ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 8 (447)

УДК 517.44:593.3

Ю.Э. СЕНИЦКИЙ, С.А. ЛЫЧЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОРМЫ ЯДЕР КОНЕЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ

Данная работа посвящена развитию алгоритмической процедуры конечных интегральных преобразований (КИП), предусматривающей определение вектор-функций ядра преобразования в процессе решения начально-краевых задач [1]–[3]. Поскольку ядра вычисляются с точностью до произвольной постоянной, то в формуле обращения КИП, как правило, сохраняется выражение квадрата их нормы. В нестационарных задачах динамической теории упругости, описываемых системами дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, ядра КИП обычно являются линейными комбинациями специальных функций [2]–[6], поэтому точное вычисление их нормы представляет большие затруднения. В прикладных задачах для этой цели используются приближенные способы, основанные на квадратурных формулах и методах аппроксимации [7]. Однако такой подход приводит к потере точности и увеличению затрат машинного времени на вычисление старших гармоник получающихся спектральных разложений. Предлагаемый новый подход свободен от указанных недостатков, поскольку позволяет заменить невыполнимую в общем виде операцию интегрирования ядерных вектор-функций относительно несложным дифференцированием и получать аналитические выражения для квадрата их нормы.

Необходимо отметить, что из полученного в данной работе представления следуют аналогичные результаты, справедливые для скалярного случая [8], [9]. Известные приемы вычисления определенных интегралов, основанные на классических уравнениях Бесселя и Гаусса [10], [11], также могут рассматриваться как частные реализации предлагаемого общего подхода.

1. Будем рассматривать в области $D=\{[a,b]\times[0,T]\}$, $T<\infty$, начально-краевую задачу в стандартной форме [12]

$$L[\vec{\mathbf{u}}(x,t)]-\mathbf{H}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\mathbf{u}}(x,t)=\vec{\mathbf{f}}(x,t),\quad L[\vec{\mathbf{u}}(x,t)]\equiv\sum_{r=0}^{2}\mathbf{a}_r(x)\frac{\partial^{2-r}}{\partial x^{2-r}}\vec{\mathbf{u}}(x,t);$$
$$B_a[\vec{\mathbf{u}}(x,t)]\equiv\left[\mathbf{b}_a\frac{\partial}{\partial x}\vec{\mathbf{u}}(x,t)+\mathbf{c}_a\vec{\mathbf{u}}(x,t)\right]\Big|_{x=a}=0,\quad B_b[\vec{\mathbf{u}}(x,t)]\equiv\left[\mathbf{b}_b\frac{\partial}{\partial x}\vec{\mathbf{u}}(x,t)+\mathbf{c}_b\vec{\mathbf{u}}(x,t)\right]\Big|_{x=b}=0; \tag{1}$$
$$\vec{\mathbf{u}}(x,t)|_{t=0}=\vec{\mathbf{u}}_0(x),\quad \frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathbf{u}}(x,t)|_{t=0}=\dot{\vec{\mathbf{u}}}_0(x);\quad x\in[a,b],\ \ t\in[0,T],\ \ \vec{\mathbf{u}}(x,t),\vec{\mathbf{f}}(x,t)\in R^m,$$

где $\vec{\mathbf{f}}(x,t)$ является заданной, а $\vec{\mathbf{u}}(x,t)$ — искомой вектор-функцией. В выражениях (1) $\mathbf{H}$, $\mathbf{b}_a$, $\mathbf{b}_b$, $\mathbf{c}_a$, $\mathbf{c}_b$, $\mathbf{a}_r(x)$ — матрицы размерностью $m\times m$, причем $\mathbf{H}$, $\mathbf{c}_a$ и $\mathbf{c}_b$ невырожденные.

Решение $\vec{\mathbf{u}}(x,t)$ задачи (1) строится в классе вектор-функций, интегрируемых с квадратом по переменной x и дважды дифференцируемых по переменной t. Введем на сегменте $[a,b]$ гильбертово пространство $\vec{\mathbf{L}}^2_\mu$ с метрикой, определяемой скалярным произведением

$$(\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{w}})=\int_a^b\vec{\mathbf{v}}^\top\mu\mathbf{H}\vec{\mathbf{w}}\,dx, \tag{2}$$

где μ — матрица весовых функций ($\mu\mathbf{H}$ — симметричная и положительно определенная матрица ([13], с. 12)); $\top$ — знак транспонирования.

В области $D_A = \{\vec{\mathbf{v}} \mid \vec{\mathbf{v}} \in \vec{\mathbf{L}}^2_\mu,\ B_a[\vec{\mathbf{v}}] = 0,\ B_b[\vec{\mathbf{v}}] = 0\} \subset \vec{L}^2_\mu$ определим оператор A, порождаемый дифференциальной операцией L,

$$\forall\, \vec{\mathbf{v}} \in D_A \quad A[\vec{\mathbf{v}}] \equiv \mathbf{H}^{-1} L[\vec{\mathbf{v}}]. \tag{3}$$

Известно [2], что если A — самосопряженный оператор с простым дискретным спектром, то его собственные вектор-функции $\{\vec{\mathbf{K}}_i(x)\}$, порождающие ядро преобразования, образуют счетное множество, а соответствующее КИП представляется двумя формулами обращения

$$\varphi_i = \int_a^b \vec{\mathbf{K}}^\top(x)\mu(x)\vec{\mathbf{f}}(x)dx, \quad \vec{\mathbf{f}}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{\mathbf{K}}_i(x)\varphi_i \|\vec{\mathbf{K}}_i(x)\|^{-2}. \tag{4}$$

Здесь $\|\vec{\mathbf{K}}_i(x)\| = (\vec{\mathbf{K}}_i(x), \vec{\mathbf{K}}_i(x))$ — норма ядерных функций в метрике (2).

В соответствии с ([1], с. 56) собственные функции оператора A могут быть представлены в виде

$$\vec{\mathbf{K}}_i(x) = \vec{\mathbf{K}}(x,\lambda)|_{\lambda=\lambda_i} = \mathbf{Y}(x,\lambda)\vec{\mathbf{C}}(\lambda)|_{\lambda=\lambda_i}, \tag{5}$$

где $\mathbf{Y}(x,\lambda) = \|\vec{\mathbf{y}}_1(x,\lambda)\ldots\vec{\mathbf{y}}_{2m}(x,\lambda)\|$ — матрица фундаментальных решений

$$L[\vec{\mathbf{y}}_j(x,\lambda)] = -\lambda\mathbf{H}\vec{\mathbf{y}}_j(x,\lambda), \quad j = 1, 2, \ldots, 2m, \tag{6}$$

λ_i — собственные значения, которые вычисляются как корни трансцендентного уравнения

$$\det \mathbf{B}(\lambda_i) = 0, \quad \mathbf{B}(\lambda) = \left\| \begin{array}{c} \left[\mathbf{b}_a \dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{Y}(x,\lambda) + \mathbf{c}_a\mathbf{Y}(x,\lambda)\right]\Big|_{x=a} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left[\mathbf{b}_b \dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{Y}(x,\lambda) + \mathbf{c}_b\mathbf{Y}(x,\lambda)\right]\Big|_{x=b} \end{array} \right\|,$$

а $\vec{\mathbf{C}}(\lambda)$ — постоянные интегрирования, определяемые из краевых условий задачи (1). При этом без потери общности рассуждений можно считать, что последний элемент вектора $\vec{\mathbf{C}}(\lambda)$ не зависит от λ и равен 1. Тогда его остальные элементы являются решениями неоднородной системы алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{2n-1} b_{ij}(\lambda)c_j(\lambda) = -b_{2ni}(\lambda), \quad i = 1, 2, \ldots, 2n-1.$$

Здесь $b_{ij}(\lambda)$ — компоненты матрицы $\mathbf{B}(\lambda)$, а $c_j(\lambda)$ — вектора $\vec{\mathbf{C}}(\lambda)$. При условии простоты спектра оператора A указанная система уравнений невырождена [13].

Формула обращения КИП (4) представляет разложения, единственность и сходимость которых обоснована в [14], а решение начально-краевой задачи (1) может быть представлено в виде ([1], с. 23)

$$\varphi_i = \int_a^b \vec{\mathbf{K}}_i(x)^\top \left\{ \mathbf{H}[\vec{\mathbf{u}}_0(x)\cos(\lambda_i^{1/2}t) + \lambda_i^{-1/2}\dot{\vec{\mathbf{u}}}_0(x)\sin(\lambda_i^{1/2}t)] - \lambda_i^{-1/2}\int_0^t \sin(\lambda_i^{1/2}(t-\tau))\vec{\mathbf{f}}(x,\tau)d\tau \right\} dx,$$

$$\vec{\mathbf{u}}(x,t) = \sum_{i=1}^{\infty} \vec{\mathbf{K}}_i(x)\varphi_i\|\vec{\mathbf{K}}_i(x)\|^{-2}. \tag{7}$$

2. При условии интегрируемости системы уравнений (6) входящий в решение (7) квадрат нормы $\|\vec{\mathbf{K}}_i(x)\|^2$, как правило, не мог быть определен точно. Следующая теорема устанавливает возможность строгого вычисления квадратуры $\|\vec{\mathbf{K}}_i(x)\|^2$.

Теорема 1. *Если λ_i — простая точка спектра оператора A, то квадрат нормы его собственной вектор-функции определяется выражением*

$$\|\vec{\mathbf{K}}_i(x)\|^2 = \left\{ \frac{\partial \vec{\mathbf{K}}(\lambda, x)^\top}{\partial \lambda} \mathbf{Q} \frac{\partial \vec{\mathbf{K}}(\lambda, x)}{\partial x} - \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{K}}(\lambda, x)^\top}{\partial \lambda \partial x} \mathbf{P} \vec{\mathbf{K}}(\lambda, x) \Big|_{\lambda=\lambda_i} \right\} \Bigg|_{x=a}^{x=b}, \tag{8}$$

в котором

$$\mathbf{P}|_{x=a,b} = \mu \mathbf{a}_0|_{x=a,b}, \quad \mathbf{Q}|_{x=a,b} = \{\mu \mathbf{a}_0 - (\tfrac{\partial}{\partial x}(\mu \mathbf{a}_0) - \mu \mathbf{a}_1)\mathbf{R}\}|_{x=a,b}, \quad \mathbf{R}|_{x=a} = -\mathbf{c}_a^{-1}\mathbf{b}_a, \quad \mathbf{R}|_{x=b} = -\mathbf{c}_b^{-1}\mathbf{b}_b. \tag{9}$$

Доказательство. Наряду с оператором A рассмотрим возмущенный оператор $A(\varepsilon)$

$$\forall\, \vec{\mathbf{v}} \in D_{A(\varepsilon)} \;\; A(\varepsilon)[\vec{\mathbf{v}}] \equiv \mathbf{H}^{-1} L[\vec{\mathbf{v}}]; \quad D_{A(\varepsilon)} = \{\vec{\mathbf{v}} \mid \vec{\mathbf{v}} \in \vec{\mathbf{L}}^2_\mu,\; B_a[\vec{\mathbf{v}}] = 0,\; B_b[\vec{\mathbf{v}}] = \varepsilon \mathbf{M} \vec{\mathbf{v}}\},$$

где $\mathbf{M} = \operatorname{diag}(0, \ldots, 0, 1)$ — диагональная матрица, ε — малый параметр. Таким образом, возмущенным оказывается одно из граничных условий, соответствующее последней строке матрицы $\mathbf{B}(\lambda)$. Обозначим собственные значения оператора $A(\varepsilon)$ и его собственные функции соответственно через $\lambda_i(\varepsilon)$ и $\vec{\mathbf{K}}_i(x, \varepsilon)$. Заметим также, что, благодаря специальному виду возмущения, в выражение (5), соответствующее $\vec{\mathbf{K}}_i(x, \varepsilon)$, параметр возмущения ε не входит в явном виде. В соответствии с (6) для $\vec{\mathbf{K}}_i(x)$ и $\vec{\mathbf{K}}_i(x, \varepsilon)$ справедливы равенства

$$-\lambda_i(\vec{\mathbf{K}}_i(x), \vec{\mathbf{K}}_i(x, \varepsilon)) = (A[\vec{\mathbf{K}}_i(x)], \vec{\mathbf{K}}_i(x, \varepsilon)),$$
$$-\lambda_i(\varepsilon)(\vec{\mathbf{K}}_i(x), \vec{\mathbf{K}}_i(x, \varepsilon)) = (\vec{\mathbf{K}}_i(x), A(\varepsilon)[\vec{\mathbf{K}}_i(x, \varepsilon)]),$$

из которых следует

$$(\vec{\mathbf{K}}_i(x), \vec{\mathbf{K}}_i(x, \varepsilon))(\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_i) = (A[\vec{\mathbf{K}}_i(x)], \vec{\mathbf{K}}_i(x, \varepsilon)) - (\vec{\mathbf{K}}_i(x), A(\varepsilon)[\vec{\mathbf{K}}_i(x, \varepsilon)]). \tag{10}$$

После интегрирования по частям правой части (10) в силу симметричности L получаем выражение, содержащее только внеинтегральные члены,

$$(\vec{\mathbf{K}}_i(x), \vec{\mathbf{K}}_i(x, \varepsilon))(\lambda_i(\varepsilon) - \lambda_i) = [\vec{\mathbf{K}}_i(x), \vec{\mathbf{K}}_i(x, \varepsilon)]|_a^b. \tag{11}$$

Здесь

$$[\vec{\mathbf{K}}_i(x), \vec{\mathbf{K}}_i(x, \varepsilon)] = \vec{\mathbf{K}}_i(x, \varepsilon)^\top \mu \mathbf{a}_0 \frac{\partial}{\partial x} \vec{\mathbf{K}}_i(x) - \frac{\partial}{\partial x}(\vec{\mathbf{K}}_i(x, \varepsilon)^\top \mu \mathbf{a}_0) \vec{\mathbf{K}}_i(x) + \vec{\mathbf{K}}_i(x, \varepsilon)^\top \mu \mathbf{a}_1 \vec{\mathbf{K}}_i(x). \tag{12}$$

Представим собственные значения и собственные функции возмущенного оператора $A(\varepsilon)$ в форме разложения по степеням ε ([15], с. 530), т. е.

$$\lambda_i(\varepsilon) = \lambda_i + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \lambda_i(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^2), \quad \vec{\mathbf{K}}_i(x, \varepsilon) = \vec{\mathbf{K}}_i(x) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \vec{\mathbf{K}}_i(x, \varepsilon)|_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^2). \tag{13}$$

Поскольку λ_i — простая точка спектра, то коэффициенты при ε в равенствах (13) отличны от нуля. После подстановки разложений (13) в выражение (11) оно преобразуется к виду

$$(\vec{\mathbf{K}}_i(x), \vec{\mathbf{K}}_i(x, \varepsilon)) \varepsilon \tfrac{\partial}{\partial \varepsilon} \lambda_i(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = [\vec{\mathbf{K}}_i(x), \vec{\mathbf{K}}_i(x)]|_a^b + \varepsilon [\vec{\mathbf{K}}_i(x), \tfrac{\partial}{\partial \varepsilon} \vec{\mathbf{K}}_i(x, \varepsilon)|_{\varepsilon=0}]|_a^b + O(\varepsilon^2),$$

причем в силу самосопряженности оператора A ([13], с. 479) $[\vec{\mathbf{K}}_i(x), \vec{\mathbf{K}}_i(x)]|_a^b = 0$. Поскольку в выражение $\vec{\mathbf{K}}_i(x, \varepsilon) = \vec{\mathbf{K}}(x, \lambda_i(\varepsilon))$ ε не входит в явном виде, то

$$\left[\vec{\mathbf{K}}_i(x), \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \vec{\mathbf{K}}_i(x, \varepsilon)|_{\varepsilon=0}\right] = \left[\vec{\mathbf{K}}_i(x), \frac{\partial}{\partial \lambda_i(\varepsilon)} \vec{\mathbf{K}}(x, \lambda_i(\varepsilon))|_{\lambda_i(\varepsilon)=\lambda_i}\right] \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \lambda_i(\varepsilon)|_{\varepsilon=0}$$

и, следовательно,

$$(\vec{\mathbf{K}}_i(x), \vec{\mathbf{K}}_i(x, \varepsilon)) = \left[\vec{\mathbf{K}}_i(x), \frac{\partial}{\partial \lambda_i(\varepsilon)} \vec{\mathbf{K}}(x, \lambda_i(\varepsilon))|_{\lambda_i(\varepsilon)=\lambda_i}\right] \Bigg|_a^b + O(\varepsilon).$$

Устремляя ε к нулю и принимая во внимание (5), получим соотношение, определяющее квадрат нормы,

$$\|\vec{\mathbf{K}}_i(x)\|^2 = \lim_{\varepsilon\to 0}(\vec{\mathbf{K}}_i(x), \vec{\mathbf{K}}_i(x,\varepsilon)) = \left[\vec{\mathbf{K}}(x,\lambda_i)\frac{\partial}{\partial\lambda}\vec{\mathbf{K}}_i(x,\lambda)|_{\lambda=\lambda_i}\right]\Bigg|_a^b. \tag{14}$$

С учетом выражения (12), соответствующих (1) краевых условий для $\vec{\mathbf{K}}_i(x)$ и обозначений (9) из равенства (14) следует выражение (8). $\square$

Теорема 1 позволяет относительно просто вычислять квадраты нормы спектральных разложений (7) для любых систем собственных вектор-функций краевых задач (1). Она является естественным обобщением аналогичного утверждения для скалярного случая, приведенного в монографии ([8], с. 325). Следует отметить также близкие результаты для систем дифференциальных уравнений первого порядка, приведенные в монографии ([16], с. 378), не связанные, однако, с вычислением нормы.

3. Представление решения в форме разложения (7) и соответствующее ему выражение квадрата нормы (8) получены в предположении, что оператор A, порожденный начально-краевой задачей (1), самосопряжен в метрике пространства $\vec{\mathbf{L}}^2_\mu$. Это условие, во-первых, определяет конкретный вид матрицы весовых функций $\mu = \mu(x)$, во-вторых, устанавливает ограничения на коэффициенты $\mathbf{a}_r = \mathbf{a}_r(x)$, $\mathbf{b}_{a,b}$, $\mathbf{c}_{a,b}$ исходной задачи (1). Конструктивно эти связи могут быть установлены на основании следующей теоремы (в дальнейшем штрихом обозначается производная по переменной x, а точкой — по переменной t).

Теорема 2. *Если матрица весовых функций μ является частным решением системы уравнений*

$$\mathbf{a}_1^\top\mu + \mu\mathbf{a}_1 = 2(\mu\mathbf{a}_0)', \tag{15}$$

и при этом матрицы коэффициентов $\mathbf{a}_r$ удовлетворяют соотношениям

$$\mu\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0^\top\mu, \quad 2(\mathbf{a}_2^\top\mu - \mu\mathbf{a}_2) = (\mathbf{a}_1^\top\mu - \mu\mathbf{a}_1)', \tag{16}$$

а коэффициенты $\mathbf{b}_{a,b}$ и $\mathbf{c}_{a,b}$ — равенствам

$$\{\mathbf{R}^\top\mu\mathbf{a}_0 - \mu\mathbf{a}_0\mathbf{R} - \mathbf{R}^\top((\mu\mathbf{a}_0)' - \mu\mathbf{a}_1)\mathbf{R}\}|_{x=a,b} = 0, \tag{17}$$

то A — самосопряженный оператор в $\vec{\mathbf{L}}^2_\mu$, и решение начально-краевой задачи (1) *может быть построено методом КИП в форме разложения* (7) *с квадратом нормы ядерной функции в виде* (8).

Доказательство. Известно, что область определения оператора A D_A плотна в $\vec{\mathbf{L}}^2_\mu$ ([13], с. 477). Рассмотрим скалярные произведения произвольных вектор-функций $\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in D_A$ в метрике (2)

$$(A[\vec{\mathbf{v}}], \vec{\mathbf{w}}) = \int_a^b (\mathbf{a}_0\vec{\mathbf{v}}'' + \mathbf{a}_1\vec{\mathbf{v}}' + \mathbf{a}_2\vec{\mathbf{v}})^\top\mu\vec{\mathbf{w}}\,dx = \int_a^b \vec{\mathbf{w}}^\top\mu(\mathbf{a}_0\vec{\mathbf{v}}'' + \mathbf{a}_1\vec{\mathbf{v}}' + \mathbf{a}_2\vec{\mathbf{v}})dx, \tag{18}$$

$$(\vec{\mathbf{v}}, A[\vec{\mathbf{w}}]) = \int_a^b \vec{\mathbf{v}}^\top\mu(\mathbf{a}_0\vec{\mathbf{w}}'' + \mathbf{a}_1\vec{\mathbf{w}}' + \mathbf{a}_2\vec{\mathbf{w}})dx = \int_a^b ((\vec{\mathbf{w}}'')^\top\mathbf{a}_0^\top + (\vec{\mathbf{w}}')^\top\mathbf{a}_1^\top + \vec{\mathbf{w}}^\top\mathbf{a}_2^\top)\mu\vec{\mathbf{v}}\,dx. \tag{19}$$

Интегрируя (18) по частям, имеем

$$(A[\vec{\mathbf{v}}], \vec{\mathbf{w}}) = \{\vec{\mathbf{w}}^\top\mu\mathbf{a}_0\vec{\mathbf{v}}' - (\vec{\mathbf{w}}^\top\mu\mathbf{a}_0)'\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}^\top\mu\mathbf{a}_1\vec{\mathbf{v}}\}|_a^b +$$
$$+ \int_a^b \{(\vec{\mathbf{w}}'')^\top\mu\mathbf{a}_0 + (\vec{\mathbf{w}}')^\top(2(\mu\mathbf{a}_0)' - \mu\mathbf{a}_1) + \vec{\mathbf{w}}^\top((\mu\mathbf{a}_0)'' - (\mu\mathbf{a}_1)' + \mu\mathbf{a}_2)\}\vec{\mathbf{v}}\,dx. \tag{20}$$

При выполнении соотношений (15), (16) интегралы в правых частях (19) и (20) тождественны.

Из краевых условий задачи (1) выразим

$$\vec{\mathbf{v}}|_{a,b} = \mathbf{R}\vec{\mathbf{v}}'|_{a,b}, \quad \vec{\mathbf{w}}|_{a,b} = \mathbf{R}\vec{\mathbf{w}}'|_{a,b}. \tag{21}$$

С учетом (21) внеинтегральные члены в (20) запишутся в виде

$$\{(\vec{\mathbf{w}}')^\top \mathbf{R}^\top \mu\mathbf{a}_0\vec{\mathbf{v}}' - (\vec{\mathbf{w}}')^\top \mu\mathbf{a}_0\mathbf{R}\vec{\mathbf{v}}' + (\vec{\mathbf{w}}')^\top \mathbf{R}^\top((\mu\mathbf{a}_0)' - \mu\mathbf{a}_1)\mathbf{R}\vec{\mathbf{v}}'\}|_a^b = \{(\vec{\mathbf{w}}')^\top \mathbf{T}\vec{\mathbf{v}}'\}|_a^b, \tag{22}$$

где введено обозначение

$$\mathbf{T}|_{x=a,b} = \{\mathbf{R}^\top \mu\mathbf{a}_0 - \mu\mathbf{a}_0\mathbf{R} - \mathbf{R}^\top((\mu\mathbf{a}_0)' - \mu\mathbf{a}_1)\mathbf{R}\}|_{x=a,b}.$$

Поскольку при условии (17) матрицы $\mathbf{T}|_{x=a,b} = 0$, то выражение (22), а следовательно, и внеинтегральные члены (20) обращаются в нуль $\forall\, \vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}} \in D_A$. Таким образом, из соотношений (19), (20) следует $(A[\vec{\mathbf{v}}], \vec{\mathbf{w}}) = (\vec{\mathbf{v}}, A[\vec{\mathbf{w}}])$, т. е. A — симметрический оператор, и дифференциальные выражения A и сопряженного с ним оператора A^* совпадают. В то же время выражение (22) равно нулю только в том случае, когда обе функции $\vec{\mathbf{v}}$, $\vec{\mathbf{w}}$ удовлетворяют условиям (17), т. е. области определения A и A^* совпадают, и, следовательно, A является самосопряженным оператором. □

Замечание. В случае сингулярных краевых условий в задаче (1) равенства (17) заменяются соответствующими предельными соотношениями ([17], с. 291).

4. Ниже приведены примеры вычислений $\|\vec{\mathbf{K}}(x,\lambda_i)\|^2$ по предлагаемой методике.

Пример 1. Задача для уравнения гиперболического типа

$$\begin{gathered} u'' - \ddot{u} = f; \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad u_{t=0} = 0, \quad \dot{u}|_{t=0} = 0; \\ x \in [0,\pi], \quad t \in [0,T]; \quad u, f \in R^1, \end{gathered} \tag{23}$$

на основании теоремы 2 решена методом КИП в L^2 с метрикой $\mu \equiv 1$. В соответствии с (1), (3), (23) оператор A имеет вид

$$A[u] \equiv u'', \quad D_A = \{u \mid u \in L^2,\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=\pi} = 0\}.$$

Его собственные значения λ_i и собственные функции $K_i(x)$ определяются равенствами

$$\{\lambda_i\} = i^2, \quad \{K_i(x)\} = \{\sin(\sqrt{\lambda_i}x)\}, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{24}$$

Для вычисления квадрата нормы $\|K_i(x)\|^2$ воспользуемся формулой (8) (теорема 1). Поскольку в рассматриваемом случае $K_i(0) = K_i(\pi) = 0$ и, следовательно, $c_a = c_b = 1$, $b_a = b_b = 0$, а из (9) $P = Q = 1$, то

$$\|K_i(x)\|^2 = \frac{\partial K(x,\lambda)}{\partial\lambda}\frac{\partial K(x,\lambda)}{\partial x}\Bigg|_{x=0,\ \lambda=i^2}^{x=\pi} = \left[\frac{x}{2\sqrt{\lambda}}\cos(\sqrt{\lambda}x)\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x)\right]\Bigg|_{x=0,\ \lambda=i^2}^{x=\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Естественно, что в этом случае такой же результат может быть получен непосредственным интегрированием выражения (24), т. е.

$$\|K_i(x)\|^2 = \int_0^\pi \sin^2(ix)dx = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 2. Для осесимметричных вынужденных колебаний жестко защемленной на контуре круглой пластины в постановке уточненной теории соответствующая начально-краевая задача формулируется следующим образом ([1], с. 75):

$$\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{Vmatrix}\vec{\mathbf{u}}'' + \begin{Vmatrix}x^{-1} & b\\ -1 & x^{-1}\end{Vmatrix}\vec{\mathbf{u}}' + \begin{Vmatrix}-x^{-2}-b & 0\\ -x^{-1} & 0\end{Vmatrix}\vec{\mathbf{u}} - \begin{Vmatrix}c & 0\\ 0 & d\end{Vmatrix}\ddot{\vec{\mathbf{u}}} = \vec{\mathbf{f}};$$
$$\vec{\mathbf{u}}|_{x=0} < \infty, \quad \vec{\mathbf{u}}|_{x=1} = 0, \quad \vec{\mathbf{u}}|_{t=0} = 0, \quad \dot{\vec{\mathbf{u}}}|_{t=0} = 0; \tag{25}$$
$$x \in [0,1], \quad t \in [0,T]; \quad \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}(x,t), \quad \vec{\mathbf{f}} = \vec{\mathbf{f}}(x,t); \quad \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{f}} \in R^2.$$

Здесь $\vec{\mathbf{u}} = (\psi, w)^\top$ — вектор перемещений, $\vec{\mathbf{f}}$ — вектор динамической нагрузки, b, c, d — постоянные коэффициенты, зависящие от физико-механических и геометрических характеристик пластины [1]. Согласно теореме 2 решение задачи (25) может быть построено методом КИП в $\vec{\mathbf{L}}^2_\mu$ с метрикой (2), определяемой весовыми функциями

$$\mu(x) = \begin{Vmatrix}xb^{-1} & 0\\ 0 & x\end{Vmatrix}.$$

В соответствии с (3), (25) запишем выражение для оператора

$$A \equiv \begin{Vmatrix}c^{-1} & 0\\ 0 & d^{-1}\end{Vmatrix}\frac{d^2}{dx^2} + \begin{Vmatrix}(cx)^{-1} & bc^{-1}\\ -d^{-1} & (dx)^{-1}\end{Vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} + \begin{Vmatrix}-(x^{-2}+b)c^{-1} & 0\\ -(dx)^{-1} & 0\end{Vmatrix},$$
$$D_A = \{\vec{\mathbf{u}} \mid \vec{\mathbf{u}} \in \vec{\mathbf{L}}^2_\mu,\ \vec{\mathbf{u}}|_{x=0} < \infty,\ \vec{\mathbf{u}}|_{x=1} = 0\}.$$

Его собственные значения λ_i являются нулями трансцендентного уравнения

$$(\nu_{1i} - \lambda_i c + b)\nu_{1i}^{-1/2} J_0(\sqrt{\nu_{1i}}) J_1(\sqrt{\nu_{2i}}) - (\nu_{2i} - \lambda_i c + b)\nu_{2i}^{-1/2} J_0(\sqrt{\nu_{2i}}) J_1(\sqrt{\nu_{1i}}) = 0;$$
$$\nu_{1,\,2i} = 1/2[\pm\sqrt{\lambda_i^2(d-c)^2 + 4\lambda_i db} + \lambda_i(d+c)],$$

а собственные функции, удовлетворяющие условию ограниченности в полюсе $x = 0$, определяются выражением [1]

$$\vec{\mathbf{K}}(x,\lambda_i) = \begin{Vmatrix} b[J_1(\sqrt{\nu_{1i}}x) J_1(\sqrt{\nu_{2i}}) - J_1(\sqrt{\nu_{2i}}x) J_1(\sqrt{\nu_{1i}})] \\ (\nu_{2i} - \lambda_i c + b)\nu_{2i}^{-1/2} J_0(\sqrt{\nu_{2i}}x) J_1(\sqrt{\nu_{1i}}) - (\nu_{1i} - \lambda_i c + b)\nu_{1i}^{-1/2} J_0(\nu_{1i}x) J_1(\sqrt{\nu_{2i}}) \end{Vmatrix}, \tag{26}$$

где $J_n(z)$ — функции Бесселя первого рода порядка n.

Квадрат нормы $\|\vec{\mathbf{K}}_i(x)\|^2$ вычислим по упрощенной формуле (8). Действительно, поскольку $\mu(0) = 0$, то в соответствии с (9) $\mathbf{P}|_{x=0} = \mathbf{Q}|_{x=0} = 0$. Кроме того, из краевых условий задачи (25) при $x = 1$ следует, что $\vec{\mathbf{K}}_i(x)|_{x=1} = 0$. Имеем

$$\|\vec{\mathbf{K}}(x,\lambda_i)\|^2 = \frac{\partial \vec{\mathbf{K}}(x,\lambda)}{\partial \lambda} \begin{Vmatrix}x/b & 0\\ 0 & x\end{Vmatrix} \frac{\partial \vec{\mathbf{K}}(x,\lambda)}{\partial x}\bigg|_{x=1,\,\lambda=\lambda_i} = a_1 J_1(\sqrt{\nu_{1i}}) J_1(\sqrt{\nu_{2i}})[a_2 J_0(\sqrt{\nu_{1i}}) J_1(\sqrt{\nu_{2i}}) +$$
$$+ a_3 J_1(\sqrt{\nu_{1i}}) J_1(\sqrt{\nu_{2i}}) + a_4 J_1(\sqrt{\nu_{1i}}) J_0(\sqrt{\nu_{2i}}) + a_5 J_0(\sqrt{\nu_{1i}}) J_0(\sqrt{\nu_{2i}})], \tag{27}$$

где

$$a_1 = \sqrt{\lambda_i^2(d-c)^2 + 4\lambda_i db}, \quad a_2 = [(\nu_{1i} - \lambda_i c + b)(\delta_{1i}/\nu_{1i} + \delta_{2i}/\nu_{2i})/2 - \delta_{1i} + c]/\sqrt{\nu_{1i}},$$
$$a_3 = [\delta_{1i} - \delta_{2i} + (b - \lambda_i c)(\delta_{1i}/\nu_{1i} - \delta_{2i}/\nu_{2i})]/2,$$
$$a_4 = -[(\nu_{2i} - \lambda_i c + b)(\delta_{1i}/\nu_{1i} + \delta_{2i}/\nu_{2i})/2 - \delta_{2i} + c]/\sqrt{\nu_{2i}},$$
$$a_5 = [(\nu_{2i} - \lambda_i c + b)\delta_{1i} - (\nu_{1i} - \lambda_i c + b)\delta_{2i}]/[2\sqrt{\nu_{1i}\nu_{2i}}], \quad \delta_{ki} = \frac{\nu_{ki}(d+c) + d(b - 2\lambda_i)}{2\nu_{ki} - \lambda_i(d+c)} \quad (k = 1,2).$$

Заметим, что выражение (27) может быть получено путем непосредственного интегрирования квадрата выражения (26), если воспользоваться известными квадратурами для произведений функций Бесселя [9], [10]. Однако такой прием даже в случае известных квадратур является более громоздким.

Пример 3. Осесимметричная динамическая задача для упруго закрепленной трехслойной непологой сферической оболочки симметричной структуры представляется в следующей матричной форме [2]:

$$
\begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 d \end{Vmatrix} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{u}}}{\partial \theta^2} + \begin{Vmatrix} a \operatorname{ctg}\theta & \vdots & b+k^2 & \vdots & 0 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ -b-k^2 & \vdots & k^2 \operatorname{ctg}\theta^2 & \vdots & k^2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ 0 & \vdots & -k^2 & \vdots & \alpha^2 d \operatorname{ctg}\theta \end{Vmatrix} \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial \theta} +
$$

$$
+ \begin{Vmatrix} c - a/\sin^2\theta - k^2 & \vdots & 0 & \vdots & k^2 \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ -(b+k^2)\operatorname{ctg}\theta & \vdots & -2b & \vdots & k^2 \operatorname{ctg}\theta \\ \cdots & & \cdots & & \cdots \\ k^2 & \vdots & 0 & \vdots & \alpha^2 f - k^2 - \alpha^2 d/\sin^2\theta \end{Vmatrix} \vec{\mathbf{u}} - \begin{Vmatrix} I_1 & 0 & I_2 \\ 0 & I_1 & 0 \\ I_2 & 0 & \alpha^2 I_3 \end{Vmatrix} \frac{\partial^2 \vec{\mathbf{u}}}{\partial t^2} = \vec{\mathbf{f}}; \qquad (28)
$$

$$
\left[\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{\mathbf{u}} + \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \vec{\mathbf{u}} \right] \Bigg|_{\theta=\theta_1} = 0; \quad \vec{\mathbf{u}}|_{\theta=0} < \infty, \quad \vec{\mathbf{u}}|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\vec{\mathbf{u}}\Big|_{t=0} = 0;
$$

$$
\theta \in [0, \theta_1], \ \ t \in [0, T]; \ \ \vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{u}}(\theta, t), \ \ \vec{\mathbf{f}} = \vec{\mathbf{f}}(\theta, t); \ \ \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{f}} \in R^3.
$$

Здесь α, η, a, b, c, d, f, k, I_1, I_2, I_3 — постоянные, определяемые физическими и геометрическими параметрами оболочки.

Замкнутое решение задачи (28) построено методом КИП одним из авторов [2]. Вместе с тем вопрос о вычислении нормы ядра КИП, представляющего собой линейные комбинации присоединенных функций Лежандра произвольной комплексной степени, оставался открытым, поскольку в известных руководствах по специальным функциям [9], [18] отсутствуют соответствующие квадратуры и приемы их точного вычисления.

Из соотношений (15)–(17) теоремы 2 следует, что для решения задачи (28) может быть применено КИП в $\vec{\mathbf{L}}_\mu^2$ с метрикой (2), определяемой матрицей весовых функций $\mu(\theta) = \mathbf{E}\sin\theta$ с единичной матрицей E.

Как известно [2], собственные вектор-функции оператора A определяются выражениями

$$
\vec{\mathbf{K}}_i(\theta) = \mathbf{Y}(\lambda, \theta)\vec{\mathbf{C}}(\lambda)|_{\lambda=\lambda_i}.
$$

Элементами матрицы $\mathbf{Y}(\lambda, \theta)$ являются ограниченные при $\theta = 0$ решения соответствующей (28) однородной системы уравнений (6), т. е.

$$
\mathbf{Y}(\lambda, \theta) = \|\vec{\mathbf{y}}_1(\theta, \lambda) \ldots \vec{\mathbf{y}}_3(\theta, \lambda)\|; \ \ \vec{\mathbf{y}}_j(\theta, \lambda) = \|P_{\nu_j}^1(\cos\theta) \ \ \beta_j(\lambda) P_{\nu_j}(\cos\theta) \ \ \delta_j(\lambda) P_{\nu_j}^1(\cos\theta)\|^\top, \ \ j = 1, 2, 3.
$$

Здесь $P_{\nu_j}^m(\cos\theta)$ — присоединенные функции Лежандра комплексной степени ν_j порядка m;

$$
\beta_j(\lambda) = d_j \zeta_j (\lambda a_6 + a\zeta_j + a_7), \quad \delta_j(\lambda) = d_j(\lambda^2 a_1 + \lambda(a_2 + a_3\zeta_j) + a_4 + a_5\zeta_j - a\zeta_j^2),
$$
$$
d_j = [\lambda^2 a_8 + \lambda(a_9 - I_2\zeta_j) + a_{10} + b\zeta_j]^{-1},
$$

где

$$a_1=\frac{-I_1^2}{k^2},\ \ a_2=I_1\left[\frac{2b-c}{k^2}+1\right],\ \ a_3=I_1\left[\frac{a}{k^2}+1\right],\ \ a_4=2b\left[\frac{c}{k^2}-1\right],\ \ a_5=\frac{b^2}{k^2}-2b\left[\frac{a}{k^2}-1\right]+c,$$
$$a_6=-I_1-I_2\left(\frac{b}{k^2}+1\right),\ \ a_7=-c-b;\ \ a_8=\frac{I_1I_2}{k^2},\ \ a_9=I_1-2\frac{bI_2}{k^2},\ \ a_{10}=-2b,$$

а $\zeta_j=\nu_j(\nu_j+1)$, $j=1,2,3$, — корни определяющего кубического уравнения [2]

$$\zeta^3+(\varphi_1\lambda+\varphi_0)\zeta^2+(\psi_2\lambda^2+\psi_1\lambda+\psi_0)\zeta+\vartheta_3\lambda^3+\vartheta_2\lambda^2+\vartheta_1\lambda+\vartheta_0=0,$$

причем

$$\vartheta_0=-2bw_2^{-1}(\alpha^2fw_3+ck^2),\ \ \vartheta_1=w_2^{-1}\{2\alpha^2b(I_1f-I_3w_3)+I_1(\alpha^2fw_3-k^2w_4)-4bk^2I_2\},$$
$$\vartheta_2=w_2^{-1}\{\alpha^2I_1(I_3(w_4+k^2)-I_1f)-2bI_2^2+k^2I_1w_6\},\ \ \vartheta_3=I_1w_2^{-1}(I_2^2-\alpha^2I_1I_3),$$
$$\psi_0=w_2^{-1}\{2abw_5-\alpha^2b(2cd-bf-2k^2(d+f))+\alpha^2cfk^2-b^2k^2\},$$
$$\psi_1=w_2^{-1}\{2bI_2k^2-a(I_1w_5+2\alpha^2bI_3)-\alpha^2(b(2w_7-bI_3-2k^2I_3)-c(k^2I_3+w_7)+k^2(w_7-fI_1))\},$$
$$\psi_2=w_2^{-1}\{\alpha^2I_1(I_3(a+k^2)+w_7)-k^2I_2^2\},$$
$$\varphi_0=w_1^{-1}(a(2bd-fk^2)-d(b(b+2k^2)+ck^2)),\ \ \varphi_1=-w_1^{-1}(a(w_7+k^2I_3)+w_7k^2),$$
$$w_1=adk^2,\ \ w_2=\alpha^2w_1,\ \ w_3=k^2-c,\ \ w_4=2b-c,\ \ w_5=k^2-\alpha^2f,\ \ w_6=I_1+2I_2,\ \ w_7=dI_1.$$

В соответствии с п. 1 собственные значения λ_i являются корнями трансцендентного уравнения

$$\det\mathbf{B}(\lambda)=0,\quad \mathbf{B}(\lambda)=\left\{\mathbf{b}_b\frac{\partial}{\partial\theta}\mathbf{Y}(\lambda,\theta)+\mathbf{c}_b\mathbf{Y}(\lambda,\theta)\right\}\Big|_{\theta=\theta_1},$$

а компоненты векторов $\vec{\mathbf{C}}(\lambda)=(C_1(\lambda),C_2(\lambda),1)^\top$ вычисляются по формулам

$$\begin{gathered}C_1(\lambda)=[b_{12}(\lambda)b_{23}(\lambda)-b_{13}(\lambda)b_{22}(\lambda)]/D(\lambda),\quad C_2(\lambda)=[b_{13}(\lambda)b_{21}(\lambda)-b_{11}(\lambda)b_{23}(\lambda)]/D(\lambda),\\ D(\lambda)=b_{11}(\lambda)b_{22}(\lambda)-b_{12}(\lambda)b_{21}(\lambda),\end{gathered}\tag{29}$$

где $b_{js}(\lambda)$, $j=1,2$, $s=1,2,3$, — элементы матрицы $\mathbf{B}(\lambda_i)$.

Для вычисления квадрата нормы $\|\vec{\mathbf{K}}_i(\theta)\|^2$ воспользуемся соотношениями (8), (9) теоремы 1. Так как $\mu(0)=0$, то и $\mathbf{P}|_{\theta=0}=\mathbf{Q}|_{\theta=0}=0$. Таким образом,

$$\|\vec{\mathbf{K}}_i(\theta)\|^2=\left\{\frac{\partial\vec{\mathbf{K}}(\lambda,\theta)^\top}{\partial\lambda}\mathbf{Q}\frac{\partial\vec{\mathbf{K}}(\lambda,\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial^2\vec{\mathbf{K}}(\lambda,\theta)^\top}{\partial\lambda\partial\theta}\mathbf{P}\vec{\mathbf{K}}(\lambda,\theta)\Big|_{\lambda=\lambda_i}\right\}\Big|_{\theta=\theta_1}.\tag{30}$$

Здесь

$$\mathbf{P}=\operatorname{diag}(a,k^2,\alpha^2d)\sin\theta,\quad \mathbf{Q}=\begin{Vmatrix}a&0&0\\0&k^2&k^2\eta^{-1}\\0&0&\alpha^2d\end{Vmatrix}\sin\theta.$$

Поскольку из краевых условий задачи (28) при $\theta=\theta_1$ следует равенство нулю первых двух компонентов ядра КИП (5) для любых значений λ, т. е.

$$\vec{\mathbf{K}}(\theta_1,\lambda)=(0,0,K_3(\theta_1,\lambda))^\top,$$

то выражение (30) существенно упрощается и может быть записано в виде

$$\|\vec{\mathbf{K}}_i(\theta)\|^2=\alpha^2d\sin\theta_1\left\{\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}K_3(\lambda,\theta)\right]\left[\frac{\partial}{\partial\theta}K_3(\lambda,\theta)\right]-\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\lambda}K_3(\lambda,\theta)\right]K_3(\lambda,\theta)\Big|_{\lambda=\lambda_i}\right\}\Big|_{\theta=\theta_1},\tag{31}$$

где

$$K_3(\theta,\lambda)=\sum_{j=1}^{3}D_j(\lambda)P^1_{\nu_j}(\cos\theta),\quad \frac{\partial}{\partial\theta}K_3(\theta,\lambda)=\sum_{j=1}^{3}D_j(\lambda)[P^2_{\nu_j}(\cos\theta)+\operatorname{ctg}\theta P^1_{\nu_j}(\cos\theta)],$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}K_3(\theta,\lambda)=\sum_{j=1}^{3}\Phi_j(\lambda)[G_j(\lambda)P^1_{\nu_j}(\cos\theta)+D_j(\lambda)V^1_{\nu_j}(\cos\theta)], \tag{32}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\theta}K_3(\theta,\lambda)=\sum_{j=1}^{3}\Phi_j(\lambda)[G_j(\lambda)[P^2_{\nu_j}(\cos\theta)+\operatorname{ctg}\theta P^1_{\nu_j}(\cos\theta)]+D_j(\lambda)[V^2_{\nu_j}(\cos\theta)+\operatorname{ctg}\theta V^1_{\nu_j}(\cos\theta)]];$$

$$D_j(\lambda)=C_j(\lambda)\delta_j(\lambda),\quad G_j(\lambda)=C_j(\lambda)\Delta_j(\lambda)+\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}C_j(\lambda)\right]\delta_j(\lambda),\quad V^{1,2}_{\nu_j}(\cos\theta)=\frac{1}{2+\nu_j}\frac{\partial}{\partial\nu_j}P^{1,2}_{\nu_j}(\cos\theta).$$

Здесь $C_j(\lambda)$ определяются соотношениями (29), а $\Delta_j(\lambda)$, $\Phi_j(\lambda)$ вычисляются по формулам

$$\Delta_j(\lambda)=d_j[\Phi_j^{-1}(a_2+2a_1\lambda+a_3\zeta_j-(a_9+2a_8\lambda-I_2\zeta_j)\delta_j)+a_5+a_3\lambda-2a\zeta_j-(b-I_2\lambda)\delta_j],$$
$$\Phi_j(\lambda)=-\frac{\zeta_j^2\varphi_1+\zeta_j(2\lambda\psi_2+\psi_1)+3\lambda^2\vartheta_3+2\lambda\vartheta_2+\vartheta_1}{3\zeta_j^2+2\zeta_j(\lambda\varphi_1+\varphi_0)+\lambda^2\psi_2+\lambda\psi_1+\psi_0}. \tag{33}$$

Таким образом, квадрат нормы в рассматриваемой задаче определяется выражением (31) с учетом (32), (33).

В заключение следует отметить, что приведенная форма решения (7) является универсальной для различных задач математической физики, описываемых гиперболическими системами линейных дифференциальных уравнений в частных производных (1) с переменными коэффициентами и удовлетворяющих условиям теоремы 2. Вычисление сложных квадратур $\|\vec{\mathbf{K}}_i(x)\|^2$ разложений (7) для простого спектра оператора A в соответствии с теоремой 1 производится по формулам (8), (9) путем дифференцирования его собственных функций $\vec{\mathbf{K}}(x,\lambda_i)$. Предложенный новый подход вычисления нормы открывает возможность реализации более эффективных вычислительных алгоритмов по сравнению с существующими.

Литература

1. Сеницкий Ю.Э. *Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований.* – Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1985. – 176 с.
2. Сеницкий Ю.Э. *Многокомпонентное обобщенное конечное интегральное преобразование и его приложение к нестационарным задачам механики* // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 4. – С. 57–63.
3. Сеницкий Ю.Э. *Биортогональное многокомпонентное конечное интегральное преобразование и его приложение к краевым задачам механики* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 8. – С. 71–81.
4. Сеницкий Ю.Э. *О построении общего решения неосесимметричной динамической задачи для пологой сферической оболочки с конечной сдвиговой жесткостью* // Прикл. механ. – 1989. – Т. XXV. – № 7. – С. 57–66.
5. Сеницкий Ю.Э. *К решению осесимметричной задачи динамики для анизотропного короткого толстостенного цилиндра* // Прикл. механ. – 1981. – Т. XVII. – № 8. – С. 95–100.
6. Сеницкий Ю.Э. *Динамическая задача электроупругости для неоднородного цилиндра* // ПММ. – 1993. – Т. 57. – № 1. – С. 116–122.
7. Люк И. *Специальные математические функции и их аппроксимации.* – М.: Мир, 1980. – 608 с.
8. Айнс Э.Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – Харьков: ОНТИ, 1939. – 717 с.

9. Маричев О.И. *Метод вычисления интегралов от специальных функций. Теория и таблицы формул.* – Минск: Наука и техника, 1978. – 310 с.
10. Сеницкий Ю.Э. *О вычислении некоторых квадратур, содержащих цилиндрические функции // Расчет пространств. строит. конструкций.* – Куйбышев, 1974. – Вып. 4. – С. 102–104.
11. Андреев А.А., Килбас А.А. *О решениях неоднородного гипергеометрического уравнения и вычислении интегралов* // ДАН БССР. – 1983. – Т. 27. – № 6. – С. 493–496.
12. Бутковский А.Г. *Характеристики систем с распределенными параметрами.* – М.: Наука, 1979. – 224 с.
13. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.* – М.: Наука, 1966. – 543 с.
14. Сеницкий Ю.Э. *Сходимость и единственность представлений, определяемых формулой обращения многокомпонентного обобщенного интегрального преобразования* // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 9. – С. 53–56.
15. Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* – М.: Мир, 1972. – 740 с.
16. Аткинсон Ф. *Дискретные и непрерывные граничные задачи.* – М.: Мир, 1968. – 750 с.
17. Хатсон В., Пим Дж. *Приложения функционального анализа и теории операторов.* – М.: Мир, 1983. – 431 с.
18. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* – М.: Физматгиз, 1962. – 1100 с.

Самарская государственная
архитектурно-строительная академия

Поступила
26.05.1997