ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 10 (533)

УДК 517.548

В.В. АСЕЕВ, О.А. ЛАЗАРЕВА

О НЕПРЕРЫВНОСТИ ПРИВЕДЕННОГО МОДУЛЯ И ТРАНСФИНИТНОГО ДИАМЕТРА

Рассматривается вопрос о непрерывности конформного модуля конденсаторов в $\overline{R^n}$, приведенного модуля в $\overline{R^n}$ и трансфинитного диаметра в R^2 относительно сходимости компактных равномерно совершенных множеств в метрике Хаусдорфа. Непрерывность этих характеристик отмечается в литературе лишь для случая монотонной по включению сходимости множеств. Основной результат статьи представлен в § 3, где установлено, что свойство непрерывности конформного модуля по одной из пластин конденсатора является равномерным относительно выбора другой пластины в семействе множеств сколь угодно малого диаметра. Это свойство является более тонким, чем установленная ранее в [1] непрерывность конформной емкости. Из этой теоремы в § 4 выводится свойство непрерывности приведенного модуля областей в $\overline{R^n}$ относительно хаусдорфовой сходимости их границ. В § 5, используя известное выражение трансфинитного диаметра на плоскости через приведенный модуль в бесконечно удаленной точке, получаем соответствующую теорему о непрерывности трансфинитного диаметра. Все компактные множества, изучаемые в этих теоремах, предполагаются равномерно совершенными в смысле Поммеренке [2]. Основные результаты этой статьи анонсированы в [3].

§ 1. Вводные замечания, обозначения и терминология

Под пространством $\overline{R^n} = R^n \cup \{\infty\}$ понимается одноточечная компактификация пространства R^n. Пару (E_0, E_1) непустых непересекающихся компактных множеств в $\overline{R^n}$ называем конденсатором, а множества E_0 и E_1 — пластинами конденсатора. Телом (или полем) конденсатора (E_0, E_1) называют объединение всех тех компонент связности открытого множества $\overline{R^n}\setminus(E_0\cup E_1)$, замыкание каждой из которых имеет непустое пересечение с каждой из пластин этого конденсатора. В случае, когда тело является двухсвязной областью, конденсатор обычно называют кольцевой областью или кольцом. Через $\operatorname{Cap}(E_0, E_1)$ и $\operatorname{Mod}(E_0, E_1)$ обозначаются соответственно конформная емкость (определение приведено в § 2) и конформный модуль конденсатора; связь между этими величинами выражена формулой (напр., [4], с. 46)

$$\operatorname{Mod}(E_0, E_1)^{n-1} = \omega_{n-1}/\operatorname{Cap}(E_0, E_1), \tag{1}$$

где ω_{n-1} есть $(n-1)$-мерная мера Лебега сферы единичного радиуса в пространстве R^n.

В дальнейшем тексте $\overline{A}$ — замыкание множества A, $\operatorname{Int}(A)$ — внутренность множества A, ∂A — граница множества A, т. е. множество $\overline{A} \setminus \operatorname{Int}(A)$. Для шара радиуса $r > 0$ с центром в точке $a \in R^n$ используются обычные обозначения $B(a, r) = \{x \in R^n : |x - a| < r\}$ и $\overline{B}(a, r) = \{x \in R^n : |x - a| \le r\}$. Символом $q(x, y)$ обозначается хордовое расстояние между точками $x, y \in \overline{R^n}$ (напр., [5], с. 5, (1.15), или [6], с. 25, (3.1.3)). Открытый шар в хордовой метрике обозначается через $Q(a, r) = \{x \in \overline{R^n} : q(a, x) < r\}$, где a — хордовый центр шара, а $r > 0$ — его хордовый радиус. Для евклидова и хордового диаметров множества A используются соответствующие

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда “Университеты России” (проект УР.04.01.050).

обозначения $\operatorname{diam}(A)$ и $\operatorname{diam}_q(A)$. Евклидова и хордовая дистанции между непустыми множествами A и B определяются соответственно формулами

$$d(A,B) = \inf_{x\in A,\ y\in B} |x-y|, \quad d_q(A,B) = \inf_{x\in A,\ y\in B} q(x,y).$$

Полагаем $d(a,A) = d(\{a\},A)$ и $d_q(a,A) = d_q(\{a\},A)$. Хаусдорфовым хордовым расстоянием между непустыми компактными множествами в $\overline{R^n}$ называется величина ([7], с. 223)

$$\operatorname{dist}_q(A,B) = \max\{\sup_{a\in A} d_q(a,B), \sup_{b\in B} d_q(b,A)\}.$$

§ 2. Экстремальная функция для конформной емкости

Допустимой функцией для конденсатора (E_0,E_1) в $\overline{R^n}$ называют любую вещественную функцию $u : \overline{R^n} \to R$, которая непрерывна в $\overline{R^n}$, принадлежит классу $ACL(R^n)$ (т. е. абсолютно непрерывна на почти всех прямых, параллельных координатным осям, [8], с. 226) и принимает значения $u(x_0) \le 0$ и $u(x_1) \ge 1$ для всех $x_0 \in E_0$ и $x_1 \in E_1$. Семейство всех допустимых для конденсатора $\mathbf{E} = (E_0,E_1)$ функций обозначим символом $\operatorname{Adm}\mathbf{E}$. Конформой емкостью конденсатора $\mathbf{E}$ называется величина

$$\operatorname{Cap}(\mathbf{E}) = \operatorname{Cap}(E_0,E_1) = \inf_{u\in \operatorname{Adm} E} \int_{R^n} |\nabla u(x)|^n dx, \tag{2}$$

где интегрирование выполняется по n-мерной мере Лебега в пространстве R^n. Так как для любой функции $u \in \operatorname{Adm}\mathbf{E}$ функция $v(x) = \min\{1, \max\{0, u(x)\}\}$ остается допустимой для конденсатора $\mathbf{E} = (E_0,E_1)$, то класс $\operatorname{Adm}\mathbf{E}$ в определении (2) можно заменить классом $\operatorname{Adm}'\mathbf{E}$ тех допустимых функций, которые равны нулю на E_0 и единице на E_1. Более того, класс $\operatorname{Adm}\mathbf{E}$ можно ограничить лишь теми допустимыми функциями, которые монотонны вниз к множеству E_0 и монотонны вверх к множеству E_1 в смысле следующего определения.

Определение 2.1 ([9], с. 1217, или [4], с. 39). Непрерывную вещественную функцию $u(x)$, заданную в области $D \subset \overline{R^n}$, называем *монотонной вниз* к множеству $E_0 \subset \overline{D}$, если для любой точки $a \in D$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует континуум $\gamma \subset D \cup E_0$ такой, что $a \in \gamma$, $\gamma \cap E_0 \ne \emptyset$, и $u(x) < u(a) + \varepsilon$ для всех $x \in D \cap \gamma$. Аналогично, функция $u(x)$ называется *монотонной вверх* к множеству $E_1 \subset \overline{D}$, если для любой точки $a \in D$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует континуум $\gamma \subset D \cup E_1$ такой, что $a \in \gamma$, $\gamma \cap E_1 \ne \emptyset$ и $u(x) > u(a) - \varepsilon$ для всех $x \in D \cap \gamma$.

В случае $D = \overline{R^n}$ определение 2.1 принимает более простой вид: монотонность вниз к множеству E_0 означает, что любую точку $a \in \overline{R^n}$ можно соединить континуумом γ_0 с множеством E_0 так, что $u(x) \le u(a)$ для всех $x \in \gamma_0$. Аналогично упрощается и определение монотонности вверх к множеству E_1. Отметим, что на открытом множестве $\overline{R^n} \setminus (E_0 \cup E_1)$ функция $u(x)$, монотонная по определению 2.1, является монотонной и в смысле Лебега ([10], с. 98, лемма 2.3). Частным случаем теорем ([4], с. 41) и ([10], с. 98, 2.5) является

Теорема 2.1. *Для любого конденсатора $\mathbf{E} = (E_0,E_1)$ в $\overline{R^n}$ величина конформной емкости в формуле* (2) *останется той же, если инфимум в правой части формулы берется по классу $\operatorname{Adm}^*\mathbf{E}$ всех тех допустимых функций $u \in \operatorname{Adm}'\mathbf{E}$, которые монотонны вниз к множеству E_0 и монотонны вверх к множеству E_1.*

Определение 2.2 ([11], с. 517, 2.6). Компактное множество $T \subset \overline{R^n}$ называется α-равномерно совершенным (uniformly perfect) с параметром $\alpha > 0$, если не существует конденсатора (F_0,F_1) со связными пластинами такого, что $\operatorname{Mod}(F_0,F_1) > \alpha$ и при этом

$$T \subset F_0 \cup F_1, \quad T \cap F_0 \ne \emptyset \ne T \cap F_1.$$

Теорема 2.2. *Для любого конденсатора* $\mathbf{E} = (E_0, E_1)$ *с неодноточечными равномерно совершенными пластинами существует единственная функция* $u(x) \in \operatorname{Adm}\mathbf{E}$ *такая, что*

$$\operatorname{Cap}(\mathbf{E}) = \int_{R^n} |\nabla u(x)|^n dx.$$

(*Эта функция называется* экстремальной *для конденсатора* $\mathbf{E}$.) *При этом* $u(x) \equiv 0$ *на любой компоненте дополнения к* E_0*, не пересекающейся с* E_1*, и* $u(x) \equiv 1$ *на любой компоненте дополнения к* E_1*, не пересекающейся с* E_0*.*

Доказательство. Пусть E_i $(i = 0, 1)$ является α-равномерно совершенным неодноточечным множеством с некоторым $\alpha > 0$, $x_0 \in E_i \cap R^n$ $(i = 0, 1)$ и $\varphi(t) = \operatorname{Cap}(\overline{R^n} \setminus B(x_0, 2t), E_i \cap \overline{B}(x_0, t))$. Известно ([11], с. 522, теорема 4.1(3)), что тогда существует зависящая лишь от n и α константа C_2 такая, что $\varphi(t) \geq C_2$ для всех $t \in (0, t_0]$, где $t_0 = \operatorname{diam}(E_i)$. Отсюда следует расходимость интеграла

$$\int_0^{t_0} \frac{\varphi(t)^{1/(n-1)}}{t} dt \geq C_2^{1/(n-1)} \int_0^{t_0} \frac{dt}{t} = +\infty,$$

означающая, что в точке x_0 выполнен критерий регулярности ([10], с. 104, (3.3)). Следовательно, все точки множества $(E_0 \cup E_1)$ являются регулярными, и требуемое утверждение следует из теоремы Ш. Янга ([10], с. 104, теорема 3.4), обобщающей аналогичную теорему Ф. Геринга для кольцевых областей. □

Из свойств конденсаторов с равномерно совершенными пластинами потребуется следующий аналог леммы Вяйсяля, удобный для получения нижних оценок конформной емкости.

Теорема 2.3 ([1], теорема 3, с. 246). *Пусть* $\alpha > 0$ *и* α*-равномерно совершенные множества* E_0 *и* E_1 *пересекаются с каждой из компонент дополнения к шаровому слою* $D = \{x \in R^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$*. Если* $r_2/r_1 > 1 + 2e^{\alpha}$*, то*

$$\operatorname{Cap}(E_0, E_1) \geq C \operatorname{Ln}\left(\frac{r_2}{r_1}\right),$$

где положительная константа C *зависит лишь от* α *и* n*.*

И наконец, приведем одно из специальных свойств экстремальной функции.

Теорема 2.4 ([12], утверждение 1, с. 232). *Пусть* $u_0(x)$ *— экстремальная функция для конденсатора* (E_0, E_1) *в* $\overline{R^n}$*, имеющего ненулевую конформную емкость. Пусть* $a \in (0, 1)$*,* $G_{0,a} = \{x \in R^n : u_0(x) < a\}$*,* $G_{1,a} = \{x \in R^n : u_0(x) > a\}$*. Тогда*

$$\int_{G_{0,a}} |\nabla u_0(x)|^n dx = a \operatorname{Cap}(E_0, E_1)$$

и

$$\int_{G_{1,a}} |\nabla u_0(x)|^n dx = (1 - a) \operatorname{Cap}(E_0, E_1).$$

Отметим, что более общее утверждение приведено в ([13], с. 575, теорема 25) со ссылкой на препринт J. Ferrand.

Примечание. Современное изложение вопросов, связанных с общим понятием емкости множеств и конденсаторов, имеется в [14]. В частности, вопрос о существовании и свойствах экстремальной функции исследуется в ([14], с. 186) для конденсаторов, пластины которых имеют гладкую границу. Общий подход к изучению нелинейной емкости конденсаторов, развитый в [14], выдержан в направлении, заданном работами В.Г. Мазьи (напр., [15]), и нацелен на описание свойств функциональных пространств соболевского типа.

§ 3. Равномерная непрерывность конформного модуля

Непрерывность конформной емкости конденсаторов в довольно общей ситуации была установлена в теореме 6 работы ([1], с. 249). Воспользуемся частным случаем этой теоремы.

Теорема 3.1 ([1], с. 250, теорема 7). *Пусть $\alpha > 0$ и последовательность конденсаторов $\{\mathbf{E}_k = (E_{0k}, E_{1k})\}$ в пространстве $\overline{R^n}$ такова, что при каждом $k = 1, 2, \ldots$ компакты E_{0k} и E_{1k} являются α-равномерно совершенными множествами. Если при $k \to \infty$ имеется хаусдорфова сходимость $\operatorname{dist}_q(E_{0k}, E_0) \to 0$ и $\operatorname{dist}_q(E_{1k}, E_1) \to 0$ и при этом пара множеств $\mathbf{E} = (E_0, E_1)$ образует конденсатор, то*

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{Cap}(\mathbf{E}_k) = \operatorname{Cap}(\mathbf{E})$$

или, что то же самое,

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{Mod}(\mathbf{E}_k) = \operatorname{Mod}(\mathbf{E}).$$

Если, в частности, $E_{1k} = E_1$ при всех k, то получаем непрерывность конформного модуля конденсатора по первой пластине. В этом параграфе выясняется вопрос о том, будет ли эта непрерывность равномерной относительно выбора второй пластины из некоторого семейства компактных множеств, содержащего множества сколь угодно малого диаметра. Ответом на этот вопрос служит

Теорема 3.2. *Пусть в $\overline{R^n}$ задан непустой компакт K ненулевой емкости и пусть α-равномерно совершенные множества E, F таковы, что*

$$\min\{d_q(K, E \cup F), \operatorname{diam}_q(E), \operatorname{diam}_q(F)\} > d > 0, \quad \operatorname{dist}_q(E, F) < \delta.$$

Если $\delta < d/(2 + 4e^{\alpha})$, то

$$|\operatorname{Mod}(E, K) - \operatorname{Mod}(F, K)| \le \left(\frac{C(n, \alpha)}{\operatorname{Ln} \frac{d}{2\delta}}\right)^{\frac{1}{n-1}} = F(d/\delta) \tag{3}$$

с константой $C(n, \alpha)$, зависящей лишь от n и α.

Доказательство. Воспользовавшись мебиусовой инвариантностью класса α-равномерно совершенных множеств ([11], с. 517, 2.7(1)) и конформной емкости ([5], с. 85), можем применить подходящее мебиусово преобразование, сохраняющее хордовые расстояния, и считать без нарушения общности, что $\infty \in K$.

Компакт K не обязан быть равномерно совершенным множеством, поэтому для $j = 1, 2, \ldots$ построим такую последовательность его покрытий конечным набором замкнутых шаров $Q_{ji} = \{x \in \overline{R^n} : q(x, a_{ji}) \le r_j\}$ с хордовыми центрами $a_{ji} \in K$ и хордовыми радиусами $r_j < 1/j$, чтобы выполнялось неравенство $d_q(Q_{ji}, E \cup F) > d$ и чтобы компактные множества $T_j = \bigcup\limits_i Q_{ji}$ образовали монотонно убывающую по включению последовательность $T_1 \supset T_2 \supset \cdots$ Так как $K = \bigcap\limits_j T_j$, то, используя свойство непрерывности конформной емкости для монотонно убывающей последовательности конденсаторов ([16], с. 132, теорема 3.3), получаем равенства

$$\operatorname{Mod}(E, K) = \lim_{j\to\infty} \operatorname{Mod}(E, T_j), \quad \operatorname{Mod}(F, K) = \lim_{j\to\infty} \operatorname{Mod}(F, T_j).$$

Задав произвольно малое $\varepsilon > 0$, найдем такой номер j, чтобы для множества $T = T_j$ выполнялись неравенства

$$|\operatorname{Mod}(E, T) - \operatorname{Mod}(E, K)| < \varepsilon/3, \quad |\operatorname{Mod}(F, T) - \operatorname{Mod}(F, K)| < \varepsilon/3. \tag{4}$$

Пусть $\operatorname{Mod}(E, T) \ne \operatorname{Mod}(F, T)$ и пусть для определенности

$$\operatorname{Mod}(E, T) > \operatorname{Mod}(F, T), \quad \operatorname{Cap}(E, T) < \operatorname{Cap}(F, T). \tag{5}$$

Множество T (конечное объединение замкнутых шаров) является равномерно совершенным, и по теореме 2.2 существует экстремальная функция $u(x)$ для конденсатора (E,T), которая непрерывна в $\overline{R^n}$, монотонна вниз к множеству E и монотонна вверх к множеству T. Выберем точку $a \in F$ так, чтобы $u(a) = \max\{u(x) : x \in F\} = m_0$. Если $m_0 = 0$, то функция $u(x)$ является допустимой для конденсатора $(E \cup F, T)$, в силу чего выполняется неравенство $\operatorname{Cap}(E \cup F, T) \leq \int\limits_{R^n} |\nabla u(x)|^n dx = \operatorname{Cap}(E,T)$, из которого следует неравенство

$$\operatorname{Cap}(F,T) \leq \operatorname{Cap}(E \cup F, T) \leq \operatorname{Cap}(E,T),$$

противоречащее соотношению (5). Следовательно, $m_0 > 0$. Так как $u(x)$ монотонна вверх к множеству T, то найдется континуум γ такой, что $a \in \gamma$, $\gamma \cap T \neq \emptyset$ и $u(x) \geq m_0$ при всех $x \in \gamma$. Для $D_0 = \{x : u(x) < m_0\}$ рассмотрим функцию

$$v(x) = \begin{cases} u(x)/m_0 & \text{при } x \in D_0, \\ 1 & \text{при } x \in \overline{R^n} \setminus D_0, \end{cases}$$

являющуюся допустимой для конденсатора (E,γ), т. е.

$$\operatorname{Cap}(E,\gamma) \leq \int_{R^n} |\nabla v(x)|^n dx = (m_0)^{-n} \int_{D_0} |\nabla u(x)|^n dx. \tag{6}$$

Так как $\operatorname{dist}_q(F,E) < \delta$, то имеется точка $b \in E$, для которой $q(a,b) < \delta$. Рассмотрим шаровой слой $\Omega = \{x \in \overline{R^n} : \delta < q(x,b) < d/2\}$. Как континуум γ, так и α-равномерно совершенное множество E пересекаются с каждой из компонент дополнения к Ω, и это позволяет воспользоваться теоремой 2.3. Пусть мебиусово преобразование $\tau : \overline{R^n} \to \overline{R^n}$ сохраняет хордовые расстояния и переводит точку b в 0. Тогда $\tau(\Omega) = \{x \in R^n : r_0 < |x| < r_1\}$, где $r_0 = \delta/\sqrt{1-\delta^2}$ и $r_2 = (d/2)/\sqrt{1-(d/2)^2}$ ([5], с. 8, упражнение 1.25(1)). Для отношения радиусов этого шарового слоя с учетом неравенства $d/2 > \delta(1+2e^\alpha) > \delta$ получаем оценку

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{(d/2)}{\delta}\sqrt{\frac{1-\delta^2}{1-(d/2)^2}} > \frac{d}{2\delta} > 1 + 2e^\alpha.$$

Применив теорему 2.3 к конденсатору $(\tau(\gamma), \tau(E))$, приходим к оценке

$$\operatorname{Cap}(\gamma, E) = \operatorname{Cap}(\tau(\gamma), \tau(E)) \geq C \operatorname{Ln} \frac{r_1}{r_0} \geq C \operatorname{Ln} \frac{d}{2\delta},$$

которая в соединении с (6) дает соотношение $\int\limits_{D_0} |\nabla u(x)|^n dx \geq m_0^n C \operatorname{Ln} \frac{d}{2\delta}$. Так как по теореме 2.4 $\int\limits_{D_0} |\nabla u(x)|^n dx = m_0 \operatorname{Cap}(E,T)$, то

$$m_0^{n-1} \leq \frac{\operatorname{Cap}(E,T)}{C \operatorname{Ln}(d/(2\delta))}.$$

Переходя к конформному модулю по формуле (1), получаем оценку

$$m_0 \operatorname{Mod}(E,T) \leq \left(\frac{\omega_{n-1}}{C \operatorname{Ln}(d/(2\delta))}\right)^{\frac{1}{n-1}} = F(d/\delta). \tag{7}$$

Так как $F \subset \overline{D}_0$, то $\operatorname{Mod}(F,T) \geq \operatorname{Mod}(\overline{D}_0, T)$. Применив теорему 2.4 к $\{x : u(x) > m_0\}$, получаем равенство

$$\operatorname{Cap}(\overline{D}_0, T) = (1-m_0)^{-n} \int_{R^n \setminus \overline{D}_0} |\nabla u(x)|^n dx = (1-m_0)^{1-n} \operatorname{Cap}(E,T),$$

или, что то же самое, $\operatorname{Mod}(\overline{D}_0, T) = (1-m_0)\operatorname{Mod}(E,T)$. Следовательно, $\operatorname{Mod}(F,T) \geq (1-m_0)\operatorname{Mod}(E,T)$, что вместе с (7) и (5) дает оценку $|\operatorname{Mod}(E,T) - \operatorname{Mod}(F,T)| \leq F(d/\delta)$. Заметим, что в случае равенства $\operatorname{Mod}(E,T) = \operatorname{Mod}(F,T)$ эта же оценка остается тривиально верной.

Соединив полученную оценку с неравенствами (4), приходим к неравенству

$$|\operatorname{Mod}(E,K)-\operatorname{Mod}(F,K)|\le F(d/\delta)+2\varepsilon/3,$$

из которого в силу произвольности $\varepsilon>0$ вытекает требуемая оценка (3). $\square$

§ 4. Непрерывность приведенного модуля

Понятие приведенного модуля плоских областей, восходящее к Гречу и Тейхмюллеру [17], было распространено на пространственные области в работах [18]–[22]. Более тонкое понятие приведенного модуля в точке на границе области изучалось в [23]. Дальнейшее развитие теории, включая понятие приведенного модуля в системе точек, широко представлено в [24]–[26]. Общая теория приведенного модуля на плоскости достаточно полно изложена в [27] и [28].

Следующее определение приведенного модуля в терминах хордовой метрики позволит не выделять в качестве особого случая приведенный модуль в точке $\infty\in\overline{R^n}$.

Определение 4.1. Пусть T — непустое компактное множество в $\overline{R^n}$, не содержащее точку a. (*Хордовым*) *приведенным модулем* множества T в точке a называется величина

$$m_q(a,T)=\lim_{\delta\to 0}[\operatorname{Mod}(\overline{Q}(a,\delta),T)+\operatorname{Ln}(\delta)]. \tag{8}$$

Напомним, что если G — связная компонента множества $\overline{R^n}\setminus T$, содержащая точку a, то величина

$$m(a,G)=\begin{cases}\lim\limits_{r\to 0}[\operatorname{Mod}(\overline{B}(a,r),\partial G)+\operatorname{Ln}(r)], & \text{если } a\ne\infty;\\ \lim\limits_{R\to\infty}[\operatorname{Mod}(\overline{R^n}\setminus B(0,R),\partial G)-\operatorname{Ln}(R)], & \text{если } a=\infty,\end{cases} \tag{9}$$

является (евклидовым) приведенным модулем области G относительно точки a в смысле классического определения ([19], с. 1023) или в случае плоскости ([29], с. 3, 1.6). Связь между хордовой и евклидовой версиями приведенного модуля выражена формулой

$$m(a,G)=\begin{cases}m_q(a,\partial G)+\operatorname{Ln}(1+|a|^2) & \text{при } a\ne\infty,\\ m_q(a,\partial G) & \text{при } a=\infty.\end{cases} \tag{10}$$

Теорема 4.1. *Пусть $\alpha>0$ и последовательность $\{T_j\}$ компактных α-равномерно совершенных множеств в $\overline{R^n}$ сходится по Хаусдорфу к компактному множеству $T\ne\overline{R^n}$. Тогда в любой точке $a\in\overline{R^n}\setminus T$ имеет место сходимость приведенных модулей*

$$\lim_{j\to\infty}m_q(a,T_j)=m_q(a,T).$$

Доказательство. Рассмотрим случай одноточечного множества $T=\{b\}$. Для произвольно заданного $0<\delta<q(a,b)/2$ найдется номер $J(\delta)$, начиная с которого выполняется включение $T_j\subset Q(b,\delta)$. В силу монотонности приведенного модуля, для всех достаточно больших j справедлива оценка $m_q(a,T_j)\ge m_q(a,\overline{Q}(b,\delta))$. Воспользовавшись хордовой изометрией $\mu:\overline{R^n}\to\overline{R^n}$, не изменяющей хордового приведенного модуля, без нарушения общности можно считать, что $b=\infty$, и тогда $\partial Q(b,\delta)=\{x\in R^n:|x|=R=\sqrt{1-\delta^2}/\delta\}$, $|\mu(a)|=\sqrt{1-q(a,b)^2}/q(a,b)$ ([5], с. 8, 1.25). Формула (10) и известное выражение для евклидова приведенного модуля шара в его внутренней точке приводят к равенству

$$m_q(a,\overline{Q}(b,\delta))=m(\mu(a),\{|x|<R\})-\operatorname{Ln}(1+|\mu(a)|^2)=\operatorname{Ln}\frac{R^2-|\mu(a)|^2}{R(1+|\mu(a)|^2)},$$

из которого видно, что $m_q(a,\overline{Q}(b,\delta))\to+\infty$ при $\delta\to 0$. Следовательно, для любого $M>0$ найдется номер J такой, что для всех $j>J$ выполняется оценка $m_q(a,T_j)\ge M$. Это и означает, что $\lim\limits_{j\to\infty}m_q(a,T_j)=+\infty=m_q(a,T)$.

Пусть теперь множество T не является одноточечным, т. е. $\mathrm{diam}_q(T) > 0$. Класс α-равномерно совершенных компактов замкнут в метрике Хаусдорфа, что следует из определения 2.2 и теоремы Ф. Геринга о непрерывности конформной емкости конденсаторов со связными пластинами (или из более общей теоремы 3.1). Поэтому T является α-равномерно совершенным множеством. Положим $2d = \min\{\mathrm{diam}_q(T), d_q(a,T)\}$. Тогда найдется номер J такой, что при всех $j > J$ выполняются оценки

$$\mathrm{diam}_q(T_j) > d, \quad d_q(\overline{Q}(a, d/3), T_j) > d, \quad \mathrm{dist}_q(T_j, T) < \frac{d}{2 + 4e^{\alpha}}.$$

Следовательно, для каждого $j > J$ при любом $r \in (0, d/3)$ к множествам $K = \overline{Q}(a,r)$, T и T_j применима теорема 3.2, в силу которой

$$\big|[\mathrm{Mod}(T_j, \overline{Q}(a,r)) + \mathrm{Ln}(r)] - [\mathrm{Mod}(T, \overline{Q}(a,r)) + \mathrm{Ln}(r)]\big| \le F\Big(\frac{d}{\mathrm{dist}_q(T_j, T)}\Big),$$

где $F(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Переходя при каждом фиксированном $j>J$ к пределу при $r \to 0$, получаем неравенство $|m_q(a,T_j) - m_q(a,T)| < F(\frac{d}{\mathrm{dist}_q(T_j,T)})$. Поскольку правая часть в этом неравенстве стремится к нулю при $j \to \infty$, то $\limsup\limits_{j\to\infty} |m_q(a,T_j) - m_q(a,T)| = 0$. Это и означает, что $\lim\limits_{j\to\infty} m_q(a,T_j) = m_q(a,T)$. $\square$

Теорема 4.2. *Пусть T — равномерно совершенное неодноточечное компактное собственное подмножество пространства $\overline{R^n}$. Тогда функция $m_q(x,T)$ непрерывна на множестве $\overline{R^n}\setminus T$.*

Доказательство. Пусть T является α-равномерно совершенным с параметром $\alpha > 0$. Возьмем произвольную точку $a \in \overline{R^n} \setminus T$, обозначим через G ту компоненту связности множества $\overline{R^n} \setminus T$, которая содержит a, и рассмотрим произвольную последовательность точек $x_j \in G$, сходящуюся к a при $j \to \infty$. Построим последовательность хордовых изометрий $\mu_j : \overline{R^n} \to \overline{R^n}$ такую, что $\mu_j(a) = x_j$ и $\{\mu_j\}$ сходится на $\overline{R^n}$ к тождественному отображению Id равномерно в хордовой метрике. Тогда для каждого j имеем равенство $m_q(x_j,T) = m_q(a, \mu_j^{-1}(T))$. Хордовая изометрия не нарушает свойства α-равномерной совершенности множеств, а из равномерной сходимости $\mu_j^{-1} \to \mathrm{Id}$ на $\overline{R^n}$ следует сходимость $\mathrm{dist}_q(\mu_j^{-1}(T), T) \to 0$ при $j \to 0$. Поэтому применима теорема 4.1, в силу которой $m_q(x_j,T) = m_q(a, \mu_j^{-1}(T)) \to m_q(a,T)$ при $j \to \infty$. Следовательно, функция $m_q(x,T)$ непрерывна в точке a. $\square$

Замечание 1. В случае плоской области исследование свойств приведенного модуля как функции точки значительно продвинуто в работах Л.А. Аксентьева [30], [31].

Замечание 2. В работах [18]–[20] вводится определение обобщенного приведенного модуля $m(z_0, \Gamma, G)$ в точке $z_0 \in G$ многосвязной области G относительно выделенной связной компоненты $\Gamma \subset \partial G$. Так как в общем случае (при $\Gamma \ne \partial G$) эта величина выражается через иную емкость конденсатора, то способ доказательства теоремы 4.1 не удается непосредственно применить к исследованию непрерывности обобщенного приведенного модуля $m(z_0, \Gamma, G)$ по переменной Γ относительно хаусдорфовой метрики. Здесь, видимо, требуются более тонкие методы.

§ 5. Непрерывность трансфинитного диаметра

Напомним классическое, восходящее к М. Фекете определение трансфинитного диаметра плоского множества.

Определение 5.1 ([32], с. 286). Пусть T — непустое компактное подмножество плоскости R^2. Рассмотрев для любого набора точек $Z = (z_1, \dots, z_N) \in T^N$ величину $V(Z) = \prod\limits_{1\le i<j\le N} |z_i - z_j|$ и положив $V_N = \max\limits_{Z\in T^N} V(Z)$, $\Delta_N = V_N^{\frac{2}{N(N-1)}}$, получаем монотонно убывающую последовательность $\{\Delta_N\}$, предел которой $\tau(T) = \lim\limits_{N\to\infty} \Delta_N$ называется трансфинитным диаметром множества T.

При этом $\tau(T)$ совпадает с логарифмической емкостью множества T ([32], с. 302, теорема 2), а величину $\gamma(T) = -\operatorname{Ln}\tau(T)$ называют постоянной Робэна множества T (в случае $\tau(T) = 0$ полагают $\gamma(T) = +\infty$).

Используя определение (9) приведенного модуля в точке ∞ и равенство (8), получаем для компактного множества $T \subset R^2$ равенство

$$m_q(\infty, T) = m(\infty, G) = \lim_{R\to\infty}[\operatorname{Mod}(\partial B(0,R), T) - \operatorname{Ln}(R)], \tag{11}$$

где G — связная компонента множества $\overline{R^2}\setminus T$, содержащая ∞. Известно ([33], с. 324, теорема 4), что правая часть в (11) есть в точности $\gamma(T)$. Следовательно, для трансфинитного диаметра верно равенство

$$\tau(T) = \exp(-m_q(\infty, T)). \tag{12}$$

Теорема 5.1. *Пусть $\alpha > 0$ и $\{T_j\}$ — последовательность α-равномерно совершенных множеств в R^2, сходящаяся в метрике Хаусдорфа к компактному множеству T. Тогда*

$$\lim_{j\to\infty}\tau(T_j) = \tau(T). \tag{13}$$

Доказательство. Теорема 4.1 дает сходимость приведенных модулей $m_q(\infty, T_j) \to m_q(\infty, T)$, из которой в силу (12) следует сходимость (13). $\square$

Замечание 3. В литературе отмечено лишь свойство монотонной непрерывности трансфинитного диаметра и логарифмической емкости, т. е. выполнение равенства (13) при условии $T_{n+1} \subset T_n$ (напр., [34], с. 57, теорема III.9).

§ Литература

1. Асеев В.В. *Непрерывность конформной емкости для конденсаторов с равномерно совершенными пластинами* // Сиб. матем. журн. – 1999. – Т. 40. – № 2. – С. 243–253.
2. Pommerenke Ch. *Uniformly perfect sets and the Poincare metric* // Arch. Math. – 1979. – V. 32. – P. 192–199.
3. Асеев В.В., Лазарева О.А. *О непрерывности приведенного модуля и трансфинитного диаметра* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 23 / Казанск. матем. об-во. “Алгебра и анализ–2004” // Материалы международ. науч. конф. – Казань: Изд-во Казанск. матем. о-ва, 2004. – С. 80–81.
4. Сычев А.В. *Модули и пространственные квазиконформные отображения.* – Новосибирск: Наука, 1983 – 152 с.
5. Vuorinen M. *Conformal geometry and quasiregular mappings* // Lect. Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin e.o., 1988. – V. 1319. – P. I-XX, 1–209.
6. Бердон А. *Геометрия дискретных групп.* – М.: Наука, 1986. – 304 с.
7. Куратовский К. *Топология.* Т. 1. – М.: Мир, 1966. – 594 с.
8. Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной.* – М.: Наука, 1974. – 480 с.
9. Асеев В.В., Сычев А.В. *О множествах, устранимых для пространственных квазиконформных отображений* // Сиб. матем. журн. – 1974. – Т. 15. – № 6. – С. 1213–1227.
10. Yang Sh. *Monotone functions and extremal functions for condensers in $\overline{R^n}$* // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A1. – 1991. – V. 16. – P. 95–112.
11. Jarvi P., Vuorinen M. *Uniformly perfect sets and quasiregular mappings* // J. London Math. Soc. – 1996. – V. 54. – № 174. – Part 3. – P. 515–529.
12. Асеев В.В. *Поправка к статье “Деформация пластин малых конденсаторов и проблема П.П. Белинского”* // Сиб. матем. журн. – 2003. – Т. 44. – № 1. – С. 232–235.
13. Caraman P. *Relations between p-capacity and p-module* (II) // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. – 1994. – V. 39. – № 6. – P. 555–577.

14. Гольдштейн В.М., Решетняк Ю.Г. *Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения.* – М.: Наука, 1983. – 284 с.
15. Мазья В.Г. *О непрерывности в граничной точке решений квазилинейных эллиптических уравнений* // Вестн. ЛГУ – 1970. – № 13. – Вып. 3. – С. 42–55.
16. Hesse J. *A p-extremal length and p-capacity equality* // Ark. Mat. – 1975. – V. 13. – № 1. – P. 131–144.
17. Teichmüller O. *Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildungen* // Deutsche Math. – 1938. – Bd. 3. – S. 621–678.
18. Митюк И.П. *Приведений модуль у випадку простору* // ДАН УРСР. – 1964. – Т. 5. – С. 563–566.
19. Митюк И.П. *Про квазиконформні відображення в просторі* // Доповіді АН УРСР. – 1964. – № 8. – С. 1022–1025.
20. Митюк И.П. *Обобщенный приведенный модуль и некоторые его свойства* // Изв. вузов. Математика. – 1964. – № 2. – С. 110–119.
21. Левицкий Б.Е., Митюк И.П. *"Узкие" теоремы о пространственных модулях* // ДАН СССР. – 1979. – Т. 248. – № 4. – С. 780–783.
22. Левицкий Б.Е. *Приведенный p-модуль и внутренний p-гармонический радиус* // ДАН СССР. – 1991. – Т. 316. – № 4. – С. 812–815.
23. Миклюков В.М. *О некоторых граничных задачах теории конформных отображений* // Сиб. матем. журн. – 1977. – Т. 18. – № 5. – С. 1111–1124.
24. Дубинин В.Н. *Приведенные модули открытых множеств в теории аналитических функций* // Докл. РАН. – 1998. – Т. 363. – № 6. – С. 731–734.
25. Дубинин В.Н., Эйрих Н.В. *Обобщенный приведенный модуль* // Дальневост. матем. журн. – 2002. – Т. 3. – № 2. – С. 147–162.
26. Ковалев Л.В. *Монотонность обобщенного приведенного модуля* // Зап. науч. семин. ПОМИ. – 2001. – Т. 276. – С. 219–236.
27. Дубинин В.Н. *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного* // УМН. – 1994. – Т. 49. – Вып. 1. – С. 3–76.
28. Дубинин В.Н. *Емкости конденсаторов в геометрической теории функций.* – Владивосток: Изд-во Дальневосточн. ун-та, 2003. – 116 с.
29. Kunzi H.P. *Quasikonforme Abbildungen.* – Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1960. – 182 p.
30. Аксентьев Л.А. *Локальное строение поверхности внутреннего конформного радиуса для плоской области* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 4. – С. 3–12.
31. Аксентьев Л.А. *Выпуклость поверхности конформного радиуса и оценки коэффициентов отображающей функции* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 4. – С. 8–15.
32. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1966. – 628 с.
33. Bagby T. *The modulus of plane condenser* // J. Math. Mech. – 1967. – V. 17. – № 4. – P. 315–329.
34. Tsuji M. *Potential theory in modern function theory.* – Maruzen Co. Ltd., 1959. – 590 p.

Институт математики
Сибирского отделения
Российской академии наук

Новосибирский государственный
университет

Поступила
04.01.2005