И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2006 МАТЕМАТИКА № 11 (534)

УДК 517.51:517.96:519.64

Б.Г. ГАБДУЛХАЕВ, Р.К. ГУБАЙДУЛЛИНА

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА МНОГОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается сингулярное интегральное уравнение (с. и. у.)

$$Au \equiv a(x)u(x) + \int_D \frac{f(\theta)h(x,y)}{r^2}u(y)dy = g(x), \quad x \in D, \quad \theta = \frac{x-y}{r}, \tag{1}$$

где D — круг единичного радиуса с центром в начале координат, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ — его точки, $r = |x - y|$ — евклидово расстояние между этими точками, $a(x) \in C(D)$, $g(x) \in L_2(D)$ — данные, а $u(x) \in L_2(D)$ — искомая функции; характеристика $f(\theta) \in L_1[0, 2\pi]$ удовлетворяет необходимому и достаточному условию существования сингулярного интеграла из (1) в смысле главного значения [1], а функция $h(x, y) \in C(D^2)$ такова, что

$$\|A\|_{L_2(D)\to L_2(D)} \le M = \text{const} < \infty. \tag{2}$$

Следует отметить, что проблема как точного, так и приближенного решения уравнения (1) является весьма актуальной и для теории, и для решения ряда прикладных задач, например, таких как контактные задачи теории упругости и задачи механики разрушения (см., напр., [1]–[5] и библиографию в них).

1. Теорема существования и единственности решения

Неизвестную функцию $u(x)$ будем искать в пространстве $L_2(D) = L_2$ квадратично-суммируемых в круге D вещественных функций со скалярным произведением и нормой соответственно

$$(u, v) = \int_D u(x)v(x)dx, \quad u, v \in L_2; \quad \|u\| = \left(\int_D |u(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \quad u \in L_2. \tag{3}$$

Тогда с. и. у. (1) можно рассматривать как операторное уравнение

$$Au \equiv au + Su = g, \quad Su = \int_D \frac{f(\theta)h(x,y)}{r^2}u(y)dy, \quad u, g \in L_2. \tag{4}$$

Обозначим через $C(D)$ пространство всех непрерывных в круге D функций с нормой

$$\|u\|_C = \|u\|_{C(D)} = \max_{x \in D} |u(x)|, \quad u \in C(D).$$

Для с. и. у. (1) справедлива

Теорема 1. *Пусть*

$$\min_{x \in D} |a(x)| \ge m_0 = \text{const} > 0 \tag{5}$$

и выполняется одно из условий:

α) *функция* $f(\theta)$ *является нечетной и*

$$(S^- u, u) \ge \delta_1 \|u\|^2, \quad u \in L_2(D), \quad S^- u = \frac{1}{2}\int_D \frac{f(\theta)[h(x,y) - h(y,x)]}{r^2}u(y)dy;$$

β) $f(\theta)$ является четной и

$$(S^+u,u)\geq \delta_2\|u\|^2,\quad u\in L_2(D),\quad S^+u=\frac{1}{2}\int_D \frac{f(\theta)[h(x,y)+h(y,x)]}{r^2}u(y)dy,$$

где $\delta_i\in\mathbb{R}$.

Пусть, кроме того, $m=m_0+\delta_i>0$, $i=1$ или 2. Тогда оператор $A:L_2(D)\to L_2(D)$ непрерывно обратим и

$$\|A^{-1}\|_{L_2\to L_2}\leq m^{-1}<\infty.$$

Доказательство. В дальнейшем без ограничения общности можно считать, что $a(x)>0$ (случай $a(x)<0$ обосновывается аналогично).

Докажем теорему при выполнении условия α). Учитывая (3)–(5), для любого $u\in L_2$ имеем

$$(Au,u)=(au,u)+(Su,u)\geq m_0(u,u)+(Su,u). \tag{6}$$

Для оценки второго слагаемого в правой части (6) регулярное ядро $h(x,y)$ представим в виде

$$h(x,y)=h^+(x,y)+h^-(x,y),\quad h^\pm(x,y)=\frac{h(x,y)\pm h(y,x)}{2}. \tag{7}$$

Тогда интегральный оператор из (4) принимает вид

$$Su=\int_D\frac{f(\theta)h(x,y)}{r^2}u(y)dy=\int_D\frac{f(\theta)h^+(x,y)}{r^2}u(y)dy+\int_D\frac{f(\theta)h^-(x,y)}{r^2}u(y)dy\equiv S^+u+S^-u.$$

Покажем, что в скалярном произведении

$$(Su,u)=(S^+u,u)+(S^-u,u) \tag{8}$$

первое слагаемое в (8) равно нулю. Учитывая симметричность функций $h^+(x,y)$ и $r^2=|x-y|^2$ и нечетность функции $f(\theta)$ ($\theta=(x-y)/r^2$), последовательно находим

$$(S^+u,u)\equiv\int_D u(x)dx\int_D\frac{f(\theta)h^+(x,y)}{r^2}u(y)dy=-\int_D u(y)dy\int_D\frac{f(-\theta)h^+(y,x)}{r^2}u(x)dx=$$
$$=-(u,S^+u)=-(S^+u,u)=0,\quad u\in L_2.$$

Отсюда и из условия α) следует положительная определенность оператора A:

$$(Au,u)=(au,u)+(S^+u,u)+(S^-u,u)\geq m_0\|u\|^2_{L_2}+\delta_1\|u\|^2_{L_2}=m\|u\|^2_{L_2},\quad u\in L_2(D).$$

Следовательно, выполняется неравенство $\|Au\|_{L_2}\geq m\|u\|_{L_2}$, $u\in L_2(D)$. Тогда (см. [6], гл. 5, § 4) оператор $A:L_2\to L_2$ имеет левый непрерывный обратный оператор A_l^{-1} и

$$\|A_l^{-1}\|\leq\frac{1}{m}<\infty. \tag{9}$$

Поскольку сопряженное пространство $L_2^*(D)=L_2(D)$, то для сопряженного оператора $A^*:L_2\to L_2$ выполняется $(A^*u,u)=(u,A^{**}u)=(u,Au)=(Au,u)$. Тогда для оператора A^*, аналогично A, получаем неравенство $\|A^*u\|_{L_2}\geq m\|u\|_{L_2}$, $u\in L_2(D)$, откуда также следует существование левого непрерывного обратного $(A^*)_l^{-1}=A_l^{*-1}$ и справедливость формулы

$$\|A_l^{*-1}\|\leq\frac{1}{m}<\infty. \tag{10}$$

Из соотношений (10) и (9) следует, что существует двусторонний обратный оператор $A^{-1}:L_2\to L_2$ и

$$\|A^{-1}\|\leq\frac{1}{m}<\infty.$$

Доказательство теоремы при выполнении условия β) проводится аналогично. Заметим лишь, что первое слагаемое в (8) оценивается с помощью условия β), а второе слагаемое (S^-u,u) равно нулю в силу кососимметричности функции $h^-(x,y)$, симметричности r^2 и четности функции $f(\theta)$.

Следствие. В условиях теоремы интегральное уравнение (1) имеет единственное решение $u^* = A^{-1}g \in L_2(D)$ при любой правой части $g(x) \in L_2(D)$ и для него справедливо неравенство $\|u^*\|_{L_2(D)} \le \frac{1}{m}\|f\|_{L_2(D)}$. Кроме того, решение $u^*(x)$ является L_2-устойчивым относительно малых возмущений функций $a(x)$ в $C(D)$, $h(x,y)$ в $C(D^2)$ и $g(x)$ в $L_2(D)$.

2. Методы отыскания приближенного решения с. и. у. (1)

2.1. *Итерационные методы.* Для с. и. у. (1) справедлива

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *единственное решение* $u^*(x) \in L_2(D)$ *уравнения* (1) *при любой* $g(x) \in L_2(D)$ *является пределом в* $L_2(D)$ *итерационной последовательности*

$$u^k = u^{k-1} + \frac{m}{M^2}(g - Au^{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, \tag{11}$$

при любом начальном приближении $u^0 \in L_2(D)$. *При этом погрешность* k*-го приближения может быть оценена неравенствами*

$$\|u^* - u^k\| \le \lambda^k \|u^* - u^0\| \le \frac{\lambda^k}{1-\lambda}\|u^1 - u^0\|, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где $\lambda = \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}} < 1$; *если же за начальное приближение принять* $u^0 = (m/M^2)\, g$, *то*

$$\|u^* - u^k\| \le \frac{\lambda^{k+1}}{1-\lambda}\frac{m}{M^2}\|g\|, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где константа M *определена в* (2), *а* m — *в теореме* 1.

Доказательство. Запишем уравнение (4) в эквивалентном виде

$$u = Tu + \frac{m}{M^2}g \quad (u, g \in L_2), \tag{12}$$

где $T = (E - \frac{m}{M^2}A)$ – так называемый оператор перехода. С учетом свойства числа обусловленности оператора $A : L_2 \to L_2$ нетрудно показать, что для оператора перехода имеет место неравенство

$$\|T\| \le \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}} \equiv q < 1. \tag{13}$$

Поэтому уравнение (12), а следовательно, и исходное уравнение (1), имеет единственное решение $u^* \in L_2$ при любом $g \in L_2$. Очевидно, универсальный итерационный метод (11) для исходного уравнения (1) совпадает с методом простой итерации для вспомогательного уравнения (12), эквивалентного исходному уравнению (1). Тогда в силу (13) остальное выводится из известных результатов по методу последовательных приближений (напр., [6], с. 213–214).

В случае, когда S/a — оператор сжатия, можно вместо универсального итерационного метода использовать метод простой итерации. Тогда результаты значительно упрощаются и усиливаются.

В силу свойств функции $a(x)$, операторное уравнение (4) можно представить в эквивалентном виде

$$u = \frac{g}{a} - \frac{1}{a}Su. \tag{4'}$$

Решение этого уравнения будем искать как предел итерационной последовательности $\{u^k\}_0^\infty$, где

$$u^{k+1} = \frac{1}{a}(g - Su^k), \quad k = 0, 1, \dots, \tag{14}$$

при любом начальном приближении $u^0 \in L_2(D)$.

Поскольку

$$\left\|\frac{1}{a}\right\|_{L_2\to L_2} = \sqrt{\int_D \left|\frac{1}{a(x)}\right|^2 dx} \le \max_{x\in D}\left|\frac{1}{a(x)}\right|\sqrt{\int_D dx} = \frac{\pi}{\min\limits_{x\in D}|a(x)|},$$

то

$$\left\|\frac{1}{a}S\right\|_{L_2\to L_2} \le \frac{\pi}{\min\limits_{x\in D}|a(x)|}\|S\|_{L_2\to L_2} \equiv q.$$

Если

$$\|S\|_{L_2\to L_2} < \frac{\min\limits_{x\in D}|a(x)|}{\pi},$$

то имеем $q<1$. Следовательно, в силу известных результатов ([6], гл. 5, § 5) можно утверждать, что (14) есть метод простой итерации для уравнения (4′), т. е. единственное решение уравнения (4′) (а следовательно, и уравнения (4)) можно найти как предел $u^*(x) = \lim\limits_{k\to\infty} u^k(x)$ в $L_2(D)$. При этом для погрешности k-го приближения справедливы оценки

$$\|u^* - u^k\|_2 \le q^k\|u^* - u^0\|_2 \le \frac{q^k}{1-q}\|u^1 - u^0\|_2, \quad k = 1,2,\dots \tag{15}$$

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Пусть выполнено неравенство*

$$\|S\|_{L_2\to L_2} < \frac{\min\limits_{x\in D}|a(x)|}{\pi}.$$

Тогда уравнение (1) *имеет единственное решение* $u^* \in L_2$ *при любой* $g \in L_2$, *которое можно найти как предел в* L_2 *последовательности* (14) *при любом начальном приближении* $u^0 \in L_2$. *При этом для погрешности* k*-го приближения справедливы оценки* (15), *где*

$$q = \frac{\pi\|S\|_{L_2\to L_2}}{\min|a(x)|}.$$

2.2. *Общий проекционный метод.* В силу сепарабельности пространства L_2 в нем всегда существует линейно независимая полная ортонормальная система функций

$$\{\psi_k(x)\}_1^\infty, \quad \psi_k \in L_2(D), \quad D \subset \mathbb{R}^2. \tag{16}$$

Обозначим через X_n линейную оболочку, натянутую на первые $n \in \mathbb{N}$ элементов системы (16). Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде

$$u_n(x) = \sum_{k=1}^n \gamma_k\psi_k(x), \quad u_n \in X_n, \quad x \in D, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{17}$$

а неизвестные коэффициенты $\gamma_k \in \mathbb{R}$ определять из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k c_l(A\psi_k) = c_l(g), \quad l = \overline{1,n}, \tag{18}$$

где $c_p(y) = (y,\psi_p)$ — коэффициенты Фурье функции $y \in L_2$ по системе координатных функций (16).

Для вычислительной схемы (1), (17), (18) справедлива

Теорема 4. *В условиях теоремы 1 СЛАУ (18) однозначно разрешима при любых $n \in \mathbb{N}$, и приближенные решения (17) сходятся в L_2 к точному решению уравнения (1). При этом погрешность приближенной формулы $u^*(x) \approx u_n(x)$ при любых $n \in \mathbb{N}$ может быть оценена с помощью неравенств*

$$E_n(u^*) \le \|u^* - u_n\| \le \frac{M}{m} E_n(u^*), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $E_n(u^*)$ — наилучшее приближение в L_2 функции $u^* \in L_2$ всевозможными элементами из X_n.

Доказательство. СЛАУ (18) эквивалентна операторному уравнению

$$A_n u_n \equiv P_n A u_n = P_n g \quad (u_n, P_n g \in X_n), \tag{19}$$

где $P_n : L_2 \to X_n \subset L_2$ — линейный оператор ортогонального проектирования, определяемый по формуле

$$P_n(f; x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(f) \psi_k(x), \quad f \in L_2(D), \quad c_k(f) = (f, \psi_k).$$

Тогда

$$P_n^2 = P_n, \quad P_n^* = P_n, \quad \|P_n\|_{L_2} = 1, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{20}$$

где P_n^* — оператор, сопряженный с P_n.

В силу (20) и теоремы 1 для любого $u_n \in X_n$ имеем $(A_n u_n, u_n) = (P_n A u_n, u_n) = (A u_n, P_n^* u_n) = (A u_n, P_n u_n) = (A u_n, u_n) \ge m\|u_n\|^2$. Поэтому $\|A_n u_n\| \ge m\|u_n\|$, $u_n \in X_n$, $n \in \mathbb{N}$. Это условие, как известно (напр., [7], с. 9–12) является в силу конечномерности подпространств X_n необходимым и достаточным условием существования ограниченного двустороннего обратного оператора $A_n^{-1} : X_n \to X_n$:

$$\|A_n^{-1}\| \le \frac{1}{m} < \infty, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Поэтому уравнение (19), а следовательно, и СЛАУ (18) однозначно разрешимы при любом $n \in \mathbb{N}$. Оценим погрешность $u^* - u_n = A^{-1}g - A_n^{-1} P_n g$ приближенного решения в пространстве L_2. С учетом (21) и $u_n \in X_n$ ([8], гл. 1, лемма 2.2) находим

$$E_n(u^*) \le \|u^* - u_n\| = \|(E - A_n^{-1} P_n A)(u^* - P_n u^*)\| \le \|E - A_n^{-1} P_n A\| \, \|u^* - P_n u^*\|. \tag{22}$$

Тогда, учитывая равенства (20) и неравенства (2) и (21), из (22) получаем

$$E_n(u^*) \le \|u^* - u_n\| \le (1 + \|A_n^{-1} P_n A\|) \, \|u^* - P_n u^*\| \le \frac{M}{m} E_n(u^*).$$

Отсюда, учитывая тождество $(Au^* - Au_n, u^* - u_n) = (Au^* - Au_n, u^* - P_n u^*)$, находим требуемое утверждение.

2.3. *Проекционно-итеративные методы.* Следует отметить, что даже при достаточно удачном выборе координатных функций $\{\psi_k\}_1^\infty$ решение СЛАУ (18) во многих случаях представляет значительные практические трудности. В связи с этим может оказаться полезным следующий простой способ ее решения универсальным линейным одношаговым итерационным методом. Решение (17) уравнения (19) будем искать в виде

$$u_n^j = u_n^{j-1} + \frac{m}{M^2}(P_n g - A_n u_n^{j-1}), \tag{23}$$

где $j, n \in \mathbb{N}$, а u_n^0 — произвольное начальное приближение из X_n.

Теорема 5. *В условиях теоремы 1 решение $u_n \in X_n$ уравнения (19) можно найти как предел в L_2 итерационной последовательности (23), причем для $u_n^0 = (m/M^2) P_n g$ справедливы оценки*

$$\|u_n - u_n^j\| \le \frac{\lambda^{j+1}}{1 - \lambda} \frac{m}{M^2} \|P_n g\|, \quad n, j \in \mathbb{N}.$$

Доказательство теоремы ведется по схеме доказательства теоремы 2, однако здесь используется новый оператор перехода

$$\widetilde{T} = E - \frac{m}{M^2}P_nA = P_n\Big(E - \frac{m}{M^2}A\Big) : X_n \to X_n,$$

норма которого удовлетворяет с учетом (13) и последнего из равенств (20) неравенству

$$\|\widetilde{T}\|_{X_n\to X_n} \le \|\widetilde{T}\|_{L_2\to L_2} \le \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}} \equiv \lambda < 1. \tag{24}$$

Из теорем 4 и 5 следует

Теорема 6. *В условиях теоремы* 1 *единственное решение* $u^* \in L_2(D)$ *уравнения* (1) *можно найти как предел*

$$u^* = \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\lim_{j\to\infty} u_n^j$$

в L_2 *проекционно-итерационной последовательности* (23). *При этом для любых* $n, j \in \mathbb{N}$ *и* $u_n^0 \in X_n$ *справедлива оценка*

$$\|u^* - u_n^j\| \le \frac{M}{m}E_n(u^*) + \frac{\lambda^j}{1-\lambda}\|u_n^1 - u_n^0\|;$$

если же $u_n^0 = (m/M^2)P_ng$, *то*

$$\|u^* - u_n^j\| \le \frac{M}{m}E_n(u^*) + \frac{\lambda^{j+1}}{1-\lambda}\frac{m}{M^2}\|g\|,$$

где $n, j \in \mathbb{N}$, *а число* λ *определено в* (24).

В заключение отметим, что полученные выше результаты легко переносятся на случай, когда D может быть любой ограниченной областью. Кроме того, эти результаты легко переносятся на случай комплекснозначных функций $a(x)$, $u(x)$, $f(\theta)$, $h(x,y)$, $g(x)$ от вещественных переменных.

Литература

1. Михлин С.Г. *Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.* – М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.
2. Michlin S.G., Prößdorf S. *Singuläre Integraloperatoren.* – Berlin: Akademic-Verlag, 1980. – 514 S.
3. Михлин С.Г., Морозов Н.Ф., Паукшто М.В. *Граничные интегральные уравнения и задачи теории упругости.* – – Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. – 88 с.
4. Габдулхаев Б.Г. *Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегродифференциальных уравнений* // Итоги науки и техн. Матем. анализ. – М.:ВИНИТИ, 1980. – Т. 18. – С. 251–307.
5. Хай М.В. *Двумерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения.* – Киев: Наук. думка, 1993. – 253 с.
6. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
7. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
8. Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 230 с.

Казанский государственный университет

Поступила 01.09.2005