ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 7 (446)

УДК 517.972.8

А.Г. ЧЕНЦОВ

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ВЕРСИЯ ОБОБЩЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ В КЛАССЕ КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫХ МЕР, I

Объектом исследования является абстрактная система интегральных ограничений, для которой определяется аналог расширения, не сводящийся, вообще говоря, к процедуре компактификации. Тем не менее, возникающее при последовательном ослаблении условий множество притяжения в пространстве конечно-аддитивных (к.-а.) мер ограниченной вариации оказывается универсальным в широком классе возможных схем введения возмущений, топологий, характеризующих функциональное пространство, в котором "регистрируется" степень соблюдения интегральных ограничений, а также топологий пространства к.-а. мер ограниченной вариации, используемых при построении множеств притяжения в классе приближенных решений-направленностей.

1. Введение

Рассмотрим следующую гипотетическую постановку задачи о соблюдении ограничений элементами f множества F, $F \neq \emptyset$, которые будем именовать "управлениями". Итак, предположим, что задано топологическое пространство (ТП) $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$, множество $\mathbb{Y}$, $\mathbb{Y} \subset \mathbb{X}$, а также отображение s из F в $\mathbb{X}$. Рассмотрим условие $s(f) \in \mathbb{Y}$ на выбор $f \in F$, порождающее допустимое множество $F_\partial \stackrel{\triangle}{=} \{f \in F \mid s(f) \in \mathbb{Y}\}$ (здесь и ниже $\stackrel{\triangle}{=}$ — равенство по определению). Если $\mathbb{Y}$ заменить некоторой окрестностью $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathbb{Y})$, то ослабленное условие $s(f) \in \mathcal{O}$ реализует в виде допустимого следующее множество: $\mathbb{F}_\partial(\mathcal{O}) \stackrel{\triangle}{=} \{f \in F \mid s(f) \in \mathcal{O}\}$. Уже в простейших случаях $\mathbb{F}_\partial(\mathcal{O})$ может сильно отличаться от F_∂, а сама зависимость $\mathcal{O} \longmapsto \mathbb{F}_\partial(\mathcal{O})$ характеризуется зачастую асимптотикой, не связанной с F_∂. Соответствующие примеры хорошо известны в теории управления [1], [2]; для последующих целей существенны их естественные аналоги ([3], гл. 1), касающиеся вопросов соблюдения интегральных ограничений. С тем, чтобы определить упомянутую асимптотику множеств $\mathbb{F}_\partial(\mathcal{O})$, нередко вводится пространство M обобщенных элементов μ, на которое тем или иным образом распространяется s. В итоге (F, s) заменяется парой $(M, \mathbf{S})$, согласованной с (F, s); грубо говоря, M содержит F с точностью до несущественного преобразования, а $\mathbf{S}$ играет роль продолжения s до отображения на M. Такое продолжение осуществляется зачастую на ТП $(M, \mathcal{T}_1)$, причем в виде $\mathbf{S}$ удается получить непрерывный оператор из $(M, \mathcal{T}_1)$ в $(\mathbb{X}, \mathcal{T})$. Более того, множество $\mathbf{S}^{-1}(\mathbb{Y})$ в целом ряде случаев определяет асимптотику релаксаций $\mathbb{F}_\partial(\mathcal{O})$ при сужении окрестности $\mathcal{O}$ к множеству $\mathbb{Y}$. Наиболее известны [1], [2] конструкции с использованием компактификаций, для которых $(M, \mathcal{T}_1)$ компактное [4], [5] ТП, что возможно не всегда. Кроме того, наряду с $\mathbb{Y}$-ограничением могут присутствовать и другие условия, затрудняющие построение компактификаторов, согласованных с данными исследуемой задачи. Ограничимся обсуждением только ограничения, характеризуемого множеством $\mathbb{Y}$, а также его релаксаций. В связи с переходом к $(M, \mathbf{S})$ возникает вопрос об универсальности $\mathbf{S}^{-1}(\mathbb{Y})$ или более общих множеств такого типа по отношению к различным вариантам возмущения исходного $\mathbb{Y}$-ограничения. Так, например, может оказаться излишним применение на этапе

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (97-01-00458) и Минвуза РФ (97-0-1.9-19).

релаксации (ограничений) всевозможных окрестностей $\mathcal{O}$ множества $\mathbb{Y}$; в соответствующих прикладных задачах могут возникать и иные по форме варианты ослабления $\mathbb{Y}$-ограничения (так, напр., в задачах математического программирования типично ослабление неравенств). Тогда возникает вопрос: за какие асимптотики ослабленных условий отвечает $\mathbf{S}^{-1}(\mathbb{Y})$? В последующем изложении приведена постановка, в которой эта "ответственность" распространяется на весьма обширный класс асимптотик. Исследуется случай интегральных ограничений на выбор управлений $f \in F$, для которого рассматривается расширение в классе к.-а. мер со свойством слабой абсолютной непрерывности относительно заданного пространства с мерой.

2. Символика и простейшие понятия

Ниже используются традиционные обозначения. Используется индексная форма записи функций. Если A и B — множества, то, как в [6], через B^A обозначаем множество всех функций из A в B. Если A, B и C — множества, причем $C \subset A$, то для $h \in B^A$ выражение $(h \mid C)$ определяет сужение h на C ([4], c. 26; [7], c. 13), $(h \mid C) \in B^C$, а $h^1(C)$ используется для обозначения h-образа множества C. Через $\mathrm{Fin}(T)$ условимся обозначать семейство всех непустых конечных подмножеств множества T; если при этом $P \in \mathrm{Fin}(T)$, то $(\mathrm{Fin})[T \mid P] \triangleq \{Q \in \mathrm{Fin}(T) \mid P \subset Q\}$. Через $\mathrm{cl}(\cdot, \tau)$ обозначаем далее оператор замыкания в ТП с топологией τ; если при этом A есть множество в упомянутом ТП, то через $\tau\mid_A$ обозначаем относительную топологию множества A, рассматриваемого в виде подпространства исходного ТП (с топологией τ). Ниже сходимость понимается по Мору-Смиту [4]. Направленности изображаются далее посредством троек (подобно [3], c. 38), у каждой из которых два первых элемента составляют непустое направленное множество, а третий —- оператор на упомянутом направленном множестве. Для обозначения сходимости направленности $(\mathbb{T}, \preceq, f)$ в ТП (X, τ) к точке $x \in X$ используем, как и в ([3], c. 38), символ $(\mathbb{T}, \preceq, f) \xrightarrow{\tau} x$. Суперпозиции операторов традиционно обозначаются символом $\circ$. Особую роль в дальнейшем играет конструкция тихоновского произведения [4], [5]. Ограничимся здесь случаем тихоновского произведения экземпляров вещественной прямой $\mathbb{R}$, т. е. случаем топологизации пространств, элементами которых являются функционалы. Если P — непустое множество, а τ — топология $\mathbb{R}$, то через $\otimes^P(\tau)$ обозначаем естественную топологию множества $\mathbb{R}^P$, имеющую смысл топологии тихоновского произведения экземпляров $(\mathbb{R}, \tau)$ с индексным множеством P (см. в этой связи [3], c. 40). В качестве τ используем либо обычную $|\cdot|$-топологию $\mathbb{R}$, обозначаемую через $\tau_{\mathbb{R}}$, либо дискретную топологию τ_∂ множества $\mathbb{R}$, т. е. семейство всех подмножеств $\mathbb{R}$. В качестве важного обстоятельства отметим следующее. Если P — непустое множество, τ — топология $\mathbb{R}$, $(H, \preceq, l)$ есть направленность в $\mathbb{R}^P$ и $f \in \mathbb{R}^P$, то сходимость $(H, \preceq, l)$ к f в $(\mathbb{R}^P, \otimes^P(\tau))$ имеет место тогда и только тогда, когда при всяком выборе $p \in P$ направленность $(H, \preceq, l(\cdot)(p))$, где $l(\cdot)(p)$ есть функционал на H со значениями $l(h)(p)$, сходится в $(\mathbb{R}, \tau)$ к $f(p)$. Данное очевидное обстоятельство, следующее из определения тихоновского произведения, используется далее без дополнительных пояснений. Если H — множество, то через $\mathcal{B}(H)$ условимся обозначать множество всех непустых семейств $\mathcal{H}$ подмножеств H со свойством $\forall A \in \mathcal{H}$ $\forall B \in \mathcal{H}$ $\exists C \in \mathcal{H} : C \subset A \cap B$ (см. [8], c. 226); для $\widetilde{\mathcal{H}} \in \mathcal{B}(H)$ условие $\emptyset \notin \widetilde{\mathcal{H}}$ определяет основное свойство базиса фильтра H, так что базисы фильтров H суть нетривиальные в упомянутом смысле элементы $\mathcal{B}(H)$ и только они. Если X — непустое множество, $\mathcal{X} \in \mathcal{B}(X)$, $(\mathbb{T}, \tau)$ — ТП ($\mathbb{T} \neq \emptyset$) и $s \in \mathbb{T}^X$, то через $(\tau - \mathrm{LIM})[\mathcal{X} \mid s]$ обозначаем пересечение всех множеств $\mathrm{cl}(s^1(U), \tau)$, $U \in \mathcal{X}$. Упомянутый естественный теоретико-множественный предел, подобный используемым в конструкциях [9], допускает исчерпывающее представление в терминах множества притяжения ([3], (2.5.1)) (в классе приближенных решений-направленностей). В этой связи напомним известное [10] понятие фильтра, ассоциированного с произвольной направленностью: если $(T, \preceq, h)$ есть направленность в множестве H, то через $(H - \mathrm{ass})[T; \preceq; h]$ обозначаем семейство всех множеств V, $V \subset H$, со свойством $\exists \alpha \in T \ \forall \beta \in T : (\alpha \preceq \beta) \Longrightarrow (h(\beta) \in V)$. Конструкция ассоциированного фильтра непосредственно используется в представлении ([3], (2.5.1)). Отметим, что линейные операции, умножение и упорядоченность в пространствах функционалов определяются далее поточечно, если специально не оговаривается противное.

Всюду в дальнейшем фиксируется непустое множество E, полуалгебра ([3], с. 58; [11]) $\mathcal{L}$ подмножеств E, а также неотрицательная вещественнозначная (в.-з.) к.-а. мера η на $\mathcal{L}$, так что $(E, \mathcal{L}, \eta)$ — аналог пространства с мерой. Конус $(\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ всех неотрицательных в.-з. к.-а. мер на $\mathcal{L}$ порождает линейное подпространство $\mathbb{R}^{\mathcal{L}}$, обозначаемое, как и в [3], [8], через $\mathbb{A}(\mathcal{L})$. Элементы $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ суть в.-з. к.-а. меры на $\mathcal{L}$ со свойством ограниченности полной вариации и только они. Мы следуем (в основном) системе обозначений [3], [8] и напоминаем лишь некоторые из них, наиболее важные в дальнейшем. Следуя ([3], (3.4.1)), введем линейное многообразие $B_0(E, \mathcal{L})$ всевозможных ступенчатых в смысле $(E, \mathcal{L})$ функционалов на E. Замыкание $B_0(E, \mathcal{L})$ в банаховом пространстве $\mathbb{B}(E)$ всех ограниченных функционалов на E с традиционной sup-нормой $\|\cdot\|$ ([7], с. 261) обозначаем через $B(E, \mathcal{L})$, что вполне согласуется и с ([7], с. 279). Как подпространство $(\mathbb{B}(E), \|\cdot\|)$, $B(E, \mathcal{L})$ само является банаховым пространством, причем $B^*(E, \mathcal{L})$ — пространство, топологически сопряженное к $B(E, \mathcal{L})$, изометрически изоморфно $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ с (сильной) нормой-вариацией. В связи с этой нормой ([3], с. 62) уместно упомянуть, что $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ с упорядоченностью, индуцированной из $\mathbb{R}^{\mathcal{L}}$ поточечным порядком $\stackrel{\leq}{=}$ (пространства $\mathbb{R}^{\mathcal{L}}$), есть полная векторная решетка. Если $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $\nu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$, то через $\mu \vee \nu$ обозначаем точную верхнюю грань $\{\mu; \nu\}$ в упомянутой решетке $\mathbb{A}(\mathcal{L})$. В частности, $\forall \mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) : v_\mu \stackrel{\triangle}{=} \mu \vee (-\mu) \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$. Тем самым для элементов $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ определяется вариация как функция множеств. Сильная норма $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ определяется в виде функционала $\mu \longmapsto v_\mu(E) : \mathbb{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow [0, \infty[$. Пусть $\forall b \in [0, \infty[: U_b(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \mid v_\mu(E) \leq b\}$. Мы оснащаем $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ $*$-слабой топологией $\tau_*(\mathcal{L})$ ([3], с. 70) (общее определение см. в ([7], гл. V)), соответствующей двойственности $(B(E, \mathcal{L}), \mathbb{A}(\mathcal{L}))$, получая в виде

$$(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_*(\mathcal{L})) \tag{2.1}$$

локально выпуклый σ-компакт (условия компактности в ТП (2.1) определяются известной теоремой Алаоглу ([7], гл. V); см. также конкретизированный вариант ([3], с. 71)). Ограниченная $*$-слабая топология $\tau^*_{\mathbb{B}}(\mathcal{L})$ множества $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ определяется, как обычно, в виде семейства всех множеств G, $G \subset \mathbb{A}(\mathcal{L})$, таких, что

$$\forall b \in [0, \infty[: G \cap U_b(\mathcal{L}) \in \tau_*(\mathcal{L}) \mid_{U_b(\mathcal{L})} .$$

Полагаем, что $\mathfrak{M}_*(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \{\tau_*(\mathcal{L}); \tau^*_{\mathbb{B}}(\mathcal{L})\}$. Кроме того, $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ оснащаем топологиями $\tau_\otimes(\mathcal{L})$ и $\tau_0(\mathcal{L})$ ([3], с. 80) подпространств $(\mathbb{R}^{\mathcal{L}}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_{\mathbb{R}}))$ и $(\mathbb{R}^{\mathcal{L}}, \otimes^{\mathcal{L}}(\tau_\partial))$ соответственно. Тогда $\mathfrak{M}(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \mathfrak{M}_*(\mathcal{L}) \cup \{\tau_\otimes(\mathcal{L}); \tau_0(\mathcal{L})\}$. Сходимость (направленностей) в $\langle \mathbb{A}(\mathcal{L}), \mathfrak{M}(\mathcal{L}) \rangle$ отождествляем со сходимостью по Мору–Смиту в смысле каждой из топологий $\tau \in \mathfrak{M}(\mathcal{L})$. Как и в ([3], гл. IV), $(\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \eta]$ есть конус всех к.-а. мер $\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$ со свойством

$$\forall L \in \mathcal{L} : (\eta(L) = 0) \Longrightarrow (\mu(L) = 0), \tag{2.2}$$

а $\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$ есть линейное подпространство $\mathbb{A}(\mathcal{L})$, порожденное конусом $(\mathrm{add})^+[\mathcal{L}; \eta]$. Легко видеть, что $\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$ есть множество всех $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ со свойством (2.2), которое иногда именуется слабой абсолютной непрерывностью относительно η [12]. При $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $f \in B(E, \mathcal{L})$ к.-а. мера $f * \mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ ([3], с. 70) есть неопределенный μ-интеграл f. Используем далее непустое множество $\mathbb{M}(\mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}] \times B(E, \mathcal{L})$ и оператор $\mathcal{I}$, определяемый в виде

$$(\mu, f) \longmapsto f * \mu : \mathbb{M}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{A}(\mathcal{L}); \tag{2.3}$$

поскольку $\eta \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{L}]$, то у оператора (2.3) определено η-сечение $\mathcal{I}(\eta, \cdot)$, действующее из $B(E, \mathcal{L})$ в $\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$ по правилу $f \longmapsto f * \eta$. Используем универсальный аппроксиматор ([3], (4.3.11)) в несколько расширительном толковании. Через $\mathbb{D}$ условимся обозначать (непустое) множество всех неупорядоченных ([3], с. 58) конечных $\mathcal{L}$-разбиений E, $\mathbb{D} \subset \mathrm{Fin}(\mathcal{L})$; тогда направление [4], [5] $\prec$ на $\mathbb{D}$, соответствующее ([3], (4.3.1)), определяется вписанностью ([5], с. 196) одного разбиения множества E в другое. Для $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ определяем $\theta_\eta[\mu] \in \mathbb{R}^{\mathcal{L}}$ условиями: $\theta_\eta[\mu](L) \triangleq \mu(L)/\eta(L)$ при $\eta(L) \neq 0$, $\theta_\eta[\mu](L) \triangleq 0$ в противном случае. Тогда $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ и $\mathcal{K} \in \mathbb{D}$ порождают функционал $\Theta_\eta[\mu;\mathcal{K}] \in B_0(E,\mathcal{L})$ по правилу $\forall L \in \mathcal{K}\ \forall x \in L : \Theta_\eta[\mu;\mathcal{K}](x) \triangleq \theta_\eta[\mu](L)$. Если же фиксирована к.-а. мера $\mu \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$, то в виде

$$(\mathbb{D}, \prec, \mathcal{I}(\eta,\cdot) \circ \Theta_\eta[\mu;\cdot]) \tag{2.4}$$

имеем направленность в $U_c(\mathcal{L})\mid_{c=v_\mu(E)}$, которая сходится к μ в $\langle \mathbb{A}(\mathcal{L}), \mathfrak{M}(\mathcal{L})\rangle$ так, что (2.4) сходится (к μ) в смысле каждой топологии $\tau \in \mathfrak{M}(\mathcal{L})$. В связи с универсальным аппроксиматором (2.4) см. ([3], гл. IV; [13], [14]). Напомним свойства плотности множества всех неопределенных η-интегралов элементов $B(E,\mathcal{L})$ в $\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$ (см. [3], гл. IV; [14]). В данной работе рассматриваем только следствия этого полезного факта, связанного, в частности, с универсальной сходимостью направленностей вида (2.4). Используем простейшую схему интегрирования ([3], гл. III), следуя традиционной символике (см., в частности, ([3], с. 71) в связи с традиционным обозначением функции-модуля и свойства неопределенного интеграла ([3], с. 70); более общие конструкции интегрирования по к.-а. мере см. в ([7], гл. III)).

3. Релаксация интегральных ограничений: общий случай

В этом разделе исследуются вопросы, связанные с соблюдением абстрактной системы интегральных ограничений и их релаксацией в интересах топологической регуляризации соответствующего допустимого множества (множества допустимых элементов). Пусть Γ и Ω — непустые множества;

$$\gamma \longmapsto S_\gamma : \Gamma \longrightarrow B(E,\mathcal{L}); \tag{3.1}$$

$$\omega \longmapsto L_\omega : \Omega \longrightarrow \mathcal{L}; \tag{3.2}$$

$$\omega \longmapsto c_\omega : \Omega \longrightarrow [0,\infty[; \tag{3.3}$$

Y — подмножество $\mathbb{R}^\Gamma$, замкнутое в ТП

$$(\mathbb{R}^\Gamma,\ \otimes^\Gamma(\tau_{\mathbb{R}})). \tag{3.4}$$

Никаких дополнительных ограничений на выбор операторов (3.1)–(3.3) в третьем разделе не накладывается. Рассмотрим следующее условие на выбор $f \in B(E,\mathcal{L})$:

$$\Big(\Big(\int_E S_\gamma f\,d\eta\Big)_{\gamma\in\Gamma} \in Y\Big)\ \&\ \Big(\forall \omega \in \Omega : \int_{L_\omega} |f|\,d\eta \le c_\omega\Big). \tag{3.5}$$

Известно ([3], гл. I), что уже в простейших случаях условие (3.5) оказывается весьма нерегулярным при изменении своих параметров. В этой связи рассматриваем релаксации (3.5), стремясь к обнаружению некоторого "скрытого" стабильного состояния, имеющего смысл расширения и свободного от патологий, подобных имеющим место в примерах ([3], гл. I). Используем при этом, как и в [3], [8], [13], [14], конструкцию своеобразной "вилки", сталкивая глубокое и частичное возмущения (3.5). Более того, в варианте частичного возмущения (3.5) будем даже несколько отступать от самой концепции ослабления упомянутого условия, стремясь к использованию в качестве управлений f (см. (3.5)) только ступенчатых в смысле $(E,\mathcal{L})$ функционалов на E, т. е. элементов $B_0(E,\mathcal{L})$. В конструкции глубокого возмущения (3.5), напротив, идем на предельное ослабление (3.5), включая определенную ломку самой структуры управления: допускаем здесь возмущение η и, таким образом, используем в качестве управлений элементы $\mathbb{M}(\mathcal{L})$. Тем не менее, здесь удается установить существование единой "асимптотики", определяемой условием

$$\Big(\Big(\int_E S_\gamma\,d\mu\Big)_{\gamma\in\Gamma} \in Y\Big)\ \&\ (\forall \omega \in \Omega : v_\mu(L_\omega) \le c_\omega) \tag{3.6}$$

на выбор $\mu \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$. В этой связи обозначим через $\widetilde{\mathbb{A}}_0$ допустимое множество (3.6), т. е. множество всех $\mu \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$ со свойством (3.6). Уместно ввести оператор $\mathbb{S}^*$ вида

$$\mu \longmapsto \Big(\int_E S_\gamma d\mu\Big)_{\gamma\in\Gamma} : \mathbb{A}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathbb{R}^\Gamma, \tag{3.7}$$

получая (в виде $\mathbb{S}^*$) непрерывное отображение из ТП (2.1) в ТП (3.4). Напомним ([3], с. 86), что $\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$ образует замкнутое подпространство ТП (2.1). Пусть

$$\tau_*^{(\eta)}[\mathcal{L}] \stackrel{\triangle}{=} \tau_*(\mathcal{L}) \mid_{\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]}$$

(см. [3], (4.2.16)). Тогда след $\mathbb{S} \stackrel{\triangle}{=} (\mathbb{S}^* \mid \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}])$ оператора (3.7) обладает непрерывностью как отображение из ТП

$$(\mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}], \tau_*^{(\eta)}[\mathcal{L}]) \tag{3.8}$$

в ТП (3.4). Сама замена ТП (2.1) и оператора $\mathbb{S}^*$ на ТП (3.8) и $\mathbb{S}$ соответственно может рассматриваться как несущественное преобразование, в результате которого получим полезное представление

$$\widetilde{\mathbb{A}}_0 = \mathbb{S}^{-1}(Y) \cap \{\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L}) \mid \forall \omega \in \Omega : v_\mu(L_\omega) \le c_\omega\}. \tag{3.9}$$

По аналогии с (3.9) введем специальные множества в пространстве обычных управлений простейшего типа, ориентируясь на получение аналогов исходного условия (3.5). Если H — подмножество $\mathbb{R}^\Gamma$ и Q — подмножество Ω, то через $(\mathrm{Adm})[H;Q]$ обозначаем множество всех $f \in B_0(E,\mathcal{L})$ со свойством

$$\Big(\Big(\int_E S_\gamma f d\eta\Big)_{\gamma\in\Gamma} \in H\Big) \,\&\, \Big(\forall \omega \in Q : \int_{L_\omega} |f| d\eta \le c_\omega\Big). \tag{3.10}$$

В виде $(\mathrm{Adm})[Y;\Omega]$ имеем допустимое множество для условия, аналогичного (3.5), но реализуемого на пространстве ступенчатых управлений $f \in B_0(E,\mathcal{L})$. Однако основную роль (3.10) играет в случае, когда H есть окрестность Y в той или иной топологии $\mathbb{R}^\Gamma$ и $Q \in \mathrm{Fin}(\Omega)$. Через $\mathcal{Y}$ обозначаем семейство всех окрестностей ([15], с. 19) множества Y в ТП (3.4). Тогда

$$\widehat{\mathfrak{A}} \stackrel{\triangle}{=} \{(\mathrm{Adm})[H;Q] : (H,Q) \in \mathcal{Y} \times \mathrm{Fin}(\Omega)\} \in \mathcal{B}(B_0(E,\mathcal{L})). \tag{3.11}$$

В виде (3.11) фактически определена асимптотика ослабленных версий вышеупомянутого ступенчатого аналога условия (3.5). Другую асимптотику определяем подобно [13], действуя по принципу: возмущается "все, что можно". Если $\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L})$, $P \in \mathrm{Fin}(\Gamma)$, $Q \in \mathrm{Fin}(\Omega)$ и $\varepsilon \in]0,\infty[$, то через $(\mathbb{A}\mathrm{dm})[\mathcal{K};P;Q;\varepsilon]$ обозначим множество всех $(\mu, f) \in \mathbb{M}(\mathcal{L})$ со свойством

$$((\mu \mid \mathcal{K}) = (\eta \mid \mathcal{K})) \,\&\, \Big(\exists y \in Y \ \forall \gamma \in P : \Big|\int_E S_\gamma f d\mu - y(\gamma)\Big| \le \varepsilon\Big) \,\& \\ \& \Big(\forall \omega \in Q : \int_{L_\omega} |f| d\mu \le c_\omega + \varepsilon\Big). \tag{3.12}$$

Семейство $\mathfrak{A}$ всех множеств $(\mathbb{A}\mathrm{dm})[\mathcal{K};P;Q;\varepsilon]$, $(\mathcal{K},P,Q,\varepsilon) \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L}) \times \mathrm{Fin}(\Gamma) \times \mathrm{Fin}(\Omega) \times]0,\infty[$, есть элемент $\mathcal{B}(\mathbb{M}(\mathcal{L}))$

$$\mathfrak{A} \stackrel{\triangle}{=} \{(\mathbb{A}\mathrm{dm})[\mathcal{K};P;Q;\varepsilon] : (\mathcal{K},P,Q,\varepsilon) \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L}) \times \mathrm{Fin}(\Gamma) \times \mathrm{Fin}(\Omega) \times]0,\infty[\,\} \in \mathcal{B}(\mathbb{M}(\mathcal{L})). \tag{3.13}$$

Связь асимптотик (3.11), (3.13) может быть легко установлена с использованием канонического базиса ТП (3.4). Действительно, если $y \in \mathbb{R}^\Gamma$, $P \in \mathrm{Fin}(\Gamma)$ и $\varepsilon \in]0,\infty[$, то множество

$$N(y,P,\varepsilon) \stackrel{\triangle}{=} \{h \in \mathbb{R}^\Gamma \mid \forall \gamma \in P : |y(\gamma) - h(\gamma)| \le \varepsilon\} \tag{3.14}$$

есть окрестность ([15], с. 19) точки y в ТП (3.4). Если же $P \in \mathrm{Fin}(\Gamma)$ и $\varepsilon \in]0,\infty[$, то множество

$$\mathbb{N}(P,\varepsilon) \overset{\triangle}{=} \cup_{y\in Y} N(y,P,\varepsilon) \tag{3.15}$$

есть окрестность (в смысле ([15], с. 19)) множества Y в ТП (3.4). В самом деле, (3.15) содержит объединение всех множеств $\{h \in \mathbb{R}^\Gamma \mid \forall\gamma \in P : |y(\gamma)-h(\gamma)| < \varepsilon\}$, $y \in Y$, которое открыто по самому определению топологии поточечной сходимости. Если $P \in \mathrm{Fin}(\Gamma)$ и $\varepsilon \in]0,\infty[$, то множество $\mathbb{N}(P,\varepsilon) \in \mathcal{Y}$ порождает вместе с $Q \in \mathrm{Fin}(\Omega)$ множество из семейства (3.11): $(\mathrm{Adm})[\mathbb{N}(P,\varepsilon);Q] \in \widehat{\mathfrak{A}}$. Вместе с тем условие (3.12) на выбор $(\mu,f) \in \mathbb{M}(\mathcal{L})$ эквивалентно условию

$$((\mu \mid \mathcal{K}) = (\eta \mid \mathcal{K}))\,\&\,\Big(\Big(\int_E S_\gamma f\,d\mu\Big)_{\gamma\in\Gamma} \in \mathbb{N}(P,\varepsilon)\Big)\,\&\,\Big(\forall\omega \in Q : \int_{L_\omega} |f|d\mu \le c_\omega + \varepsilon\Big). \tag{3.16}$$

Далее, в силу (3.16) при $\mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathcal{L})$, $P \in \mathrm{Fin}(\Gamma)$, $Q \in \mathrm{Fin}(\Omega)$ и $\varepsilon \in]0,\infty[$ имеет место вложение $\{\eta\} \times (\mathrm{Adm})[\mathbb{N}(P,\varepsilon);Q] \subset (\mathbb{A}\mathrm{dm})[\mathcal{K};P;Q;\varepsilon]$. Как следствие имеем

$$\forall H \in \mathfrak{A}\ \exists \widehat{H} \in \widehat{\mathfrak{A}} : \{\eta\} \times \widehat{H} \subset H. \tag{3.17}$$

В свою очередь из (3.17) вытекают естественные оценки для множеств притяжения ([3], (2.5.1)). Именно,

$$(\tau - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}} \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)] \subset (\tau - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A} \mid \mathcal{I}] \quad \forall\tau \in \mathfrak{M}(\mathcal{L}). \tag{3.18}$$

При обосновании (3.18) используется (3.17) и монотонность операций замыкания и взятия образа; кроме того, учитывается здесь (и в дальнейшем), что при всяком выборе множества H, $H \subset B(E,\mathcal{L})$, справедливо равенство $\mathcal{I}(\eta,\cdot)^1(H) = \mathcal{I}^1(\{\eta\} \times H)$.

Теорема. *Множество $\widetilde{\mathbb{A}}_0$ определяет множество притяжения для асимптотик $\widehat{\mathfrak{A}}$ и $\mathfrak{A}$, универсальное в смысле $\widetilde{\mathbb{A}}_0 = (\tau - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A} \mid \mathcal{I}] = (\tau - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}} \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)]\ \forall\tau \in \mathfrak{M}_*(\mathcal{L})$.*

Доказательство. Используем (3.18) и утверждения [13]. При этом по аналогии с [13] устанавливается

$$\widetilde{\mathbb{A}}_0 = (\tau - \mathrm{LIM})[\mathfrak{A} \mid \mathcal{I}]\ \ \forall\tau \in \mathfrak{M}_*(\mathcal{L}). \tag{3.19}$$

Из (3.18), (3.19) имеем $(\tau - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}} \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)] \subset \widetilde{\mathbb{A}}_0\ \forall\tau \in \mathfrak{M}_*(\mathcal{L})$. Кроме того, имеем из очевидных соотношений для топологий из $\mathfrak{M}_*(\mathcal{L})$ вложение

$$(\tau^*_{\mathbb{B}}(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}} \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)] \subset (\tau_*(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}} \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)]. \tag{3.20}$$

Поэтому (см. (3.18)–(3.20)) достаточно установить вложение

$$\widetilde{\mathbb{A}}_0 \subset (\tau^*_{\mathbb{B}}(\mathcal{L}) - \mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}} \mid \mathcal{I}(\eta,\cdot)]. \tag{3.21}$$

Для этого воспользуемся представлением ([3], (2.5.1)) множества притяжения в классе приближенных решений-направленностей, применяя схему универсального аппроксиматора (см. (2.4)) на основе конструкции ([3], гл. IV). Пусть $\mu \in \widetilde{\mathbb{A}}_0$. Тогда $\mu \in \mathbb{A}_\eta[\mathcal{L}]$ удовлетворяет (3.6) так, что, в частности, имеет место свойство

$$u \overset{\triangle}{=} \mathbb{S}(\mu) \in Y. \tag{3.22}$$

Рассмотрим направленность $(\mathbb{D},\prec,\Theta_\eta[\mu;\cdot])$ в $B_0(E,\mathcal{L})$, которая после погружения в $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ реализует универсально сходящуюся направленность (2.4); $\mathbb{S} \circ \mathcal{I}(\eta,\cdot) \circ \Theta_\eta[\mu;\cdot] = \mathbb{S}^* \circ \mathcal{I}(\eta,\cdot) \circ \Theta_\eta[\mu;\cdot]$. Поэтому (следствие сходимости (2.4) в ТП (2.1)) по свойствам (3.7) имеем сходимость

$$(\mathbb{D},\prec,\mathbb{S} \circ \mathcal{I}(\eta,\cdot) \circ \Theta_\eta[\mu;\cdot]) \xrightarrow{\otimes^\Gamma(\tau_{\mathbb{R}})} u. \tag{3.23}$$

Из (3.23) вытекает, что при всяком выборе $H \in \mathcal{Y}$ имеет место

$$\Big(\int_E S_\gamma \Theta_\eta[\mu;\mathcal{K}]d\eta\Big)_{\gamma\in\Gamma} \in H \tag{3.24}$$

с некоторого момента в смысле $(\mathbb{D},\prec)$; для обоснования этого утверждения, наряду с (3.22), следует заметить только, что каждая окрестность Y является одновременно окрестностью функционала u (3.22). Используем также простейшие свойства неопределенного интеграла (см. [3], с. 70), благодаря которым функционал в левой части (3.24) может рассматриваться как значение оператора $\mathbb{S}\circ\mathcal{I}(\eta,\cdot)\circ\Theta_\eta[\mu;\cdot]$ в точке $\mathcal{K}\in\mathbb{D}$. Зафиксируем $\Lambda\in\widehat{\mathfrak{A}}$ и подберем $H\in\mathcal{Y}$ и $Q\in\mathrm{Fin}(\Omega)$ со свойством $\Lambda = (\mathrm{Adm})[H;Q]$. С использованием (3.23), (3.24) подберем далее $\mathcal{K}_1\in\mathbb{D}$ так, что для $\mathcal{K}\in\mathbb{D}$, $\mathcal{K}_1\prec\mathcal{K}$, имеет место (3.24). Рассмотрим разложение Жордана для к.-а. меры μ, получая в виде μ^+ и μ^- (неотрицательные) к.-а. меры — элементы $(\mathrm{add})^+[\mathcal{L};\eta]$ со свойствами $(\mu=\mu^+-\mu^-)\,\&\,(v_\mu=\mu^++\mu^-)$. Тогда $\Theta_\eta[\mu;\mathcal{K}]=\Theta_\eta[\mu^+;\mathcal{K}]-\Theta_\eta[\mu^-;\mathcal{K}]$ при $\mathcal{K}\in\mathbb{D}$. Направленность $(\mathbb{D},\prec,\mathcal{I}(\eta,\cdot)\circ\Theta_\eta[\mu^+;\cdot])$ сходится к μ^+ в смысле $\tau_0(\mathcal{L})$; в аналогичном смысле направленность $(\mathbb{D},\prec,\mathcal{I}(\eta,\cdot)\circ\Theta_\eta[\mu^-;\cdot])$ сходится к μ^-. Поскольку $\{L_\omega:\omega\in Q\}$ — конечное семейство, можно указать ([3], с. 80) $\mathcal{K}_2\in\mathbb{D}$ так, что

$$(\mathcal{K}_2\prec\mathcal{K})\Longrightarrow\Big(\forall\omega\in Q:\Big(\int_{L_\omega}\Theta_\eta[\mu^+;\mathcal{K}]d\eta=\mu^+(L_\omega)\Big)\,\&\,\Big(\int_{L_\omega}\Theta_\eta[\mu^-;\mathcal{K}]d\eta=\mu^-(L_\omega)\Big)\Big)\quad\forall\mathcal{K}\in\mathbb{D}.$$

Но в этом случае при $\mathcal{K}\in\mathbb{D}$, $\mathcal{K}_2\prec\mathcal{K}$, согласно (3.6) имеет место

$$\int_{L_\omega}\mid\Theta_\eta[\mu;\mathcal{K}]\mid d\eta\le c_\omega\quad\forall\omega\in Q. \tag{3.25}$$

Для $\{\mathcal{K}_1;\mathcal{K}_2\}$ подбираем в $\mathbb{D}$ мажоранту $\widehat{\mathcal{K}}\in\mathbb{D}$ (в смысле $(\mathbb{D},\prec)$). Из (3.10), (3.24) и (3.25) получаем для $\mathcal{K}\in\mathbb{D}$, $\widehat{\mathcal{K}}\prec\mathcal{K}$, свойство $\Theta_\eta[\mu;\mathcal{K}]\in\Lambda$. Поскольку $\Lambda\in\widehat{\mathfrak{A}}$ выбиралось произвольно, то установлено

$$\widehat{\mathfrak{A}}\subset(B_0(E,\mathcal{L})-\mathrm{ass})[\mathbb{D};\prec;\Theta_\eta[\mu;\cdot]].$$

С другой стороны, в силу универсальной сходимости направленности (2.4) имеем, в частности,

$$(\mathbb{D},\prec,\mathcal{I}(\eta,\cdot)\circ\Theta_\eta[\mu;\cdot])\xrightarrow{\tau^*_{\mathbb{B}}(\mathcal{L})}\mu.$$

Теперь $\mu\in(\tau^*_{\mathbb{B}}(\mathcal{L})-\mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}\mid\mathcal{I}(\eta,\cdot)]$ согласно ([3], (2.5.1)), чем и завершается обоснование вложения (3.21), что в совокупности с (3.20) означает справедливость следующей цепочки вложений:

$$\widetilde{\mathbb{A}}_0\subset(\tau^*_{\mathbb{B}}(\mathcal{L})-\mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}\mid\mathcal{I}(\eta,\cdot)]\subset(\tau_*(\mathcal{L})-\mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}\mid\mathcal{I}(\eta,\cdot)]. \tag{3.26}$$

С учетом вышеупомянутых следствий (3.19), касаюшихся $\widehat{\mathfrak{A}}$, из (3.26) вытекает $\widetilde{\mathbb{A}}_0=(\tau-\mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}\mid\mathcal{I}(\eta,\cdot)]\ \forall\tau\in\mathfrak{M}_*(\mathcal{L})$. Из (3.19) и последнего равенства получаем утверждение теоремы. □

Отметим, что (см. [13]) по аналогии со второй частью доказательства теоремы устанавливается справедливость следующего утверждения: всегда

$$\widetilde{\mathbb{A}}_0\subset(\tau_0(\mathcal{L})-\mathrm{LIM})[\widehat{\mathfrak{A}}\mid\mathcal{I}(\eta,\cdot)]. \tag{3.27}$$

В самом деле, зафиксируем, как и при обосновании (3.21), $\mu\in\widetilde{\mathbb{A}}_0$, после чего повторим все построения на основе (3.22)–(3.25), но в заключение воспользуемся сходимостью

$$(\mathbb{D},\prec,\mathcal{I}(\eta,\cdot)\circ\Theta_\eta[\mu;\cdot])\xrightarrow{\tau_0(\mathcal{L})}\mu.$$

Тогда в полном соответствии с ([3], (2.5.1)) получим, что μ есть элемент множества в правой части (3.27), чем и завершается соответствующее обоснование. Заметим здесь же, что из теоремы вытекает в случае $\widetilde{\mathbb{A}}_0\neq\emptyset$ свойство $(\emptyset\notin\mathfrak{A})\,\&\,(\emptyset\notin\widehat{\mathfrak{A}})$. Содержательный смысл теоремы состоит в обосновании асимптотической эквивалентности $\mathfrak{A}$, $\widehat{\mathfrak{A}}$ с точки зрения множеств притяжения в пространстве обобщенных управлений.

Литература

1. Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* – М.: Наука, 1977. – 624 с.
2. Янг Л. *Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления.* – М.: Мир, 1974. – 488 с.
3. Ченцов А.Г. *Конечно-аддитивные меры и релаксации экстремальных задач.* – Екатеринбург: Наука, 1993. – 232 с.
4. Келли Дж.Л. *Общая топология.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1981. – 431 с.
5. Энгелькинг Р. *Общая топология.* – М.: Мир, 1986. – 751 с.
6. Куратовский К., Мостовский А. *Теория множеств.* – М.: Мир, 1970. – 416 с.
7. Данфорд Н., Шварц Дж.Т. *Линейные операторы. Общая теория.* Т. 1. – М.: Ин. лит., 1962. – 895 с.
8. Ченцов А.Г. *К вопросу о корректном расширении одной задачи о выборе плотности вероятности при ограничениях на систему математических ожиданий* // УМН. – 1995. – Т. 50. – Вып. 5. – С. 223–242.
9. Федорчук В.В., Филиппов В.В. *Общая топология. Основные конструкции*: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 252 с.
10. Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. *Общая топология*: Учеб. пособие. – М.: Высш. школа, 1979. – 336 с.
11. Неве Ж. *Математические основы теории вероятностей.* – М.: Мир, 1969. – 309 с.
12. Bhaskara Rao K.P.S., Bhaskara Rao M. *Theory of charges. A study of finitely additive measures.* – N.-Y.: Acad. Press, 1983. – 253 p.
13. Ченцов А.Г. *Задача о построении множеств асимптотической достижимости и ее регуляризация* // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 10. – С. 61–75.
14. Ченцов А.Г. *Асимптотически достижимые элементы и их обобщенное представление в классе конечно-аддитивных мер* // Тр. ин-та матем. и механ. УрО РАН. – Екатеринбург, 1995. – Т. 3. – С. 211–244.
15. Бурбаки Н. *Общая топология. Основные структуры.* – М.: Наука, 1968. – 272 с.

Институт математики и механики
Уральского отделения
Российской Академии наук

Поступила
10.06.1996