ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 4 (443)

УДК 517.925

В.Н. БОБОЧКО

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕДИАГОНАЛИЗИРУЕМЫМ ПРЕДЕЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ

Введение

Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} L_\varepsilon W(x,\varepsilon) \equiv \varepsilon^2 W''(x,\varepsilon) - AW(x,\varepsilon) = h(x), \\ E_1 W(m,\varepsilon) = E_1[\mu^{-2}\alpha_m + \widehat{W}_m], \quad E_2 W'(m,\varepsilon) = E_2[\mu^{-4}\alpha_m + \mu^{-3}\widehat{W}_m] \end{gathered} \tag{1}$$

при $\varepsilon \to +0$, $x \in I = [0,a]$, $m = 0, a$; $\mu = \sqrt[3]{\varepsilon}$.

Здесь A — линейный оператор, заданный в $\mathbf{R}^n$, $W(x,\varepsilon)$ — искомая вектор-функция, α_m, $\widehat{W}_m$ ($m = 0, a$) — заданные начальные векторы, E_k — диагональные матрицы n-го порядка вида $E_1 = \mathrm{diag}\{1,0,\dots,0\}$, $E_2 = \mathrm{diag}\{0,1,\dots,1\}$.

Задачу (1) будем исследовать при выполнении таких условий.

Условие 1. $A, h(x) \in \mathbf{C}^\infty[I]$.

Условие 2. Спектр предельного оператора A удовлетворяет условиям

$$\lambda_1(x) \equiv x \cdot \widetilde{\lambda}_1(x) < 0 < \lambda_2(x) \equiv \dots \equiv \lambda_{p+1}(x) < \lambda_{p+2}(x) \equiv \cdots \\ \equiv \lambda_{p+s+1}(x) < \lambda_{p+s+2}(x) < \dots < \lambda_n(x). \tag{2}$$

Поскольку спектр предельного оператора A содержит два кратных элемента $\lambda_2(x)$ и $\lambda_{p+2}(x)$, то условий (2) еще не достаточно для однозначной постановки и для построения асимптотики решения сингулярно возмущенной задачи (СВЗ) (1), как это было в случае простого спектра оператора A. Различные аспекты исследования СВЗ (1) для случая простого спектра оператора A изучены достаточно хорошо [1]–[6].

Случай, когда предельный оператор A не является диагонализируемым, вносит значительные трудности в исследование СВЗ (1), о чем еще было сказано в ([7], с. 148). Насколько автору известно, исследования СВЗ (1) с недиагонализируемым предельным оператором не проводились или (в крайнем случае) равномерно пригодная асимптотика решения задачи (1) на всем отрезке $I = [0; a]$ еще не построена.

Для однозначного описания регуляризующей вектор-переменной t и пространства безрезонансных решений (ПБР) необходимо еще иметь информацию о нормальной форме оператора A. Поэтому будем предполагать, что p-кратному элементу $\lambda_2(x)$ соответствует один элементарный делитель $[\lambda(x) - \lambda_2(x)]^p$, а s-кратному элементу $\lambda_{p+2}(x)$ соответствуют только простые элементарные делители $[\lambda(x) - \lambda_i(x)]$, $i = \overline{p+2,\ p+s+1}$.

При сделанных предположениях матрица $A(x)$ оператора A будет эквивалентна блочно-диагональной матрице

$$A(x) \sim \begin{pmatrix} \lambda_1(x) & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & G(x) & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & D(x) & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{p+s+2}(x) & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda_n(x) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $G(x)$ — жорданова матрица p-го порядка, в которой на главной диагонали находятся элементы $\lambda_2(x)$, а единицы находятся над главной диагональю. Матрица $D(x)$, соответствующая s-кратному элементу $\lambda_{p+2}(x)$, является диагональной, в которой на диагонали находятся элементы $\lambda_{p+2}(x) \equiv \cdots \equiv \lambda_{p+s+1}(x)$.

Следовательно, СВЗ (1) поставлена так, чтобы указать на особенности исследования задачи (1), которые возникают от кратного, но все же диагонализируемого элемента $\lambda_{p+2}(x)$ и от кратного элемента $\lambda_2(x)$, который порождает жорданову матрицу $G(x)$.

Цель данной работы состоит в построении равномерно пригодной асимптотики решения СВЗ (1) на всем отрезке $[0; a]$, которое в пределе при $\varepsilon \to +0$ стремится к разрывному решению вырожденного векторного уравнения

$$-A\omega(x) = h(x). \tag{4}$$

1. Биортогональная система векторов

Исходя из вида жордановой формы оператора A, введем биортогональную систему векторов $\widetilde{b}_i(x)$, $\widetilde{b}^*_k(x)$, $i, k = \overline{1, n}$, вида

$$(A - \lambda_i E)\widetilde{b}_i(x) = \begin{cases} 0, & i = 1, 2, \cup \overline{p+2, n}; \\ \widetilde{b}_{i-1}(x), & i = \overline{3, p+1}, \end{cases} \tag{1.1}$$

и

$$(A^* - \widetilde{\lambda}_k E)\widetilde{b}^*_k(x) = \begin{cases} 0, & k = 1 \cup \overline{p+1, n}; \\ \widetilde{b}^*_{k+1}(x), & k = \overline{2, p}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Все векторы $\widetilde{b}_i(x)$, $i = 1, 2 \cup \overline{p+2, n}$, и $\widetilde{b}^*_k(x)$, $k = 1 \cup \overline{p+1, n}$, которые являются собственными векторами соответственно операторов A и A^*, содержат в виде множителей по одной произвольной постоянной C_i и C^*_k. Векторы $\widetilde{b}_i(x)$, $i = \overline{3, p+1}$, и $\widetilde{b}^*_k(x)$, $k = \overline{2, p}$, образуют циклические системы и их зависимость от произвольных постоянных более сложная, чем у собственных векторов. Такая зависимость в теории сингулярных возмущений еще не исследовалась и не является очевидной. Поэтому для большей наглядности в условиях 2 возьмем конкретное значение $p = 3$. В этом случае циклические системы векторов будут иметь следующую структуру:

$$\widetilde{b}_2(x) = c_2\widetilde{\gamma}_2(x), \quad \widetilde{b}_3(x) = c_2\widetilde{l}_3(x) + c_3\widetilde{\gamma}_2(x), \quad \widetilde{b}_4(x) = c_2\widetilde{l}_2(x) + c_3\widetilde{l}_3(x) + c_4\widetilde{\gamma}_2(x) \tag{1.3}$$

и

$$\widetilde{b}^*_4(x) = c_4\widetilde{\gamma}^*_4(x), \quad \widetilde{b}^*_3(x) = c^*_4\widetilde{l}^*_3(x) + c^*_3\widetilde{\gamma}^*_4(x), \quad \widetilde{b}^*_2(x) = c^*_4\widetilde{l}^*_2(x) + c^*_3\widetilde{l}^*_3(x) + c^*_2\widetilde{\gamma}^*_4(x). \tag{1.4}$$

В этих формулах $\widetilde{\gamma}_2(x)$ и $\widetilde{\gamma}^*_4(x)$ — собственные векторы операторов A и A^*, а остальные векторы, содержащиеся в формулах (1.3) и (1.4), являются однозначно определенными как частные решения соответствующих неоднородных алгебраических систем уравнений (1.1) и (1.2).

Замечание 1. В зависимости от того, какой минор $(n-1)$-го порядка не равен нулю, по одной из компонент векторов $\widetilde{\gamma}_2(x)$ и $\widetilde{\gamma}_4^*(x)$ будет тождественно равна единице, а у остальных векторов, содержащихся в формулах (1.3) и (1.4), одна из компонент тождественно равна нулю. Поскольку для наших исследований это обстоятельство не имеет принципиального значения, то не будем больше акцентировать внимание на размещении единиц и нулей в биортогональной системе векторов.

Замечание 2. Поскольку кратному элементу $\lambda_{p+2}(x)$ соответствует диагональная матрица $D(x)$, то существует s фундаментальных решений однородных уравнений (1.1) и (1.2), которые отождествляем с собственными векторами $\widetilde{b}_i(x)$, $\widetilde{b}_k^*$, $i,k=\overline{p+2,p+s+1}$.

Наряду с биортогональной системой векторов $\{\widetilde{b}_i(x),\widetilde{b}_k^*(x)\}$ введем еще одну биортогональную систему векторов $\{b_i(x,\varepsilon),b_k^*(x,\varepsilon)\}$, в которой

$$b_i(x,\varepsilon)\equiv\widetilde{b}_i(x),\quad i=1,2,\cup\overline{p+2,n};\quad b_k^*(x,\varepsilon)\equiv\widetilde{b}_k^*(x),\quad k=1\cup\overline{p+1,n};$$
$$(A-\lambda_iE)b_i=\varepsilon b_{i-1},\quad i=\overline{3,p+1};\quad (A^*-\lambda_kE)b_k^*=\varepsilon b_{k+1}^*,\quad k=1\cup\overline{p+1,n}.$$

Легко проверить, что $\widetilde{b}_i(x)=\varepsilon^{i-1}b_i(x,\varepsilon)$, $i=\overline{3,p+1}$.

2. О структуре решения вырожденной системы уравнений

Используя введенные биортогональные системы векторов, получим разложение правой части векторного уравнения (4)

$$h(x)=\sum_{i=1}^n(h(x),b_i^*(x))b_i(x)\equiv\sum_{i=1}^n(h(x),\widetilde{b}_i^*(x))\widetilde{b}_i(x). \tag{2.1}$$

Решение векторного уравнения (4) тоже будем строить в виде

$$\omega(x)=\sum_{i=1}^n\omega_i(x)b_i(x)\equiv\sum_{i=1}^n\widetilde{\omega}_i(x)\widetilde{b}_i(x). \tag{2.2}$$

Подставив (2.2) в уравнение (4) и учитывая равенства (1.1) и (1.2), получим

$$\widetilde{\omega}_i(x)=\lambda_i^{-1}(h(x),\widetilde{b}_i^*(x)),\quad i=1\cup\overline{4,n},$$
$$\widetilde{\omega}_3(x)=-\lambda_2^{-1}(h(x),\widetilde{b}_3^*(x))+\lambda_2^{-2}(h(x),\widetilde{b}_4^*(x)),$$
$$\widetilde{\omega}_2(x)=-\lambda_2^{-1}(h(x),\widetilde{b}_2^*(x))+\lambda_2^{-2}(h(x),\widetilde{b}_3^*(x))-\lambda_2^{-3}(h(x),\widetilde{b}_4^*(x)).$$

Поскольку спектр предельного оператора A содержит нестабильный элемент $\lambda_1(x)\equiv x\widetilde{\lambda}_1(x)$, то для достаточной гладкости решения векторного уравнения (4) необходимо, чтобы имело место точечное условие $(h(0),\widetilde{b}_1^*(0))=0$.

Впоследствии при построении асимптотики решения СВЗ (1) будет показано, что аналогичное условие будет автоматически выполнено за счет специфики предложенного метода. Поэтому при постановке задачи (1) не упоминалось условие $(h(0),\widetilde{b}_1^*(0))=0$.

Замечание 3. В случае диагонализируемого предельного оператора A мы обходились без произвольных постоянных множителей, содержащихся при собственных векторах. Поскольку в исследуемом случае произвольные множители входят в более сложном виде (см. (1.3) и (1.4)), то в разложении (2.1) и в решении (2.2) тоже содержатся произвольные постоянные C_i, $i=\overline{2,4}$, и C_k^*, $k=\overline{2,4}$. Остальные постоянные, по аналогии с простым спектром предельного оператора, легко убираются из решения (2.2). С другой стороны, решение вырожденного векторного уравнения (4) определяется однозначно и не должно содержать никаких произвольных постоянных.

Объем работы не позволяет провести полное исследование решения уравнения (4). Поэтому запишем в явном виде одно из слагаемых решения уравнения (4), а именно

$$\widetilde{\omega}_3(x)\widetilde{b}_3(x) \equiv \{-\lambda_1^{-1}[(h(x),\widetilde{l}_3^*(x))C_4^* + (h(x),\widetilde{\gamma}_4^*(x))C_3^*] + \lambda_1^{-2}(h(x),\widetilde{\gamma}_4^*(x))C_4^*\}[C_2\widetilde{l}_3(x) + C_3\widetilde{\gamma}_2(x)].$$

Видим, что произвольные постоянные входят в это слагаемое в виде множителей $C_4^* \cdot C_2$, $C_4^* \cdot C_3$, $C_3^* \cdot C_3$. Однако, легко убедиться, что в процессе получения биортонормированной системы векторов $\{\widetilde{b}_i(x), \widetilde{b}_k^*(x)\}$ каждый из этих множителей однозначно определяется. Следовательно, слагаемое (2.4) является однозначным. Аналогично можно проверить, что все слагаемые решения (2.2) являются однозначно определенными и достаточно гладкими функциями для всех $x \in [0,a]$.

3. Расширение возмущенной задачи

В дальнейшем общая схема исследования СВЗ с недиагонализируемым предельным оператором остается той же самой, что и для диагонализируемого оператора [1]–[6]. Наряду с независимой переменной $x \in I$ введем новую вектор-переменную $t = \{t_{jk}\}$, $k = 1,2$; $j = 1,2 \cup \overline{p+s+1,n}$, формулами

$$t_{1k} \equiv t_1 \equiv \mu^{-2}\left(\frac{3}{2}\int_0^x \sqrt{-\lambda_1(x)}dx\right)^{2/3} \equiv \mu^{-2}\varphi_1(x) \equiv \Phi_1(x,\varepsilon),$$
$$t_{jk} = \mu^{-3}(-1)^k \int_{(k-1)a}^x \sqrt{\lambda_j(x)}dx \equiv \mu^{-3}\varphi_{jk}(x) \equiv \Phi_{jk}(x,\varepsilon). \tag{3.1}$$

Тогда вместо вектор-функции $W(x,\varepsilon)$ будем исследовать расширенную вектор-функцию $\widetilde{W}(x,t,\varepsilon)$ [8], которая является решением расширенной задачи

$$\widetilde{L}_\varepsilon \widetilde{W}(x,t,\varepsilon) = h(x),$$
$$E_1\widetilde{W}(M_m,\varepsilon) = E_1[\mu^{-2}\alpha_m + \widehat{W}_m], \quad E_2\frac{d\widetilde{W}(M_m,\varepsilon)}{dx} = E_1[\mu^{-2}\alpha_m + \widehat{W}_m], \quad M_m = M_m(m,t(m)). \tag{3.2}$$

Здесь

$$\widetilde{L}_\varepsilon \equiv \mu^{-2}{\varphi_1'}^2(x)\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + \sum_{k=1}^{2}\sum_{j\in 2\cup\overline{4+s,n}}\left[{\varphi_{jk}'}^2(x)\frac{\partial^2}{\partial t_{jk}^2} + \mu^3 d_{jk}\frac{\partial}{\partial t_{jk}}\right] + \mu^4 d_1\frac{\partial}{\partial t_1} + \mu^6\frac{\partial^2}{\partial x^2} - A + Y_\varepsilon^\perp, \tag{3.3}$$

где

$$d_{jk} \equiv 2\varphi_{jk}'(x)\frac{\partial}{\partial x} + \varphi_{jk}''(x), \quad d_{1k} \equiv d_1 \equiv 2\varphi_1'(x)\frac{\partial}{\partial x} + \varphi_1''(x), \tag{3.4}$$

а $Y_\varepsilon^\perp$ — оператор, играющий роль аннулятора при построении асимптотики решения СВЗ (1). Поэтому нет смысла выписывать его явный вид.

4. Регуляризация сингулярно возмущенной задачи в пространстве безрезонансных решений

Введем в рассмотрение множества (подпространства) функций

$$Y_{ri1k} = \{b_i(x)[v_{rik}(x)U_k(t_1) + Q_{rik}(x)U_k'(t_1)]\}, \quad Y_{rijk} = \{b_i(x)\alpha_{rijk}(x)\exp t_{jk}\}, \tag{4.1}$$
$$V_{ri} = \{b_i(x)[f_{ri}(x)\psi(t_1) + g_{ri}(x)\psi'(t_1)]\}, \quad X_{ri} = \{b_i(x)\omega_{ri}(x)\}.$$

Здесь $v_{rik}(x)$, $Q_{rik}(x)$, $\alpha_{rijk}(x)$, $f_{ri}(x)$, $g_{ri}(x)$, $\omega_{ri}(x) \in C^{\infty}[I]$, $U_k(t_1)$ — функции Эйри, свойства которых описаны в [9], а $\psi(t_1)$ — существенно особое многообразие (СОМ),

$$\psi(t_1) = \int_{+\infty}^{t_1} [U_2(t_1)U_1(\tau) - U_1(t_1)U_2(\tau)]d\tau, \tag{4.2}$$

свойства которого описаны в [1], [2], [4]–[6].

Из пространств (4.1) составим пространство

$$Y_r \equiv \bigoplus_{i=1}^{n} Y_{ri} \equiv \bigoplus_{i=1}^{n} \Big[\bigoplus_{k=1}^{2} \bigoplus_{j\in 1,2\cup\overline{4+s,n}} Y_{rijk} \bigoplus V_{ri} \bigoplus X_{ri}\Big]. \tag{4.3}$$

Элемент этого пространства имеет вид

$$W_r(x,t) \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i(x) W_{ri}(x,t) \equiv \sum_{i=1}^{n} \widetilde{W}_{ri}(x,t), \tag{4.4}$$

где

$$W_{ri}(x) \equiv \sum_{k=1}^{2} [v_{rik}(x)U_k(t_1) + Q_{rik}U_k'(t_1)] +$$
$$+ \sum_{j\in\Omega} \alpha_{rijk}(x) \exp t_{jk} + f_{ri}(x)\psi(t_1) + g_{ri}(x)\psi'(t_1) + \omega_{ri}(x), \quad \Omega = 2\cup\overline{4+s,n}. \tag{4.5}$$

Заметим, что описанные пространства Y_r мало чем отличаются от соответствующих пространств Y_r [1].

Поскольку ПБР (4.3) уже описаны, то согласно общей схеме исследования СВЗ с точками поворота [1]–[6] необходимо изучить действие расширенного оператора $\widetilde{L}_\varepsilon$ на элементы с ПБР (4.3). Общая схема исследований та же самая, что в цитированных работах. Необходимо только более внимательно проследить за результатом действия оператора A на элементы, в которых множителями являются векторы $b_i(x)$, $i = \overline{2,4}$.

Остановимся детально на действии расширенного оператора $\widetilde{L}_\varepsilon$ на элементы подпространств Y_{rijk}. Имеем

$$\widetilde{L}_\varepsilon \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \sum_{j\in\Omega} \alpha_{rijk}(x) \exp t_{jk} \equiv \sum_{j\in\Omega} \bigg\{ \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \{[\lambda_j - \lambda_i]\alpha_{rijk} + \mu^3 d_{jk}\alpha_{rijk}(x) + \mu^6 \widetilde{\alpha}_{rijk}(x)\} -$$
$$- \mu^3 b_2(x)\alpha_{r3jk}(x) - \mu^3 b_3(x)\alpha_{r4jk}(x)\bigg\} \exp t_{jk}. \tag{4.6}$$

В этом тождестве согласно (3.1) заменили ${\varphi'_{jk}}^2(x)$ на элементы $\lambda_j(x)$. Функции $\widetilde{\alpha}_{rijk}(x)$ являются известными функциями, полученными от действия оператора $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ на элементы $b_i(x)\alpha_{rijk}(x)$. Разлагая производные $b_i'(x)$ по базису $b_i(x)$, $i = \overline{1,n}$, получим тождество

$$\sum_{j\in\Omega} \sum_{i=1}^{n} d_{jk} b_i(x) \alpha_{rijk}(x) \exp t_{jk} \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \Big\{ \sum_{j\in\Omega} \Big[D_{ijk}\alpha_{rijk}(x) + \sum_{\nu=1,\nu\neq i}^{n} T_{r\nu jk}\alpha_{rijk}(x) \Big] \Big\} \exp t_{jk}. \tag{4.7}$$

Здесь

$$T_{\nu ijk} \equiv 2\varphi'_{jk}(x)(b'_\nu(x), b_i(x)), \quad D_{ijk} \equiv 2\varphi'_{jk}(x) \left[\frac{\partial}{\partial x} + (b_i'(x), b_i^*(x))\right] + \varphi''_{jk}(x), \quad \widetilde{D}_{i11} \equiv \varphi_1(x) D_{i11}. \tag{4.8}$$

Проделав преобразования, аналогичные преобразованиям (4.6), (4.7) над элементами всего пространства Y_r, получим тождество

$$\widetilde{L}_\varepsilon W(x,t) \equiv [R_0 + \mu^2 R_2 + \mu^3 R_3 + \mu^4 R_4 + \mu^6 R_6] W_r(x,t). \tag{4.9}$$

В этом тождестве операторы R_k в их действии на элементы из ПБР (4.3) можно записать в виде следующих тождеств:

$$R_0W_r(x,t)\equiv\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\Big\{[\lambda_1-\lambda_i]\Big[\sum_{k=1}^{2}[v_{rik}(x)U_k(t_1)+Q_{rik}(x)U_k'(t_1)]+$$
$$+f_{ri}(x)\psi(t_1)+g_{ri}(x)\psi'(t_1)\Big]+\sum_{j\in\Omega}[\lambda_j-\lambda_i]\sum_{k=1}^{2}\alpha_{rijk}(x)\exp t_{jk}-\lambda_i(x)\omega_{ri}(x)\Big\},\tag{4.10}$$

$$R_2W_r(x,t)\equiv\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\Big\{\widetilde{D}_{i11}\Big[\sum_{k=1}^{2}Q_{rik}(x)U_k(t_1)+g_{ri}(x)\psi(t_1)\Big]-\varphi_1'^{\,2}(x)f_{ri}(x)+$$
$$+\sum_{\nu=1,\nu\neq i}^{n}\varphi_1(x)T_{\nu i1}\Big[\sum_{k=1}^{2}Q_{r\nu k}(x)U_k(t_1)+g_{r\nu}(x)\psi(t_1)\Big]\Big\},\tag{4.11}$$

$$R_3W_r(x,t)\equiv\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\Big\{\sum_{j\in\Omega}\sum_{k=1}^{2}\Big[D_{ijk}\alpha_{rijk}(x)+\sum_{\nu=1,\nu\neq i}T_{\nu ijk}\alpha_{r\nu jk}(x)\Big]\exp t_{jk}+\sum_{i=3}^{4}b_{i-1}(x)W_{ri}(x,t),\tag{4.12}$$

$$R_4W_r(x,t)\equiv\sum_{i=1}^{n}\Big\{D_{i11}\Big[\sum_{k=1}^{2}v_{rik}(x)U_k'(t_1)+f_{ri}(x)\psi'(t_1)+g_{ri}(x)\Big]+$$
$$+\sum_{\nu=1,\nu\neq i}^{n}T_{\nu i1}\Big[g_{r\nu}(x)+\sum_{k=1}^{2}v_{r\nu k}(x)U_k'(x)+f_{r\nu}\psi'(x)\Big]\Big\}.\tag{4.13}$$

Результат действия оператора $R_6\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ на элемент с ПБР (4.3) более очевиден. Поскольку этот результат будет играть второстепенную роль при построении асимптотики решения СВЗ (1), то нет смысла выписывать его явное выражение.

Согласно общепринятой схеме исследований СВЗ с нестабильным спектром предельного оператора [1]–[6] из полученных тождеств (4.7)–(4.13) сделаем

Вывод 1.

1.1. Пространство безрезонансных решений (4.3) инвариантно относительно операторов R_k, $k=\{0,2,3,4,6\}$, а следовательно, относительно расширенного оператора $\widetilde{L}_\varepsilon$, который будем понимать в виде тождества (4.9).

1.2. Оператор R_0 является главным оператором расширенного оператора $\widetilde{L}_\varepsilon$ в пространстве безрезонансных решений (4.3).

1.3. Расширенная задача (3.2) является регулярно возмущенной относительно малого параметра $\mu>0$ в ПБР (4.3).

1.4. Следовательно, согласно описанному алгоритму проведена регуляризация сингулярно возмущенной задачи (1), которая является основным моментом при получении равномерно пригодной асимптотики решения СВЗ (1) на всем отрезке $I=[0;a]$.

Перед тем, как перейти к очередному этапу построения асимптотики решения СВЗ (1), обратим внимание на следующее. Если в постановке задачи (1) считать оператор A диагонализируемым, то ПБР (4.3) и тождества (4.9)–(4.13) совпадают с соответствующими пространствами и тождествами, ранее полученными для диагонализируемого оператора (см. цитируемую литературу). Из равенств (1.1) и (1.2) будет следовать, что все векторы являются собственными векторами, а следовательно, векторы $b_3(x)$ и $b_4(x)$ будут иметь простую структуру вида $b_i(x)=c_il_i(x)$, $i=3,4$.

В тождестве (4.12) для случая диагонализируемого оператора будут отсутствовать слагаемые $b_k(x)W_{r(k+1)}(x,t)$, $k=2,3$. Эти слагаемые влияют на построение асимптотики решения СВЗ (1), однако они не влияют на построение частных решений $b_i(x)Z_i(x,\varepsilon)$, $i=1\cup\overline{p+2,n}$, однородного уравнения (1). Это утверждение соответствует классической теории построения фундаментальной системы решений (ФСР) для сингулярно возмущенных уравнений.

5. Формализм построения ряда решения расширенной задачи

Из вывода 1.3 следует, что асимптотику расширенной задачи (3.2) следует строить в виде ряда

$$\widetilde{W}(x,t,\varepsilon) = \sum_{r=-2}^{+\infty} \mu^r W_r(x,t), \quad W_r(x,t) \in Y_r. \tag{5.1}$$

Для определения коэффициентов ряда (5.1) получим рекуррентную систему задач

$$R_0 W_{-2}(x,t) = 0, \quad E_1 W_{-2}(M_m) = E_1 \alpha_m, \quad G_m W_{-2} \equiv E_2 \sum_{k=1}^{2} \sum_{j\in\Omega} \varphi'_{jk}(m) \frac{\partial W_{-2}(M_m)}{\partial t_{jk}} = 0, \tag{5.2}$$

$$R_0 W_{-1}(x,t) = 0, \quad E_1 W_{-1}(M_m) = 0, \quad G_m W_{-1} = E_2 \left[\alpha_m - \varphi'_1(m) \frac{\partial W_{-2}(M_m)}{\partial t_1} \right], \tag{5.3}$$

$$R_0 W_0(x,t) = h(x) - R_0 W_{-2}(x,t), \quad E_1 W_0(M_m) = E_1 \widehat{W}_m,$$
$$G_m W_0 = E_2 \left[\widehat{W}_m - \varphi'_1(m) \frac{\partial W_{-1}(M_m)}{\partial t_1} \right] \tag{5.4}$$

и т.д.

Получили серию итерационных задач в частных производных с точечными краевыми условиями. Чтобы показать асимптотическую корректность этой серии задач, необходимо изучить вопрос о существовании в ПБР (4.3) решения итерационного уравнения

$$R_0 W_r(x,t) = H_r(x,t). \tag{5.5}$$

Используя тождество (4.10), запишем структуру ядра оператора R_0. Имеем

$$\operatorname{Ker} R_0 = \{ b_1(x)[v_{r1k}(x) U_k(t_1) + Q_{r1k}(x) U'_k(t_1)], \quad k = 1,2;$$
$$b_j(x)\alpha_{rjjk}(x) \exp t_{5k}, \quad j = \overline{5, 6+s}, \quad k=1,2; \quad b_j(x)\alpha_{rjjk}(x) \exp t_{jk}, \quad j = \overline{7+s, n}, \quad k = 1,2; \tag{5.6}$$
$$\sum_{j=2}^{4} b_j(x) \alpha_{rjjk}(x) \exp t_{2k}, \quad k=1,2; \quad b_1(x)[f_{r1}(x)\psi(t_1) + g_{r1}(x)\psi'(t_1)] \},$$

где коэффициенты при СОМ являются произвольными достаточно гладкими функциями при $x \in I$.

Используя разработанную уже нами схему [1]–[6] с учетом (5.6), можно доказать, что имеет место

Теорема 1. *Пусть* 1) *выполняются условия* 1 *и* 2; 2) *правая часть итерационного уравнения* (5.5) *принадлежит пространству* (4.3) *и не содержит элементов ядра оператора* R_0; 3) $S_{r1}(0) = 0$, *где* $b_1(x) S_{r1}(x)$ — *проекция* $H_r(x,t)$ *на подпространство* X_{r1}. *Тогда в ПБР* (4.3) *существует решение итерационного уравнения* (5.5), *представимое в виде*

$$W_r(x,t) = Z_r(x,t) + y_r(x,t). \tag{5.7}$$

Здесь

$$Z_r(x,t) \equiv b_1(x) \left\{ \sum_{k=1}^{2} [v_{r1k}(x) U_k(t_1) + Q_{r1k}(x) U'_k(t_1)] + f_{r1}(x)\psi(t_1) + g_{r1}(x)\psi'(t_1) \right\} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=2}^{n} b_j(x) \alpha_{rjjk}(x) \exp t_{jk}, \tag{5.8}$$

где $t_{2k} = t_{3k} = t_{4k}$, $t_{jk} = t_{5k}$, $j = \overline{5, 6+s}$, а $y_r(x,t)$ — однозначно определенная вектор-функция, явное выражение которой легко выписать.

Решая постепенно итерационные уравнения (5.2)–(5.4) и так далее, можно показать, что к каждому из этих уравнений применима теорема 1, т. е. имеет место аналог утверждения для диагонализируемого оператора.

6. Построение первых членов асимптотики решения

При последовательном решении итерационных уравнений (5.5) для $r = \overline{-2, 4}$, получим

$$W_r(x,t) \equiv Z_r(x,t), \quad r = -2, -1, \tag{6.1}$$

$$W_0(x,t) \equiv Z_0(x,t) + \omega_0(x). \tag{6.2}$$

Здесь решения определены формулами (5.7), (5.8),

$$\omega_0(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\omega_{0i}(x) \equiv \sum_{i=1}^{n} \widetilde{b}_i(x)\widetilde{\omega}_{0i}(x), \tag{6.3}$$

где

$$\begin{gathered} \widetilde{\omega}_{0i}(x) \equiv -\lambda_i^{-1}(x)(h(x), \widetilde{b}_i^*(x)), \quad i = \overline{2, n}, \\ \widetilde{\omega}_{01}(x) \equiv \lambda_1^{-1}(x)[(h(x), \widetilde{b}_1^*(x)) - \varphi_1'^{\,2}(x) f_{(-2)1}(x)], \end{gathered} \tag{6.4}$$

а в решениях $Z_r(x,t)$, $r = \overline{-2, 0}$, коэффициенты $Q_{r1k}(x) \equiv y_{r1}(x) \equiv 0$ и отсутствуют слагаемые из подпространств V_{ri}.

Скалярные коэффициенты $\alpha_{rjjk}(x)$, $j = \overline{p+s+2, n}$, отвечающие простым элементам спектра предельного оператора A, определяются с точностью до произвольных постоянных множителей α_{rj1}^0, α_{rj2}^a как решения дифференциальных уравнений

$$D_{jjk}\alpha_{rjjk}(x) = 0, \quad j = \overline{p+s+2, n}. \tag{6.5}$$

Коэффициенты $\alpha_{rjjk}(x)$, $j = \overline{p+s, p+s+1}$, отвечающие кратному, но все же диагонализируемому элементу $\lambda_{p+2}(x) \equiv \lambda_5(x)$, определяются как решения системы s дифференциальных уравнений

$$2\varphi_5'(x)\alpha_{r5k}'(x) + [2\varphi_5'(x)T_5(x) + \varphi_5''(x)]\alpha_{r5k}(x) = 0, \tag{6.6}$$

где $\alpha_{r5k}(x) = (\alpha_{r55k}(x), \ldots, \alpha_{r(4+s)(4+s)k}(x))$ — вектор-столбец, а $T_5(x) = \|(b_i'(x), b_j^*(x))\|_{i,j=5}^{4+s}$ — квадратная матрица s-го порядка.

Коэффициенты $\alpha_{rjjk}(x)$, $j = \overline{2, 4}$, отвечающие кратному, но недиагонализируемому элементу $\lambda_2(x)$, определяются как решения системы трех дифференциальных уравнений вида

$$2\varphi_2'(x)\alpha_{r2k}'(x) + [2\varphi_2'(x)T_2(x) + \varphi_2''(x) + J_2]\alpha_{r2k}(x) = 0, \tag{6.7}$$

где $\alpha_{r2k}(x) = (\alpha_{r22k}(x), \alpha_{r33k}(x), \alpha_{r44k}(x))$, а

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нестабильному элементу $\lambda_1(x)$ соответствуют две пары функций $v_{r1k}(x)$ и $f_{r1}(x)$. Они определяются как решения дифференциальных уравнений

$$D_{111}v_{r1k}(x) = 0, \quad D_{111}f_{r1}(x) = 0, \quad r = \overline{-2, 0}. \tag{6.8}$$

Замечание 4. Наличие в системе (6.7) оператора J_2 четко указывает на те изменения, которые вносит недиагонализируемый элемент $\lambda_2(x)$ в определение коэффициентов вектор-функций $W_r(x,t) \in Y_r$. Если же элемент $\lambda_2(x)$ будет диагонализируемым, то $J_2 \equiv 0$ и система (6.7) будет совпадать с системой (6.6), которая соответствует диагонализируемому элементу спектра оператора A. В случае простого спектра предельного оператора A системы (6.6) и (6.7) превращаются в скалярные (независимые друг от друга) дифференциальные уравнения вида (6.5). Следовательно, метод построения асимптотики решения СВЗ (1) содержит в себе как частный случай асимптотику решения СВЗ (1) с простым спектром предельного оператора [1]–[6], т. е. имеет место преемственность предложенного метода построения равномерной асимптотики решения СВЗ с точками поворота [1]–[6].

Таким образом, при постепенном решении итерационных уравнений (5.2)–(5.4) при $r = \overline{-2,4}$, будет получена вектор-функция

$$W_0(x,t,\varepsilon) \equiv \sum_{r=-2}^{0} \mu^r \Big\{ \sum_{k=1}^{2} \Big[b_1(x) v_{r1k}(x) U_k(t_1) + \sum_{j=2}^{n} b_j(x) \alpha_{rjjk}(x) \exp t_{jk} \Big] \Big\} + \\ + \mu^{-2} b_1(x) f_{(-2)1}(x) \psi(t_1) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \omega_{ri}(x).$$

7. Асимптотическая корректность итерационной системы задач

Каждое решение итерационной системы задач (5.2)–(5.4) зависит от $2n$ произвольных постоянных, полученных от интегрирования дифференциальных уравнений (6.5), (6.9) и систем дифференциальных уравнений (6.6), (6.7). Запишем эти постоянные в виде вектора

$$C_r = (v^0_{r11}, v^a_{r12}, \alpha^0_{r221}, \ldots, \alpha^a_{rnn2}), \tag{7.1}$$

где $\alpha^0_{rjj1} = \alpha_{rjj1}(0)$, $\alpha^a_{rjj2} = \alpha_{rjj2}(a)$. Необходимо показать, что вектор (7.1) однозначно определяется соответствующими краевыми условиями (5.2)–(5.4).

Подставив решение $W_{-2}(x,t)$ в краевые условия (5.2), получим систему $2n$ алгебраических уравнений ($r = -2$)

$$\Delta(\varepsilon) C_r = \Gamma_r, \tag{7.2}$$

где

$$\Gamma_{-2} = (\Gamma^0_{(-2)111}, \Gamma^a_{(-2)112}, 0, \ldots, 0),$$
$$\Gamma^0_{(-2)111} = \alpha_{01} - b_{11}(0) f_{(-2)1}(0) \psi(0), \quad \Gamma_{(-2)112} = \alpha_{a1} - b_{11}(a) f_{(-2)1}(a) \psi(t_1(a)).$$

Главный член определителя системы (7.2) можно записать в виде

$$|\Delta(\varepsilon)| = b_{11}(0) b_{11}(a) O(\sqrt{\mu}) \prod_{j=2}^{n} \varphi'_{j1}(0) \varphi'_{j2}(a) |\widetilde{B}(0)|\, |\widetilde{B}(a)|, \tag{7.3}$$

где

$$\widetilde{B}(x) = \begin{pmatrix} b_{22}(x) & \cdots & b_{n2}(x) \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ b_{2n}(x) & \cdots & b_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

Поскольку все же $\mu > 0$, то $|\Delta(\varepsilon)| \neq 0$, если

$$b_{11}(m) \neq 0, \quad |\widetilde{B}(m)| \neq 0, \quad m = 0, a. \tag{7.4}$$

Вывод 2. При выполнении условий (7.6) система (7.2) имеет единственное решение, т. е. задача (5.2) однозначно разрешима в ПБР Y_{-2}. Продолжая далее подставлять решения $W_r(x,t)$ в соответствующие краевые условия, методом математической индукции можно показать, что каждая из итерационных задач (5.2)–(5.4) имеет единственное решение в ПБР (4.3). Следовательно, рекуррентная система задач (5.2)–(5.4) асимптотически корректна в пространстве безрезонансных решений (4.3).

Проведем сужение при $t = \Phi(x, \varepsilon)$ в формальном ряде решения (5.1) и запишем его в виде тождества

$$W(x, \Phi(x, \varepsilon), \varepsilon) \equiv \sum_{r=-2}^{q} \mu^r W_r(x, \Phi, \varepsilon) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \xi_{(q+1)i}(x, \Phi, \varepsilon).$$

Используя методику цитируемых работ, придем к оценке

$$||\xi_{(q+1)i}(x, \Phi(x, \varepsilon), \varepsilon)|| \leq \mu^{q+1} K, \tag{7.5}$$

где постоянная K не зависит от $x \in I$ и малого параметра $\varepsilon > 0$. Имеет место

Теорема 2. *Пусть для СВЗ* (1) а) *выполняются условия* 1 *и* 2; б) *оператор A эквивалентен блочно-диагональной матрице* (3)*;* в) *имеют мето условия* (7.4)*. Тогда при достаточно малых значениях параметра* $\varepsilon > 0$

1) *для решения расширенной задачи* (3.2) *может быть построен асимптотический ряд* (5.1);

2) *сужение ряда* (5.1) *при* $t = \Phi(x, \varepsilon)$ *является асимптотическим рядом решения СВЗ* (1);

3) *остаточный член асимптотического ряда решения СВЗ* (1) *имеет оценку* (7.5);

4) *при* $\alpha_{mi} = b_{ii}(m) f_{(-2)1}(m) \psi(t_1(m))$, $m = 0, a$, *на любом компакте отрезка* $[0; a]$, *не содержащем точки* $x = 0$, *имеет место предельное соотношение*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} W(x, \Phi(x, \varepsilon), \varepsilon) = \omega(x),$$

где $\omega(x)$ *— решение вырожденного векторного уравнения* (4)*, представимое формулами* (6.3), (6.4).

Литература

1. Бобочко В.Н. *Асимптотическое интегрирование системы дифференциальных уравнений с точкой поворота* // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т. 27. – № 9. – С. 1505–1515.
2. Бобочко В.Н. *Уравнение типа Орра-Зоммерфельда с двумя точками поворота* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 10. – С. 1759-1770.
3. Бобочко В.Н., Маркуш І.І. *Асимптотичне інтегрування диференціальних рівнянь із нестабільним спектром граничного оператора.* – Київ: Віпол, 1993. – 214 с.
4. Бобочко В.Н. *Точка звороту в системі диференціальних рівнянь з аналітичним оператором* // Укр. матем. журн. – 1996. – Т. 48. – № 2. – С. 147–160.
5. Бобочко В.Н. *Внутренняя точка поворота в теории сингулярных возмущений* // Укр. матем. журн. – 1996. – Т. 48. – № 7. – С. 876–890.
6. Бобочко В.Н. *Асимптотика решения системы дифференциальных уравнений с кратной точкой поворота* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32. – № 9. – С. 1153–1155.
7. Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П. *Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.* – Киев: Вища школа, 1989. – 288 с.
8. Ломов С.А. *Введение в общую теорию сингулярных возмущений.* – М.: Наука. 1981. – 398 с.
9. Дородницын А.А. *Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка* // УМН. – 1952. – Т. 7. – Вып. 6. – С. 3-96.

Кировоградский государственный педагогический институт

Поступила 31.01.1997