedge \omega_0([\xi]),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № Е 00-1.0-151).

обобщающим (1), где знак $\sim$ означает, что формы имеют одинаковые вычеты относительно $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$. При этом он отметил, что формы ω могут служить ядрами интегральных представлений в $\mathbb{C}^d$.

Произвольное компактное торическое многообразие $\mathbb{X} = \mathbb{X}^n$ комплексной размерности n определяется по полному симплициальному примитивному вееру $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, который порождается набором векторов $v_1, \ldots, v_d \in \mathbb{Z}^n$ (одномерных образующих веера).

В конструкции $\mathbb{X}$ важную роль играет решетка соотношений между векторами v_k. Пусть

$$a_{i1}v_1 + \cdots + a_{id}v_d = 0, \quad i = 1, \ldots, r, \tag{2}$$

где $r = d - n$, — все независимые линейные соотношения над $\mathbb{Z}^n$ между v_k (в разделе 1 доказано, что базисные соотношения (2) можно выбрать с неотрицательными коэффициентами a_{ij}). Каждому вектору v_k сопоставляется комплексная переменная ζ_k так, что $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_d)$ играет роль однородных координат соответствующего торического многообразия $\mathbb{X}$.

Цель статьи состоит в построении интегрального представления для голоморфных функций в d-круговом полиэдре $W = W_\rho$, определенном системой неравенств

$$a_{i1}|\zeta_1|^2 + \cdots + a_{id}|\zeta_d|^2 < \rho_i, \quad i = 1, \ldots, r, \tag{3}$$

с интегрированием по остову этого полиэдра и с ядром $\omega(\zeta)$. Указанный остов получается из (3) заменой всех неравенств на равенства и представляет собой прообраз $\mu^{-1}(\rho)$ моментного отображения $\mu : \mathbb{C}^d \to A_1(\mathbb{X}) \otimes \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^r$, где $A_1(\mathbb{X})$ — группа Чжоу многообразия $\mathbb{X}$. Построенное в статье интегральное представление справедливо в случае, когда радиус-вектор $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_r)$ взят из конуса Кэлера для $\mathbb{X}$ ([5]), а веер является выпуклым.

Ядро интегрального представления $\omega(\zeta)$ обобщает упомянутую выше дифференциальную форму Бохнера–Мартинелли, оно имеет вид G-инвариантной дифференциальной (d, n)-формы

$$\omega(\zeta) = \frac{h(\overline{\zeta}) \wedge d\zeta}{g(\zeta, \overline{\zeta})}, \tag{4}$$

где $h(\zeta)$ — обобщение формы Эйлера, $g(\zeta, \overline{\zeta})$ — полином с множеством нулей, совпадающим с $Z(\Sigma)$.

Основной результат (теорема 1) гласит, что вблизи точки $z = 0$ всякая голоморфная в полиэдре W_ρ функция $f(z)$ представляется интегралом

$$f(z) = \frac{1}{C} \int_{\mu^{-1}(\rho)} f(\zeta)\omega(\zeta - z), \tag{5}$$

где C — коэффициент нормировки, не зависящий от f.

1. Моментное отображение и конус Кэлера

Напомним основные определения, используемые в работе.

Конусом, порожденным системой векторов $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, называется множество $\sigma = \left\{ \sum_{j=1}^{k} b_j v_j \,:\, b_j \geqslant 0 \right\}$ в $\mathbb{R}^n$. Образующими конуса называются векторы $v_1, \ldots, v_k$. Гранью конуса σ называется подмножество σ, для которого некоторые $b_j = 0$. Размерностью конуса называется размерность минимального подпространства, содержащего данный конус. Веером Σ называется всякая совокупность конусов такая, что 1) пересечение любых двух конусов из этой совокупности есть конус из этой совокупности, являющийся гранью каждого из этих конусов; 2) если конус принадлежит данной совокупности, то все его грани также принадлежат данной совокупности. Размерностью веера называется максимальная размерность конусов, принадлежащих вееру.

Определение 1. Конус веера называется симплициальным, если его размерность совпадает с числом его образующих. Веер называется симплициальным, если в нем все конусы симплициальные.

Определение 2. n-мерный веер $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, порожденный набором векторов $v_1, \ldots, v_d$, называется примитивным, если матрица из вектор-столбцов всякого набора векторов $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$, составляющих конус максимальной размерности, унимодулярна.

Определение 3. n-мерный веер $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ называется полным, если объединение всех его конусов есть $\mathbb{R}^n$.

Определение 4. n-мерный веер $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$, порожденный набором векторов $v_1, \ldots, v_d$, назовем выпуклым, если все концы векторов $v_1, \ldots, v_d$ лежат на границе своей выпуклой оболочки.

Следует отметить, что выпуклость веера является важным понятием в торической геометрии. Всякий выпуклый веер является двойственным к рефлексивному многограннику.

Как уже отмечалось выше, важную роль в конструкции торического многообразия $\mathbb{X}$ играют соотношения (2). Относительно их докажем

Предложение 1. *Для всякого полного n-мерного веера $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ систему (2) независимых линейных соотношений между v_k можно записать с неотрицательными коэффициентами a_{ij}.*

Доказательство. 1. Пусть векторы $v_1, \ldots, v_d$, порождающие веер Σ, таковы, что каждые n из них линейно независимы. Покажем, что в этом случае найдется $n+1$ векторов $v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n+1}}$ таких, что $\alpha_1 v_{i_1} + \cdots + \alpha_{n+1} v_{i_{n+1}} = 0$, где все α_j положительны.

Введем обозначения $K(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) := \{x = \alpha_1 v_{i_1} + \cdots + \alpha_k v_{i_k} : \alpha_j > 0,\ j = 1, \ldots, k\}$, $-K(v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}) := K(-v_{i_1}, \ldots, -v_{i_k})$ и $K_j := K(v_1, \ldots, v_j)$.

Рассмотрим множество K_n. Если $v_{n+1} \in -K_n$, то, очевидно, $K_{n+1} = \mathbb{R}^n$ и векторы $v_1, \ldots, v_{n+1}$ удовлетворяют требуемому равенству. Если же $v_{n+1} \notin -K_n$, то далее проводим аналогичные рассуждения для множества K_{n+1} и вектора v_{n+2}. Заметим, что для всякого $1 \leqslant j \leqslant r$, если $K_{n+j} \neq \mathbb{R}^n$,

$$K_{n+j} = K_{n+j-1} \cup K(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-1}}, v_{n+j}) \cup K(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-1}}),$$

где $i_1, \ldots, i_{n-1} \in \{1, \ldots, n+j-1\}$. Таким образом, каждое множество K_{n+j} состоит из объединения множеств K, порожденных наборами из n векторов и некоторых их граней — множеств меньшей размерности. В силу полноты веера $K_d = \mathbb{R}^n$ для некоторого $0 \leqslant j \leqslant r-1$ получим $K_{n+j} \neq \mathbb{R}^n$, $K_{n+j+1} = \mathbb{R}^n$, т. е. $v_{n+j+1} \in -K_{n+j}$. Так как множество K_{n+j} состоит из объединения множеств K, порожденных наборами из n векторов и некоторых их граней, то вектор v_{n+j+1} попадет в одно из таких множеств $K(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n})$ (на грань он попасть не может в силу требования линейной независимости каждого набора из n векторов). Таким образом, векторы $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$ и $v_{i_{n+1}} = v_{n+j+1}$ удовлетворяют требуемому равенству.

Остальные $r-1$ линейно независимых соотношений получим следующим образом. Поскольку $-K(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n+1}}) = \mathbb{R}^n$, то произвольный вектор v_l, $l \notin \{i_1, \ldots, i_{n+1}\}$, из веера Σ (число таких векторов $r-1$) попадает в некоторое множество $-K(v_{j_1}, \ldots, v_{j_n})$, где $j_1, \ldots, j_n \in \{i_1, \ldots, i_{n+1}\}$. Тогда найдутся положительные числа $b_1, \ldots, b_{n+1}$ такие, что $b_1 v_{j_1} + \cdots + b_n v_{j_n} + b_{n+1} v_l = 0$.

2. Если в веере найдутся n линейно зависимых векторов, то сколь угодно малым изменением (шевелением) добьемся того, что они станут линейно независимыми. Далее применяем рассуждения п. 1. При обратном шевелении некоторые положительные коэффициенты из линейных соотношений на векторы могут перейти лишь в равные нулю (в силу произвольной малости шевелений), что, однако, не нарушает их неотрицательность. $\square$

В силу предложения 1 везде далее без ограничения общности считаем, что в системе (2) все коэффициенты a_{ij} неотрицательные.

Каждому вектору v_k сопоставляется переменная ζ_k.

Определение 5. Набор векторов $v_{k_1}, \ldots, v_{k_m}$ веера Σ называется примитивным, если он не определяет конуса в Σ, но любой его собственный поднабор определяет конус в Σ.

Всякий примитивный набор векторов $v_{k_1}, \dots, v_{k_m}$ веера определяет координатную плоскость из $Z(\Sigma)$ ([8]), так что $Z(\Sigma) = \bigcup\limits_{v_{k_1},\dots,v_{k_m} \text{ — прим.}} \{\zeta_{k_1} = \dots = \zeta_{k_m} = 0\}$. Также $Z(\Sigma)$ можно представить в виде пересечения ([8]) $Z(\Sigma) = \bigcap\limits_{\sigma \in \Sigma} \Big\{ \prod\limits_{v_j \notin \sigma} \zeta_j = 0 \Big\}$, эквивалентного предыдущей конструкции.

Группа G определяется соотношениями (2). Таким образом, базис решетки соотношений составляют векторы $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{id})$, $i = 1, \dots, r$. Группа G есть r-параметрическая поверхность $\{(\lambda_1^{a_{11}} \cdot \ldots \cdot \lambda_r^{a_{r1}}, \dots, \lambda_1^{a_{1d}} \cdot \ldots \cdot \lambda_r^{a_{rd}}) : \lambda_j \in \mathbb{C}_*\} \subset (\mathbb{C}_*)^d$, так что

$$\zeta \sim \eta \Leftrightarrow \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_r) : \zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_d) = (\lambda_1^{a_{11}} \cdot \ldots \cdot \lambda_r^{a_{r1}} \eta_1, \dots, \lambda_1^{a_{1d}} \cdot \ldots \cdot \lambda_r^{a_{rd}} \eta_d).$$

Моментное отображение (напр., [5], [7]) $\mu : \mathbb{C}^d \to \mathbb{R}^d / \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^r$ будет выглядеть следующим образом: $\mu(\zeta_1, \dots, \zeta_d) = (\rho_1, \dots, \rho_r)$, где

$$a_{i1}|\zeta_1|^2 + \dots + a_{id}|\zeta_d|^2 = \rho_i, \quad i = 1, \dots, r. \tag{6}$$

При фиксированном $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_r) \in \mathbb{R}^r$ соотношения (6) определяют множество $\Gamma_0(\rho) = \mu^{-1}(\rho)$.

Конус Кэлера (напр., [5]) для торического многообразия $\mathbb{X}$ определяется следующим образом. Припишем каждому вектору v_i из Σ число $b_i \in \mathbb{R}$, т. е. рассмотрим функцию $\psi : \{v_1, \dots, v_d\} \to \mathbb{R}$ на конечном множестве векторов v_i. Эту функцию можно продолжить до кусочно-линейной функции во всем пространстве $\mathbb{R}^n$, полагая ее линейной на каждом конусе $\sigma \in \Sigma$. Совокупность векторов $(b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d$, для которых указанные кусочно-линейные функции строго выпуклые, образует многогранный конус $\widetilde{K}$ в $\mathbb{R}^d$ (т. е. конус, ограниченный конечным числом гиперплоскостей).

Обозначим через $\widetilde{\mu} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^r$ линейное отображение с матрицей (a_{ij}) из (6).

Определение 6. Внутренность K образа $\widetilde{\mu}(\widetilde{K})$ в пространстве $\mathbb{R}^r$ называется конусом Кэлера.

Фактически конус $\widetilde{K}$ описывается следующим образом [8]. Для каждого примитивного набора векторов $v_{k_1}, \dots, v_{k_m}$ их сумму представляем в виде

$$v_{k_1} + \dots + v_{k_m} = c_{i_1} v_{i_1} + \dots + c_{i_n} v_{i_n}, \quad c_{i_1}, \dots, c_{i_n} \in \mathbb{Q}_+, \tag{7}$$

где $v_{i_1}, \dots, v_{i_n}$ образуют конус, в который попадает эта сумма. Тогда каждый такой набор $v_{k_1}, ..., v_{k_m}$ определяет следующее неравенство, которому удовлетворяют векторы $b = (b_1, ..., b_d) \in \widetilde{K}$:

$$b_{k_1} + \dots + b_{k_m} \geqslant c_{i_1} b_{i_1} + \dots + c_{i_n} b_{i_n}. \tag{8}$$

Тем самым $\widetilde{K}$ задается системой неравенств (8), пробегающих по всем наборам векторов $v_{k_1}, \dots, v_{k_m}$, не принадлежащих к кому-либо конусу веера, где $i_1, \dots, i_n$ и $c_{i_1}, \dots, c_{i_n}$ зависят от выбранного набора $v_{k_1}, \dots, v_{k_m}$.

Отождествляя b_j с $|\zeta_j|^2$ и рассматривая образы $\mu(\zeta_1, \dots, \zeta_d) = (\rho_1, \dots, \rho_r)$, получим, что конус Кэлера K задается системой неравенств на ρ_j:

$$|\zeta_{k_1}(\rho)|^2 + \dots + |\zeta_{k_m}(\rho)|^2 > c_{i_1}|\zeta_{i_1}(\rho)|^2 + \dots + c_{i_n}|\zeta_{i_n}(\rho)|^2, \tag{9}$$

причем неравенств столько, сколько примитивных наборов [8]. Неравенства (9) будем называть условиями кэлеровости.

Предложение 2 ([5]). *Для $\rho \in K$ цикл $\Gamma_0(\rho) = \mu^{-1}(\rho)$ не пересекает $Z(\Sigma)$.*

2. Ядро интегрального представления и его свойства

Форма в $\mathbb{C}^d \backslash Z(\Sigma)$, являющаяся ядром интегрального представления (аналог формы Бохнера–Мартинелли), была построена в [9] для случая двумерных торических многообразий, а для случая многообразий произвольной размерности она затем была построена в [10]. Она имеет бистепень (d, n), является замкнутой и представляется в виде (4). Числитель — форма типа (d, n), где $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_d$,

$$h(\zeta) = \sum_J{}' v_J \zeta[J] d\zeta_J$$

— аналог формы Эйлера. Здесь $J = (j_1, \ldots, j_n)$ — мультииндекс. Штрих означает, что суммирование ведется по строго возрастающим индексам $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_n \leqslant d$, $|J| = j_1 + \cdots + j_n$, $v_J = v_{j_1 \ldots j_n} = \det(v_{j_1}, \ldots, v_{j_n})$; $\zeta[J] = \zeta[j_1, \ldots, j_n]$ — произведение ζ_l, $l = 1, \ldots, d$, $l \neq j_1, \ldots, j_n$; $d\zeta_J = d\zeta_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\zeta_{j_n}$.

Знаменатель g формы (4) имеет вид

$$g = \sum_j c_j (\zeta\overline{\zeta})^{V(u_j)+\overline{1}} = \sum_j c_j (\zeta_1\overline{\zeta}_1)^{\langle v_1, u_j\rangle + 1} \ldots (\zeta_d\overline{\zeta}_d)^{\langle v_d, u_j\rangle+1},$$

где u_j — вершины многогранника, двойственного к вееру Σ.

Однако следует отметить, что для конкретного веера Σ возникают трудности с вычислением координат вершин двойственного многогранника. Поэтому ниже предлагается другой (явный) вид записи степеней знаменателя.

Введем следующие обозначения. Пусть $\sigma_m^{(n)}$, $m = 1, \ldots, M$, — все конусы веера максимальной размерности, равной n. Далее для краткости будем писать просто σ_m и везде далее, если размерность конуса не будет оговорена, считаем ее равной n.

Пусть конус σ_m порожден векторами $v_{m_1}, ..., v_{m_n}$. В силу примитивности веера $\det(v_{m_1}, ..., v_{m_n}) = \pm 1$. Везде далее будем считать, что для каждого n-мерного конуса σ_m порядок векторов $v_{m_1}, \ldots, v_{m_n}$ задан так, что $\det(v_{m_1}, \ldots, v_{m_n}) = 1$. Введем обозначение

$$\nu_l^{\sigma_m} := -\sum_{i=1}^{n} \det(v_{m_1}, \ldots, v_{m_{i-1}}, v_l, v_{m_{i+1}}, \ldots, v_{m_n}).$$

Если веер выпуклый, то для любого конуса σ_m максимальной размерности выполнено условие $\nu_l^{\sigma_m} \geqslant -1$ $\forall 1 \leqslant l \leqslant d$, причем при $l \in \{m_1, \ldots, m_n\}$ выполнено равенство, поскольку в этом случае все слагаемые, кроме одного, равны нулю в силу линейной зависимости столбцов в определителях.

Теперь можем определить знаменатель g в виде полиномиальной по ζ и $\overline{\zeta}$ функции $g(\zeta, \overline{\zeta}) = \sum\limits_{m=1}^{M} c_m (\zeta\overline{\zeta})^{\nu^{\sigma_m}+\overline{1}}$, где $(\zeta\overline{\zeta})^{\nu^{\sigma_m}+\overline{1}} = \prod\limits_{1 \leqslant l \leqslant d} (\zeta_l\overline{\zeta}_l)^{\nu_l^{\sigma_m}+1}$.

3. Воспроизводящее свойство ядра ω

Предложение 3. *Пусть функция $f(\zeta)$ голоморфна в окрестности нуля U и величины $\rho_1, \ldots, \rho_r$ настолько малы, что цикл $\Gamma_0 \subset U$. Тогда справедливо интегральное представление*

$$f(0) = \frac{1}{C} \int_{\Gamma_0} f(\zeta)\omega(\zeta), \tag{10}$$

где C — константа нормировки $\int\limits_{\Gamma_0} \omega = C \neq 0$.

Доказательство. Так как форма $f\omega$ является $\overline{\partial}$-замкнутой, то интеграл (10) не зависит от $\rho_1, \ldots, \rho_r$. Представим этот интеграл в форме

$$\int_{\Gamma_0} f(\zeta)\omega(\zeta) \int_{\Gamma_0} f(0)\omega(\zeta) + \int_{\Gamma_0} (f(\zeta) - f(0))\omega(\zeta) = Cf(0) + \int_{\Gamma_0} (f(\zeta) - f(0))\omega(\zeta).$$

Покажем, что последний интеграл равен нулю. Сделаем замену, т. е. $\zeta_i \to \tau^{-s_i}\zeta_i$, где $s_i = a_{1i} + \dots + a_{ri} > 0$, $i = 1, \dots, d$. При такой замене цикл Γ_0 перейдет в цикл Γ_τ: $a_{j1}|\tau^{-s_1}\zeta_1|^2 + \dots + a_{jd}|\tau^{-s_d}\zeta_d|^2 = \rho_j$, $j = 1, \dots, r$.

Применяя рассуждения, аналогичные рассуждениям предложения 2, убедимся, что цикл Γ_τ не пересекается с $Z(\Sigma)$. Это означает, что циклы Γ_0 и Γ_τ гомологичны в $\mathbb{C}^d \setminus Z(\Sigma)$. Поэтому интегралы по этим циклам от формы, замкнутой в $\mathbb{C}^d \setminus Z(\Sigma)$, равны. Получаем

$$\int_{\Gamma_0} (f(\zeta) - f(0))\omega(\zeta) = \int_{\Gamma_\tau} (f(\zeta) - f(0))\omega(\zeta) = \int_{\Gamma_0} (f(\zeta\tau^s) - f(0))\omega(\zeta\tau^s).$$

Форма ω инвариантна относительно данной замены: $\omega(\zeta\tau^s) = \omega(\zeta)$ ([10]). Последний интеграл не зависит от τ, поэтому можно перейти к пределу при $\tau \to 0$. Поскольку все s_k положительны, то $\lim\limits_{\tau\to 0} f(\zeta\tau^s) = f(0)$. Получаем

$$\lim_{\tau\to 0} \int_{\Gamma_0} (f(\zeta\tau^s) - f(0))\omega(\zeta\tau^s) = \lim_{\tau\to 0} \int_{\Gamma_0} (f(\zeta\tau^s) - f(0))\omega(\zeta) = 0. \quad \square$$

4. Интегральное представление

Поставим вопрос о нахождении области D такой, что для любой точки $z \in D$ будет справедливо интегральное представление (5).

Рассмотрим область $D = D_\rho$

$$D := \{z \in \mathbb{C}^d : |z_{k_1}|^2 + \dots + |z_{k_m}|^2 < |\zeta_{k_1}(\rho)|^2 + \dots + |\zeta_{k_m}(\rho)|^2 - \\ - c_{i_1}|\zeta_{i_1}(\rho)|^2 - \dots - c_{i_n}|\zeta_{i_n}(\rho)|^2 \ \forall k_1, \dots, k_m : v_{k_1}, \dots, v_{k_m} \text{ примитивный}\}. \quad (11)$$

Заметим, что область D непуста, если выполнены условия кэлеровости (9).

Обозначим сдвиг $z + Z(\Sigma)$ через

$$Z_z(\Sigma) = \bigcup_{v_{k_1}, \dots, v_{k_m} \text{ прим.}} \{\zeta_{k_1} - z_{k_1} = \dots = \zeta_{k_m} - z_{k_m} = 0\},$$

сдвиг $z + \Gamma_0$ — через

$$\Gamma_z : \begin{cases} a_{11}|\zeta_1 - z_1|^2 + \dots + a_{1d}|\zeta_d - z_d|^2 = \rho_1; \\ \qquad\qquad \cdots \\ a_{r1}|\zeta_1 - z_1|^2 + \dots + a_{rd}|\zeta_d - z_d|^2 = \rho_r. \end{cases}$$

Область вида (3) обозначим через $W_{2\rho}$, где в правых частях неравенств стоят соответственно $2\rho_1, \dots, 2\rho_r$.

Лемма. *Для всякого $z \in D$ цикл Γ_z лежит в $W_{2\rho}$, причем если выполнены условия кэлеровости (9), то в области $W_{2\rho} \setminus Z_z(\Sigma)$ имеет место гомология $\Gamma_z \sim \Gamma_0$.*

Доказательство. Рассмотрим следующую гомотопию циклов Γ_0 и Γ_z:

$$a_{i1}|\zeta_1 - tz_1|^2 + \dots + a_{id}|\zeta_d - tz_d|^2 = \rho_i, \quad i = 1, \dots, r, \quad (12)$$

где $0 \leqslant t \leqslant 1$. Покажем, что при любом t из отрезка $[0, 1]$ цикл (12) не пересекает $Z_z(\Sigma)$.

Учитывая (6), перепишем (12) в виде

$$a_{i1}(|\zeta_1 - tz_1|^2 - |\zeta_1|^2) + \dots + a_{id}(|\zeta_d - tz_d|^2 - |\zeta_d|^2) = 0, \quad i = 1, \dots, r.$$

Поскольку данная система аналогична (2), из равенства (7) получаем

$$|\zeta_{k_1} - tz_{k_1}|^2 - |\zeta_{k_1}|^2 + \dots + |\zeta_{k_m} - tz_{k_m}|^2 - |\zeta_{k_m}|^2 = \\ = c_{i_1}(|\zeta_{i_1} - tz_{i_1}|^2 - |\zeta_{i_1}|^2) + \dots + c_{i_n}(|\zeta_{i_n} - tz_{i_n}|^2 - |\zeta_{i_n}|^2). \quad (13)$$

Подставляя плоскость

$$\{\zeta_{k_1} - z_{k_1} = \dots = \zeta_{k_m} - z_{k_m} = 0\} \ \text{ из } \ Z_z(\Sigma) \quad (14)$$

в (13), получаем

$$c_{i_1}|\zeta_{i_1}-tz_{i_1}|^2+\dots+c_{i_n}|\zeta_{i_n}-tz_{i_n}|^2 = \\ = -(|\zeta_{k_1}|^2+\dots+|\zeta_{k_m}|^2-c_{i_1}|\zeta_{i_1}|^2-\dots-c_{i_n}|\zeta_{i_n}|^2)+(1-t)^2(|z_{k_1}|^2+\dots+|z_{k_m}|^2). \quad (15)$$

В силу того, что $\zeta \in D$, имеем

$$|z_{k_1}|^2+\dots+|z_{k_m}|^2 < |\zeta_{k_1}|^2+\dots+|\zeta_{k_m}|^2-c_{i_1}|\zeta_{i_1}|^2-\dots-c_{i_n}|\zeta_{i_n}|^2. \quad (16)$$

Из (15) и (16) следует

$$c_{i_1}|\zeta_{i_1}-tz_{i_1}|^2+\dots+c_{i_n}|\zeta_{i_n}-tz_{i_n}|^2 < [(1-t)^2-1](|\zeta_{k_1}|^2+\dots+|\zeta_{k_m}|^2-c_{i_1}|\zeta_{i_1}|^2-\ldots-c_{i_n}|\zeta_{i_n}|^2).$$

Поскольку $[(1-t)^2-1](|\zeta_i|^2+|\zeta_j|^2-c_k|\zeta_k|^2-c_{k+1}|\zeta_{k+1}|^2)\leqslant 0$ в силу (9) и того, что $t\in[0,1]$, видно, что цикл (12) не пересекается с произвольной плоскостью (14). $\square$

Таким образом, доказано интегральное представление (5) для функций, голоморфных в $W_{2\rho}$. Заметим, что в качестве области, где должна быть голоморфна функция $f(z)$ из (5), достаточно взять область $W=W_\rho$, поскольку она является выпуклой областью, на границе которой лежит цикл Γ_0. Из выпуклости области W следует, что функцию, голоморфную в W и непрерывную в замыкании W, можно приблизить полиномами в замыкании W, для которых интегральное представление (5) доказано. Таким образом, справедлива

Теорема. *Пусть функция $f(\zeta)$ голоморфна в области W, определяемой неравенствами* (3), *и непрерывна в замыкании W. Тогда в пересечении $D\cap W$, где область D имеет вид* (11), *справедливо интегральное представление* (5), *а цикл Γ_0 определяется равенствами* (6).

Автор выражает благодарность своему нучному руководителю Циху А.К. за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. Гриффитс Ф., Харрис Дж. *Принципы алгебраической геометрии.* Т. 1. – М.: Мир, 1982. – 496 с.
2. Кытманов А.М. *Интеграл Бохнера–Мартинелли и его применения.* – Новосибирск: Наука, 1992. – 240 с.
3. Шабат Б.В. *Распределение значений голоморфных отображений.* – М.: Наука, 1982. – 288 с.
4. Audin M. *The topology of torus actions on symplectic manifolds.* – Progress in Math. – V. 93. – Birkhäuser: Boston–Basel–Berlin, 1991. – 181 p.
5. Cox D. *Recent developments in toric geometry* // Preprint, Departament of Mathematics and Computer Science, Amherst College, Amherst, Massachusetts, 1998. – 50 p.
6. Cox D. *Toric residues* // Preprint, Departament of Mathematics and Computer Science, Amherst College, Amherst, Massachusetts, 1997. – 27 p.
7. Guillemin V. *Moment maps and combinatorial invariants of hamiltonian T^n-spaces.* – Progress in Math. – V. 122. – Birkhäuser: Boston–Basel–Berlin, 1994. – 151 p.
8. Batyrev V. *Quantum cohomology rings of toric manifold* // Journées de Géométrie Algébrique d'Orsay (Juillet 1992), Astérisque 218, Sociéte Mathématique de France, Paris, 1993. – P. 9–34.
9. Кытманов А.А. *Об интегральных представлениях в d-круговых полиэдрах пространства $\mathbb{C}^d$* // Сиб. матем. журн. 2003. – Т. 44. – № 2. – С. 358–371.
10. Tsikh A., Yger A. *Residue currents* // J. Math. Sci. Kluwer Acad. Publ. – 2004. – V. 120. – № 6. – P. 1916–2001.

Красноярский государственный университет

Поступила
28.11.2002