ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 4 (539)

УДК 514.76

А.Я. СУЛТАНОВ

О ВЕЩЕСТВЕННЫХ РАЗМЕРНОСТЯХ АЛГЕБР ЛИ ГОЛОМОРФНЫХ АФФИННЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Введение

Пусть $\mathbb{A}$ — коммутативная ассоциативная алгебра над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, имеющая конечный ранг и обладающая единицей ([1], с. 7). На $\mathbb{A}$-гладком n-мерном многообразии M_n рассмотрим голоморфные линейные связности ∇. Голоморфное векторное поле X на M_n называется аффинным, если производная Ли вдоль X линейной связности ∇ равна нулю. Совокупность $g(M_n)$ аффинных векторных полей допускает естественные структуры алгебр Ли над $\mathbb{A}$ и $\mathbb{R}$. Обозначим эти алгебры через $(g(M_n))^{\mathbb{A}}$ и $(g(M_n))^{\mathbb{R}}$ соответственно.

Глубокие результаты при исследовании размерностей алгебр Ли $g(M_n)$ в случае $\mathbb{A}=\mathbb{R}$ были получены в [2].

В случае, когда $\mathbb{A}$ не сводится к алгебре $\mathbb{R}$, вопросы, связанные с размерностями алгебр $g(M_n)$, оставались открытыми.

В предлагаемой работе получены следующие результаты.

1. Если ранг алгебры $\mathbb{A}$ равен m, размерность над $\mathbb{A}$ многообразия M_n равна n, то вещественная размерность алгебры Ли $(g(M_n))^{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$ не больше, чем $m(n^2+n)$.

2. Если $\dim_{\mathbb{R}}(g(M_n))^{\mathbb{R}} = m(n^2+n)$, то тензорные поля кручения T и кривизны R связности ∇ равны нулю.

3. Если тензорное поле W Вейля связности ∇ отлично от нуля, то

$$\dim_{\mathbb{R}}(g(M_n))^{\mathbb{R}} \le m(n^2+n) - r_0(3n-5),$$

где r_0 — сингулярный ранг алгебры $\mathbb{A}$.

1. Голоморфные линейные связности

Пусть $\mathbb{A}$ — коммутативная ассоциативная алгебра с единицей ранга m над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Обозначим через $\mathbb{A}^*$ векторное пространство линейных форм, заданных на $\mathbb{A}$ и принимающих значения в $\mathbb{R}$. На $\mathbb{A}^*$ определим внешнюю операцию $\mu : \mathbb{A}^* \times \mathbb{A} \to \mathbb{A}^*$ умножения элементов $\mathbb{A}^*$ на элементы алгебры $\mathbb{A}$ следующим образом: $\mu(a^*, b)(c) = a^*(bc)$ для любых $b, c \in \mathbb{A}$. Эта операция вместе с операциями сложения и умножения линейных форм на действительные числа превращает пространство $\mathbb{A}^*$ в $\mathbb{A}$-модуль, который используется при построении операции вещественной реализации тензорной алгебры над $\mathbb{A}$, а также линейных связностей, заданных на $\mathbb{A}$-гладких многообразиях.

В дальнейшем будем использовать обозначение $\mu(a^*, b) = a^*b$.

Пусть M_n — гладкое многообразие над $\mathbb{A}$ размерности n класса дифференцируемости C^ω. Будем предполагать, что M_n эквивалентно открытому координатному параллелепипеду в $\mathbb{A}^n$ по отношению к некоторому базису алгебры $\mathbb{A}$. Обозначим через $\mathbb{B}(M_n)$ алгебру голоморфных по Шефферсу функций над алгеброй $\mathbb{A}$ ([1], с. 85).

Определение 1.1. *Векторным полем* на M_n называется всякое дифференцирование алгебры $\mathbb{B}(M_n)$.

Векторное поле X называется голоморфным, если для любой функции $\mathcal{F} \in \mathbb{B}(M_n)$ функция $X\mathcal{F}$ является голоморфной.

Множество $\Im_0^1(M_n)$ всевозможных голоморфных векторных полей, заданных на M_n, допускает структуру $\mathbb{B}(M_n)$-модуля. В каждой точке $p \in M_n$ совокупность векторов X_p, где $X \in \Im_0^1(M_n)$, относительно естественных операций сложения и умножения на элементы алгебры $\mathbb{A}$ образует $\mathbb{A}$-модуль, называемый касательным модулем к M_n в точке p. Обозначим этот модуль через $\mathbb{T}_p(M_n)$. Касательный модуль $\mathbb{T}_p(M_n)$ обладает конечным базисом, состоящим из n касательных векторов. Если (U, x^i) — карта гладкой структуры на M_n и $p \in U$, то в качестве базисных векторов в $\mathbb{T}_p(M_n)$ можно взять операторы частных дифференцирований $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p$.

Определение 1.2. *Линейной связностью* на M_n называется отображение

$$\nabla : \Im_0^1(M_n) \times \Im_0^1(M_n) \longrightarrow \Im_0^1(M_n),$$

удовлетворяющее условиям

(1) $\nabla_{\mathcal{F}X+\mathcal{G}Y} Z = \mathcal{F}\nabla_X Z + \mathcal{G}\nabla_Y Z$;

(2) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

(3) $\nabla_X \mathcal{F}Y = \mathcal{F}\nabla_X Y + (X\mathcal{F})Y$

для любых $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathbb{B}(M_n)$, $X, Y, Z \in \Im_0^1(M_n)$.

Связность ∇ называется голоморфной, если векторное поле $\nabla_X Y$ голоморфно для любых голоморфных векторных полей X и Y.

Отображения

$T : \Im_0^1(M_n) \times \Im_0^1(M_n) \longrightarrow \Im_0^1(M_n)$,

$R : \Im_0^1(M_n) \times \Im_0^1(M_n) \times \Im_0^1(M_n) \longrightarrow \Im_0^1(M_n)$,

определенные условиями

$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$,

$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$,

являются $\mathbb{B}(M_n)$-линейными по каждому аргументу и называются соответственно тензорными полями кручения и кривизны связности ∇.

Всякая линейная связность ∇ на M_n порождает линейную связность $\widehat{\nabla}$, определенную условием $\widehat{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X,Y]$. Связности ∇ и $\widehat{\nabla}$ порождают семейство линейных связностей, зависящих от параметра $a \in \mathbb{A}$. Эти связности определяются условием

$$\overset{a}{\nabla}_X Y = a\nabla_X Y + (\delta - a)\widehat{\nabla}_Y X,$$

где δ — главная единица алгебры $\mathbb{A}$.

Обозначим через $\overset{\circ}{\nabla}$ линейную связность без кручения, соответствующую $a = \frac{1}{2}\delta$.

Линейная связность ∇ порождает операцию ковариантного дифференцирования тензорной алгебры $\Im(M_n)$.

Определение 1.3. Отображение $\nabla_X : \Im(M_n) \longrightarrow \Im(M_n)$ называется *ковариантной производной вдоль векторного поля* X, если

(1) $\nabla_X f = Xf$,

(2) $\nabla_X(Y) = \nabla_X Y$,

(3) $\nabla_X K(\omega_1, \ldots, \omega_r, Y_1, \ldots, Y_s) = \nabla_X(K(\omega_1, \ldots, \omega_r, Y_1, \ldots, Y_s)) -$

$$- \sum_{i=1}^{r} K(\omega_1, \ldots, \nabla_X \omega_i, \ldots, \omega_r, Y_1, \ldots, Y_s) - \sum_{j=1}^{s} K(\omega_1, \ldots, \omega_r, Y_1, \ldots, \nabla_X Y_j, \ldots, Y_s).$$

Операция ковариантного дифференцирования позволяет ввести понятие ковариантного дифференциала.

Определение 1.4. *Ковариантным дифференциалом* называется отображение $\nabla : \Im(M_n) \longrightarrow \Im(M_n)$, удовлетворяющее условиям

(1) если K — тензорное поле типа (r,s), то ∇K — тензорное поле типа $(r,s+1)$,

(2) $\nabla K(\omega_1,\ldots,\omega_r,Y_1,\ldots,Y_s,X) = \nabla_X K(\omega_1,\ldots,\omega_r,Y_1,\ldots,Y_s)$.

Если в определении 1.3 символ ∇_X заменить на $\mathcal{L}_X$ и положить по определению $\mathcal{L}_X(Y) = [X,Y]$, то получится определение производной Ли вдоль векторного поля X в тензорной алгебре $\Im(M_n)$.Операцию дифференцирования Ли можно продолжить на множество линейных связностей, заданных на M_n.

Определение 1.5. *Производной Ли вдоль* X линейной связности ∇ называется тензорное поле $\mathcal{L}_X\nabla$ типа $(1,2)$, определенное условием

$$\mathcal{L}_X\nabla(Y,Z) = \mathcal{L}_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\mathcal{L}_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

для всех $Y,Z \in \Im^1_0(M_n)$.

Легко убедиться, что для любых векторных полей Y,Z на M_n выполняется равенство

$$\mathcal{L}_X\widehat{\nabla}(Y,Z) = \mathcal{L}_X\nabla(Z,Y).$$

Рассмотрим дифференцирования $\mathcal{L}_X$ и ∇_Y тензорной алгебры $\Im(M_n)$. Тогда их коммутатор $[\mathcal{L}_X,\nabla_Y]$ также будет дифференцированием. Отметим

Предложение 1.1. *Для любого тензорного поля* K *типа* (r,s) *на* M_n *имеет место тождество*

$$[\mathcal{L}_X,\nabla_Y]K = \nabla_{[X,Y]}K + \sum_{i=1}^{r} K \overset{i}{*} (\mathcal{L}_X\nabla(Y,\ \ )) - \sum_{j=1}^{s} K \overset{j}{\circ} (\mathcal{L}_X\nabla(Y,\ \ )),$$

где $\overset{i}{*}$, $\overset{j}{\circ}$ *означают операции свертывания, определенные условиями*

$$K \overset{i}{*} (\mathcal{L}_X\nabla(Y,\ \ ))(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_r,Z_1,Z_2,\ldots,Z_s) = K(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_i\circ(\mathcal{L}_X\nabla(Y,)),\ldots,\omega_r,Z_1,Z_2,\ldots,Z_s),$$

$$K \overset{j}{\circ} (\mathcal{L}_X\nabla(Y,\ \ ))(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_r,Z_1,Z_2,\ldots,Z_s) = K(\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_r,Z_1,Z_2,\ldots,\mathcal{L}_X\nabla(Y,Z_j),\ldots,Z_s).$$

Приведем еще одно тождество, связывающее производную Ли и ковариантный дифференциал, порожденный линейной связностью ∇.

Предложение 1.2. *Для любого тензорного поля* K *типа* (r,s) *на* M_n *имеет место тождество*

$$(\mathcal{L}_X(\nabla K) - \nabla(\mathcal{L}_X K))(\omega_1,\ldots,\omega_r,Z_1,\ldots,Z_s,Y) = ([\mathcal{L}_X,\nabla_Y]K - \nabla_{[X,Y]}K)(\omega_1,\ldots,\omega_r,Z_1,\ldots,Z_s).$$

Доказательства этих предложений можно провести прямыми вычислениями.

Определение 1.6. Векторное поле X называется аффинным относительно ∇, если

$$\mathcal{L}_X\nabla = 0.$$

Из определения аффинных векторных полей и определения производной Ли линейной связности имеем

Предложение 1.3. *Следующие условия эквивалентны*:

(1) X *— аффинное векторное поле относительно* ∇,

(2) X *— аффинное векторное поле относительно* $\widehat{\nabla}$,

(3) X *— аффинное векторное поле относительно* $\overset{\circ}{\nabla}$ *и* $\mathcal{L}_X T = 0$,

где T *— тензорное поле кручения связности* ∇.

Имеет место также

Предложение 1.4. *Если X — аффинное векторное поле относительно линейной связности ∇ и T, R — ее тензорные поля кручения и кривизны соответственно, то $\mathcal{L}_X \nabla^m T = 0$, $\mathcal{L}_X \nabla^m R = 0$, где $\nabla^m T$, $\nabla^m R$ — ковариантные дифференциалы порядка m; m — неотрицательные целые числа.*

По определению $\nabla^0 T = T$ и $\nabla^0 R = R$. Это предложение является следствием предложений 1.1 и 1.2.

Заметим, что ковариантное дифференцирование в предложении 1.4 можно провести относительно любой связности $\overset{a}{\nabla}$.

2. Вещественная реализация тензорных полей и линейных связностей

Наряду с гладкой структурой над алгеброй $\mathbb{A}$ на M_n можно построить гладкую структуру класса C^ω над алгеброй $\mathbb{R}$, порожденную $\mathbb{A}$-гладкой структурой. Вещественная размерность полученного многообразия будет равна mn. Это многообразие обозначим M^R_{mn} ([1], c. 104). Голоморфная функция $\mathcal{F} \in \mathbb{B}(M_n)$ и линейная форма $a^* \in \mathbb{A}^*$ позволяют построить функцию $\mathcal{F}_{(a^*)} = a^* \circ \mathcal{F}$, которая принадлежит алгебре $C^\omega(M^R_{mn})$ гладких функций на M^R_{mn}. Пусть δ — главная единица алгебры $\mathbb{A}$, $X \in \Im^1_0(M_n)$ — произвольное голоморфное векторное поле на M_n. На M^R_{mn} существует единственное векторное поле $X^{(\delta)}$, удовлетворяющее условию

$$X^{(\delta)} \mathcal{F}_{(a^*)} = (X\mathcal{F})_{(a^*)}.$$

Определение 2.1. Векторное поле $X^{(\delta)}$ называется (δ)-*вещественной реализацией векторного поля X.*

Если $a \in \mathbb{A}$, то $(aX)^{(\delta)}$ обозначим через $X^{(a)}$. Векторное поле $X^{(a)}$ называется (a)-реализацией векторного поля X. Заметим, что $X^{(a)}$ — единственное векторное поле, удовлетворяющее условию

$$X^{(a)} \mathcal{F}_{(b^*)} = (X\mathcal{F})_{(b^* a)}$$

для любых $\mathcal{F} \in \mathbb{B}(M_n)$, $a^* \in A$.

Предложение 2.1. *Отображение $(\delta) : \Im^1_0(M_n) \to \Im^1_0(M^R_{mn})$, определенное условием $X \to X^{(\delta)}$, является инъективным гомоморфизмом над полем $\mathbb{R}$.*

Доказательство. $\mathbb{R}$-линейность отображения (δ) следует из определения. Пусть $X^{(\delta)} = 0$ и p — произвольная точка многообразия M_n. Если $p \in U$ и (U, x^i) — карта $\mathbb{A}$-гладкой структуры, то (U, x^i_α) (где $x^i_\alpha = (x^i)_{(\varepsilon_\alpha)}$, а ε_α — векторы дуального базиса к базису (ε^α) алгебры $\mathbb{A}$) является картой вещественной гладкой структуры на M_n. Из равенства $X^{(\delta)} = 0$ следует

$$X^{(\delta)}_p x^i_\alpha = (Xx^i)_{(\varepsilon_\alpha)}(p) = (X^i)_{(\varepsilon_\alpha)}(p) = X^i_\alpha(p) = 0.$$

Таким образом, $X_p = X^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p = 0$ в каждой точке $p \in M_n$. $\square$

Построим вещественные реализации тензорных полей K типа $(1, s)$, заданных на M_n.

Пусть $a \in \mathbb{A}$, тогда на $M^{\mathbb{R}}_{mn}$ существует единственное тензорное поле $K^{(a)}$, удовлетворяющее условию

$$K^{(a)}(X_1^{(b_1)}, X_2^{(b_2)}, \ldots, X_s^{(b_s)}) = (K(X_1, X_2, \ldots, X_s))^{(ab_1 \ldots b_s)}$$

для любых $X_1, X_2, \ldots, X_s \in \Im^1_0(M_n)$, $b_1, b_2, \ldots, b_s \in \mathbb{A}$.

Определение 2.2. Тензорное поле $K^{(a)}$ называется (a)-*реализацией тензорного поля K.*

Если $a = \delta$, то $K^{(\delta)}$ называется также естественной вещественной реализацией тензорного поля K.

Пусть I — единичный аффинор на M_n, тогда для каждого $a \in \mathbb{A}$ имеем (a)-реализацию $I^{(a)}$ этого аффинора. Реализация $I^{(a)}$ называется структурным аффинором на $M^{\mathbb{R}}_{mn}$, соответствующим элементу a алгебры A. Легко заметить, что $K^{(a)} = I^{(a)} \circ K^{(\delta)}$.

Каждая линейная связность ∇, заданная на M_n, допускает единственную вещественную релизацию на $M^{\mathbb{R}}_{mn}$. Действительно, если ∇ — линейная связность на M_n, то на $M^{\mathbb{R}}_{mn}$ существует единственная линейная связность $\nabla^{\mathbb{R}}$ такая, что

$$\nabla^{\mathbb{R}}_{X^{(a)}} Y^{(b)} = (\nabla_X Y)^{(ab)}.$$

Определение 2.3. Линейная связность $\nabla^{\mathbb{R}}$ называется *вещественной реализацией связности ∇.*

Тензорные поля $T^{\mathbb{R}}$, $R^{\mathbb{R}}$ кручения и кривизны являются (δ)-реализациями тензорных полей T и R соответственно.

Предложение 2.2. *Если X — аффинное векторное поле относительно связности ∇, то для любого элемента $a \in \mathbb{A}$ векторное поле $X^{(a)}$ — аффинное векторное поле для $\nabla^{\mathbb{R}}$.*

Доказательство. Для произвольных $Y, Z \in \Im^1_0(M_n)$ и $b, c \in \mathbb{A}$ имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X^{(a)}} \nabla^{\mathbb{R}}(Y^{(b)}, Z^{(c)}) &= \mathcal{L}_{X^{(a)}} \nabla^{\mathbb{R}}_{Y^{(b)}} Z^{(c)} - \nabla^{\mathbb{R}}_{Y^{(b)}} \mathcal{L}_{X^{(a)}} Z^{(c)} - \nabla^{\mathbb{R}}_{[X^{(a)}, Y^{(b)}]} Z^{(c)} = \\ &= \mathcal{L}_{X^{(a)}} (\nabla_Y Z)^{(bc)} - \nabla^{\mathbb{R}}_{Y^{(b)}} (\mathcal{L}_X Z)^{(ac)} - \nabla^{\mathbb{R}}_{[X,Y]^{(ab)}} Z^{(c)} = \\ &= (\mathcal{L}_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \mathcal{L}_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z)^{(abc)} = (\mathcal{L}_X \nabla(Y, Z))^{(abc)}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что если $\mathcal{L}_X \nabla = 0$, то $\mathcal{L}_{X^{(a)}} \nabla^{\mathbb{R}} = 0$ для любого элемента a алгебры $\mathbb{A}$. □

Обозначим через $g(M_n)$ множество всех голоморфных аффинных векторных полей относительно связности ∇. Из определения производной Ли линейной связности следует, что если $X, Y \in g(M_n)$ и $a, b \in \mathbb{A}$, то $aX + bY$, $[X, Y]$ являются голоморфными аффинными векторными полями относительно ∇. Следовательно, имеет место

Предложение 2.3. *$\mathbb{A}$-модуль $g(M_n)$ голоморфных аффинных векторных полей относительно связности ∇, снабженный операцией коммутирования, является алгеброй Ли над $\mathbb{A}$.*

Алгебра Ли $g(M_n)$ обладает естественной структурой векторного пространства над полем действительных чисел, поэтому $(g(M_n), [\ ,\ ])$ является алгеброй Ли голоморфных аффинных векторных полей и над $\mathbb{R}$. Обозначим эту алгебру символом $(g(M_n))^{\mathbb{R}}$, а символом $g(M^{\mathbb{R}}_{mn})$ — алгебру Ли аффинных векторных полей относительно $\nabla^{\mathbb{R}}$.

Из предложений 2.1 и 2.2 следует

Предложение 2.4. *Отображение $h : (g(M_n))^{\mathbb{R}} \longrightarrow g(M^{\mathbb{R}}_{mn})$, определенное условием $h(X) = X^{(\delta)}$, является инъективным гомоморфизмом.*

Если обозначить через $h((g(M_n))^{\mathbb{R}})$ образ вещественной алгебры Ли голоморфных аффинных векторных полей относительно ∇, то из предложения 2.4 следует

$$\dim_{\mathbb{R}} (g(M_n))^{\mathbb{R}} = \dim_{\mathbb{R}} h((g(M_n))^{\mathbb{R}}). \tag{2.1}$$

Поскольку алгебра Ли $g(M^{\mathbb{R}}_{mn})$ имеет размерность, не превышающую $(mn)^2 + mn$, то алгебра $(g(M_n))^{\mathbb{R}}$ также конечномерна над $\mathbb{R}$.

3. Оценка размерностей над $\mathbb{R}$ алгебр Ли голоморфных аффинных векторных полей

Рассмотрим расслоение $(L(M^{\mathbb{R}}_{mn}), \pi, M^{\mathbb{R}}_{mn})$ линейных реперов над многообразием $M^{\mathbb{R}}_{mn}$. Известно, что соответствие $Z \longrightarrow Z^{(0)}_{p'}$, где $Z \in g(M^{\mathbb{R}}_{mn})$, $Z^{(0)}_{p'}$ — значение в точке $p' \in L(M^{\mathbb{R}}_{mn})$ полного лифта векторного поля Z в расслоение $L(M^{\mathbb{R}}_{mn})$, является инъективным ([3], с. 219).

Пусть $p \in M^{\mathbb{R}}_{mn}$ — естественная проекция точки $p' \in L(M^{\mathbb{R}}_{mn})$, т. е. $p = \pi(p')$, (U, x^i_α) — карта на $M^{\mathbb{R}}_{mn}$ такая, что $p \in U$; индекс i принимает значения от 1 до n, а α — от 1 до m. На $L(M^{\mathbb{R}}_{mn})$ построим карту $(\pi^{-1}(U), x^i_\alpha, x^{i\beta}_{\alpha j})$. Для любой точки $p' \in \pi^{-1}(U)$ матрица $\|x^{i\beta}_{\alpha j}(p')\|$ является элементом полной линейной группы $GL(mn, \mathbb{R})$.

Для произвольного голоморфного аффинного векторного поля $X \in (g(M_n))^{\mathbb{R}}$ имеем

$$X^{(\delta)} = (X^i \partial_i)^{(\delta)} = (X^i)_{(\varepsilon_\alpha)} \partial_i^{(\varepsilon^\alpha)} = X^i_\alpha \partial^\alpha_i.$$

Здесь ε^α, ε_β — элементы базиса алгебры $\mathbb{A}$ и дуального ему базиса в пространстве $\mathbb{A}^*$, $X^i = X^i_\alpha \varepsilon^\alpha$ — координаты векторного поля X в карте $(U, x^i = x^i_\alpha \varepsilon^\alpha)$. Полный лифт векторного поля $X^{(\delta)} = \widetilde{X}$ имеет вид

$$\widetilde{X}^{(0)} = (X^i_\alpha)_{(0)} (\partial^\alpha_i)^{(0)} + (X^i_\alpha)_{\binom{j}{\sigma}} (\partial^\alpha_i)^{\binom{j}{\sigma}}.$$

В точке $p' \in L(M^{\mathbb{R}}_{mn})$ будем иметь

$$\widetilde{X}^{(0)}_{p'} = X^i_\alpha(p) (\partial^\alpha_i)^{(0)}|_{p'} + \partial^\tau_k X^i_\alpha(p) x^{k\sigma}_{\tau j}(p') \partial^{\alpha j}_{i\sigma}|_{p'}.$$

В силу голоморфности векторного поля $X \in (g(M_n))^{\mathbb{R}}$ выполняются тождества (условия Шефферса) ([1], с. 87)

$$\partial^\tau_k X^i_\alpha(p) = \delta_\sigma \partial^\sigma_k X^i_\mu(p) \gamma^{\mu\tau}_\alpha,$$

$\gamma^{\mu\tau}_\alpha$ — структурные постоянные алгебры $\mathbb{A}$ относительно базиса $(\varepsilon^\alpha) : \gamma^{\mu\tau}_\alpha = \varepsilon_\alpha(\varepsilon^\mu \varepsilon^\tau)$, $\delta_\alpha \varepsilon^\alpha = \delta$.

Введем обозначения $X^i_{k\mu} = \delta_\alpha \partial^\alpha_k X^i_\mu$. Тогда

$$\widetilde{X}^{(0)}_{p'} = X^i_\alpha(p) (\partial^\alpha_i)^{(0)}|_{p'} + X^i_{k\mu}(p) \gamma^{\mu\tau}_\alpha x^{k\sigma}_{\tau j}(p') \partial^{\alpha j}_{i\sigma}|_{p'}.$$

Система векторов $(\partial^\alpha_i)^{(0)}|_{p'}$, $\gamma^{\mu\tau}_\alpha x^{k\sigma}_{\tau j}(p') \partial^{\alpha j}_{i\sigma}|_{p'}$ касательного пространства $T_{p'}$ к расслоению $L(M^{\mathbb{R}}_{mn})$ линейно независима.

Действительно, пусть

$$A_{i\alpha} (\partial^\alpha_i)^{(0)}|_{p'} + A^i_{\mu k} \gamma^{\mu\tau}_\alpha x^{k\sigma}_{\tau j}(p') \partial^{\alpha j}_{i\sigma}|_{p'} = 0. \tag{3.1}$$

Векторы $(\partial^\alpha_i)^{(0)}|_{p'}$, $\partial^{\alpha j}_{i\sigma}|_{p'}$ образуют базис касательного пространства $T_{p'}(L(M^{\mathbb{R}}_{mn}))$. Поэтому из (3.1) следуют соотношения

$$A_{i\alpha} = 0, \quad A^i_{\mu k} \gamma^{\mu\tau}_\alpha x^{k\sigma}_{\tau j}(p') = 0. \tag{3.2}$$

Так как $\|x^{k\sigma}_{\tau j}(p')\| \in GL(mn, \mathbb{R})$, то из (3.2) получим

$$A^i_{\mu k} \gamma^{\mu\tau}_\alpha = 0.$$

Свернув эти отношения с δ_τ, придем к равенствам

$$A^i_{\alpha k} = 0.$$

Отсюда следует, что подпространство пространства $T_{p'}(L(M^{\mathbb{R}}_{mn}))$, натянутое на векторы $(\partial^\alpha_i)^{(0)}|_{p'}$, $\gamma^{\mu\tau}_\alpha x^{k\sigma}_{\tau j}(p') \partial^{\alpha j}_{i\sigma}|_{p'}$, имеет размерность $m(n^2 + n)$.

Из сказанного и равенства (2.1) следует

Теорема 3.1. *Размерность алгебры Ли над $\mathbb{R}$ голоморфных аффинных векторных полей относительно связности ∇ на M_n не больше, чем $m(n^2 + n)$, где m — ранг алгебры $\mathbb{A}$, $n = \dim_{\mathbb{A}} M_n$.*

Координаты $X^i_\alpha(p)$, $X^i_{k\mu}(p)$ вектора $\widetilde{X}^{(0)}_{p'}$ удовлетворяют системе линейных однородных уравнений. Для получения этой системы рассмотрим соотношение

$$\mathcal{L}_X K = 0, \tag{3.3}$$

где X — голоморфное аффинное векторное поле на M_n относительно ∇, а тензорное поле K представляет собой $\nabla^m T$ или $\nabla^m R$, где T, R — тензорные поля кручения и кривизны соответственно связности ∇.

Пусть (U, x^i) — карта $\mathbb{A}$-гладкого атласа и $p \in U$. Тогда из (3.3) получим

$$(\partial_s K^i_{j_1 j_2 \dots j_t}(p))X^s(p) + K({}^{i}_{j_1 j_2 \dots j_t}|^{l}_{s})X^s_l(p) = 0, \tag{3.4}$$

где

$$K({}^{i}_{j_1 j_2 \dots j_t}|^{l}_{s}) = \delta^l_{j_1} K^i_{s j_2 \dots j_t}(p) + \delta^l_{j_2} K^i_{j_1 s \dots j_t}(p) + \dots + \delta^l_{j_t} K^i_{j_1 j_2 \dots j_{t-1} s}(p) - \delta^i_s K^l_{j_1 j_2 \dots j_t},$$
$$X^s_l(p) = \partial_l X^s(p).$$

В частности, при $K = T$ или $K = R$ будем иметь соотношения

$$(\partial_s T^i_{jk})(p) X^s(p) + T({}^{i}_{jk}|^{l}_{s}) X^s_l(p) = 0,$$
$$\partial_s R^h_{ijk}(p) X^s(p) + R({}^{h}_{ijk}|^{l}_{s}) X^s_l(p) = 0.$$

Пусть $K^i_{j_1 j_2 \dots j_t} = K_{\nu}{}^{i}{}_{j_1 j_2 \dots j_t} \varepsilon^\nu$, $X^i = X^i_\alpha \varepsilon^\alpha$. Тогда

$$\partial_s K^i_{j_1 j_2 \dots j_t}(p) = \delta_\sigma \partial^\sigma_s K_{\nu}{}^{i}{}_{j_1 j_2 \dots j_t}(p) \varepsilon^\nu.$$
$$X^s_l(p) = \delta_\sigma \partial^\sigma_l X^s_\alpha(p) \varepsilon^\alpha = X^s_{l\alpha}(p) \varepsilon^\alpha.$$

Учитывая эти равенства и соотношения (3.4), получим

$$\delta_\sigma \partial^\sigma_s K_{\nu}{}^{i}{}_{j_1 j_2 \dots j_t}(p) X^s_\alpha(p) \gamma^{\nu\alpha}_\tau + K({}^{i}_{\tau j_1 \dots j_t}|^{l\alpha}_{s}) X^s_{l\alpha}(p) = 0,$$

где $K({}^{i}_{\tau j_1 \dots j_t}|^{l\alpha}_{s}) = \varepsilon_\nu (K({}^{i}_{j_1 \dots j_t}|^{l}_{s})(p)) \gamma^{\nu\alpha}_\tau$.

Таким образом, координаты $X^i_\alpha(p)$, $X^i_{k\mu}(p)$ вектора $\widetilde{X}^{(0)}_{p'}$ удовлетворяют системе однородных линейных уравнений

$$\delta_\sigma \partial^\sigma_s K_{\nu}{}^{i}{}_{j_1 \dots j_t} \gamma^{\nu\alpha}_\tau y^s_\alpha + K({}^{i}_{\tau j_1 \dots j_t}|^{l\alpha}_{s}) y^s_{l\alpha} = 0. \tag{3.5}$$

Отсюда следует

Предложение 3.1. *Если ранг матрицы $\widetilde{K}$ с элементами $K({}^{i}_{\tau j_1 \dots j_\tau}|^{l\alpha}_{s})$ не меньше, чем ρ, то*

$$\dim_{\mathbb{R}}(g(M_n))^{\mathbb{R}} \leqslant m(n^2 + n) - \rho.$$

Предположим, что алгебра Ли $g(M_n)$ голоморфных аффинных векторных полей относительно голоморфной линейной связности ∇ имеет размерность над полем $\mathbb{R}$, равную $m(n^2+n)$. Тогда координаты вектора $\widetilde{X}^{(0)}_{p'}$ для каждого векторного поля $X \in g(M_n)$ удовлетворяют системе (3.5). Пусть $p = \pi(p')$. Так как $\dim_{\mathbb{R}}(g(M_n))^{\mathbb{R}} = m(n^2 + n)$, число неизвестных в системе (3.5) равно также $m(n^2 + n)$, то ранг системы (3.5) равен нулю. Выделим в системе (3.5) подсистемы

$$\delta_\sigma \partial^\sigma_s T^i_{\nu jk}(p) \gamma^{\nu\alpha}_\tau y^s_\alpha + T({}^{i}_{\tau jk}|^{l\alpha}_{s}) y^s_{l\alpha} = 0, \tag{3.6}$$
$$\delta_\sigma \partial^\sigma_s R^h_{\nu ijk}(p) \gamma^{\nu\alpha}_\tau y^s_\alpha + R({}^{h}_{\tau ijk}|^{l\alpha}_{s}) y^s_{l\alpha} = 0. \tag{3.7}$$

Ранги систем (3.6) и (3.7) также равны нулю. Поэтому, в частности,

$$T({}^{i}_{\tau jk}|^{l\alpha}_{s}) = 0,$$
$$R({}^{h}_{\tau ijk}|^{l\alpha}_{s}) = 0.$$

В развернутом виде эти соотношения имеют вид

$$(\delta_j^l T_{\nu sk}^i + \delta_k^l T_{\nu js}^i - \delta_s^h T_{\nu jk}^l)\gamma_\tau^{\nu\alpha} = 0,$$
$$(\delta_i^l R_{\nu sjk}^h + \delta_j^l R_{\nu isk}^h + \delta_k^l R_{\nu ijs}^h - \delta_s^h R_{\nu ijk}^l)\gamma_\tau^{\nu\alpha} = 0.$$

Свернем эти соотношения сначала с δ_α, затем полученные соотношения свернем по l и s. В результате будем иметь

$$T_{\nu sk}^i = 0, \quad R_{\nu ijk}^l = 0.$$

Отсюда следует, что $T = 0$ и $R = 0$. Таким образом, доказана

Теорема 3.2. *Если алгебра Ли голоморфных аффинных векторных полей на $\mathbb{A}$-гладком многообразии M_n относительно голоморфной линейной связности ∇ имеет вещественную размерность $m(n^2+n)$, где m — ранг алгебры $\mathbb{A}$ над $\mathbb{R}$, $n = \dim_{\mathbb{A}} M_n$, то тензорные поля кручения T и кривизны R связности ∇ равны нулю.*

4. Оценка размерностей алгебр Ли голоморфных аффинных векторных полей $\mathbb{A}$-гладких многообразий, снабженных голоморфной линейной связностью с отличным от нуля тензорным полем Вейля

Предположим, что M_n — $\mathbb{A}$-гладкое многообразие. На множестве всевозможных линейных связностей с $T = 0$, заданных на M_n, можно ввести отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом:

$$\nabla \sim \nabla'$$

тогда и только тогда, когда существует голоморфная 1-форма Φ такая, что

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + \Phi(Y)X + \Phi(X)Y$$

для всех голоморфных векторных полей X и Y на M_n.

Тензорные поля кривизны эквивалентных связностей ∇' и ∇ удовлетворяют тождеству

$$R'(X,Y)Z = R(X,Y)Z + (P(X,Y) - P(Y,X))Z + (P(X,Z))Y - (P(Y,Z))X, \qquad (4.1)$$

где P — тензорное поле, определенное тождеством

$$P(X,Y) = \nabla_X \Phi(Y) - \Phi(X)\Phi(Y).$$

Рассмотрим тензорное поле W, удовлетворяющее условию

$$W(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \frac{1}{n+1}(\mathrm{Ric}(X,Y) - \mathrm{Ric}(Y,X)) -$$
$$- \frac{1}{n^2-1}(\mathrm{Ric}(X,Z) + n\,\mathrm{Ric}(Z,X))Y + \frac{1}{n^2-1}(\mathrm{Ric}(Y,Z) + n\,\mathrm{Ric}(Z,Y))X, \qquad (4.2)$$

где Ric — тензорное поле Риччи связности ∇.

Из тождества (4.1) следует, что для эквивалентных линейных связностей ∇' и ∇ имеет место равенство $W' = W$. Тензорное поле W называется тензорным полем Вейля или, иначе, тензорным полем проективной кривизны линейной связности ∇. Тензорное поле W голоморфной линейной связности голоморфно.

Аналогом соответствующего предложения для случая $\mathbb{A} = \mathbb{R}$ [4] является

Предложение 4.1. *Следующие условия эквивалентны*:

(1) $W_p \neq 0$,

(2) *существует карта (U, x^i) на M_n такая, что $W_{iij}^h(p) \neq 0$ для некоторых индексов h, i, j, попарно различных между собой, или, если в каждой карте составляющие вида $W_{iij}^h(p) = 0$ $(h \neq i,\ h \neq j)$, то существует карта (U, x^i), содержащая точку p и такая, что $W_{ijk}^h(p) \neq 0$ для некоторых индексов h, i, j, k, попарно различных между собой.*

Введем понятие ранга элемента алгебры $\mathbb{A}$, которое потребуется в дальнейшем.

Определение 4.1. *Рангом элемента a алгебры $\mathbb{A}$* называется ранг линейного оператора $L_a : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$, действующего по правилу $L_a(x) = ax$.

Обозначим ранг элемента a через $\operatorname{rank} a$.

Определение 4.2. Число $r_0 = \min\{\operatorname{rank} a \mid a \in \mathbb{A} \setminus \{0\}\}$ называется сигнулярным рангом алгебры $\mathbb{A}$.

Предложение 4.2. *Пусть ∇ — голоморфная линейная связность на M_n и $T = 0$. Если $W^h_{iij}(p) = a \neq 0$ $(h \neq i,\ h \neq j)$ и $r = \operatorname{rank} a$, то $\dim_{\mathbb{R}}(g(M_n))^{\mathbb{R}} \leqslant m(n^2+n) - r(3n-5)$.*

Доказательство. Пусть $W^h_{iij} = a$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $W^1_{223}(p) \neq a$. Тогда из (4.2) следует $R^1_{223}(p) = a$. Если ε^α — базис алгебры $\mathbb{A}$, то $a = a_\alpha \varepsilon^\alpha = R^1_{\alpha 223}(p)\varepsilon^\alpha$. Отсюда $a_\alpha = R^1_{\alpha 223}(p)$. Из условия предложения и определения ранга элемента a следует, что $r = \operatorname{rank} A$, где A — матрица линейного оператора L_a относительно базиса (ε^α). Элементами матрицы A будут вещественные числа $a_\alpha \gamma^{\alpha\beta}_\sigma = A^\beta_\sigma$. Будем для определенности считать, что верхний индекс означает номер строки, нижний — номер столбца.

Рассмотрим матрицу B, составленную из коэффициентов при неизвестных

$$y^s_{1\alpha}\ \ (s>1),\quad y^2_{j\alpha}\ \ (j>2),\quad y^3_{k\alpha}\ \ (k>3),\quad y^1_{1\alpha}$$

в уравнениях

$$\left(\begin{smallmatrix}h\\ \tau 223\end{smallmatrix}\right)\ \ (h>1),\quad \left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau l23\end{smallmatrix}\right)\ \ (l>2),\quad \left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 22t\end{smallmatrix}\right)\ \ (t>3),\quad \left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 223\end{smallmatrix}\right)$$

системы (3.7)

$$\begin{gathered}
R\left(\begin{smallmatrix}h\\ \tau 223\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}1\alpha\\ s\end{smallmatrix}\right) = -\delta^h_s R^1_{\nu 223}(p)\gamma^{\nu\alpha}_\tau = -\delta^h_s A^\alpha_\tau = -(I_{n-1}\otimes A)^{h\alpha}_{s\tau},\\
R\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau l23\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}1\alpha\\ s\end{smallmatrix}\right) = 0,\quad R\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau l23\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}j\alpha\\ 2\end{smallmatrix}\right) = \delta^j_l R^1_{\nu 223}(p)\gamma^{\nu\alpha}_\tau = (I_{n-2}\otimes A)^{j\alpha}_{l\tau},\\
R\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 22t\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}1\alpha\\ s\end{smallmatrix}\right) = 0,\quad R\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 22t\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}j\alpha\\ 2\end{smallmatrix}\right) = 0,\quad R\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 22t\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}k\alpha\\ 3\end{smallmatrix}\right) = \delta^k_t A^\alpha_\tau = (I_{n-3}\otimes A)^{k\alpha}_{t\tau},\\
R\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 223\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}1\alpha\\ s\end{smallmatrix}\right) = 0,\quad R\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 223\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}j\alpha\\ 2\end{smallmatrix}\right) = 0,\quad R\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 223\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}k\alpha\\ 3\end{smallmatrix}\right) = 0,\quad R\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 223\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}1\alpha\\ 1\end{smallmatrix}\right) = -A^\alpha_\tau.
\end{gathered}$$

Из этих соотношений следует, что матрица B имеет строение

$$B = \begin{pmatrix} -I_{n-1}\otimes A & * & * & * \\ 0 & I_{n-2}\otimes A & * & * \\ 0 & 0 & I_{n-3}\otimes A & * \\ 0 & 0 & 0 & -A \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\operatorname{rank} B = r(3n-5).$$

На основании предложения 3.2 заключаем

$$\dim_{\mathbb{R}}(g(M_n))^{\mathbb{R}} \leq m(n^2+n) - r(3n-5). \quad \square$$

Следствие. Если существует составляющая вида W^h_{iij} $(h \neq i,\ h \neq j)$ тензорного поля Вейля такая, что $W^h_{iij}(p) = a$ и a — регулярный элемент алгебры $\mathbb{A}$, то вещественная размерность алгебры Ли голоморфных аффинных векторных полей относительно линейной связности ∇ на M_n не больше, чем $m(n^2-2n+5)$.

Доказательство. Элемент $a \in \mathbb{A}$ регулярен тогда и только тогда, когда $\operatorname{rank} a = \dim \mathbb{A} = m$. Поэтому из предложения 4.1 следует $\dim_{\mathbb{R}}(g(M_n))^{\mathbb{R}} \leqslant m(n^2-2n+5)$.

Замечание. Если алгебра $\mathbb{A}$ совпадает с алгеброй действительных чисел $\mathbb{R}$, то условие $a \neq 0$ равносильно условию $r = 1$. Поэтому при $\mathbb{A} = \mathbb{R}$ имеем известный результат из [2].

Для установления точности оценки, приведенной в предложении 4.2, рассмотрим

Пример 4.1. На $\mathbb{A}$-гладком многообразии $\mathbb{A}^n$ с естественными координатными функциями $x^i = x^i_\alpha \varepsilon^\alpha$, где ε^α $(\alpha = 1, 2, \dots, m)$ — базисные элементы алгебры $\mathbb{A}$, зададим $\mathbb{A}$-гладкую линейную связность ∇ условиями

$$\nabla_{\partial_2}\partial_3 = \nabla_{\partial_3}\partial_2 = ax^2\partial_1, \quad \nabla_{\partial_j}\partial_k = 0 \text{ для остальных индексов } j \text{ и } k.$$

Обозначим через r ранг элемента $a \in \mathbb{A}$. Связность ∇ не имеет кручения ($T = 0$), а составляющие тензорного поля кривизны R будут следующими:

$$R^1_{223} = -R^1_{232} = a, \text{ остальные } R^i_{jkl} = 0.$$

Прямые вычисления дают $\nabla R = 0$. Значит, $\nabla^k R = 0$ для любого натурального числа k. Отсюда следует, что условия $\mathcal{L}_X \nabla^k R = 0$ эквивалентны условию $\mathcal{L}_X R = 0$, которое равносильно системе уравнений

$$aX^h_1 = 0 \;\; (h > 1), \;\; aX^2_l = 0 \;\; (l > 2), \;\; aX^3_{l_1} = 0 \;\; (l_1 > 3), \;\; a(2X^2_2 + X^3_3 - X^1_1) = 0, \tag{4.3}$$

где $X^i_j = \partial_j X^i$, а X^i — координаты векторного поля X.

Система дифференциальных уравнений, состоящая из уравнения $\mathcal{L}_X \nabla = 0$ и уравнений (4.3), вполне интегрируема. Интегрируя эту систему, получим, что элементами алгебры $g(M_n)$ являются векторные поля

$$X = (c^s_t x^t + c^s)\partial_s - \left(ac^2 x^2 x^3 + \frac{1}{3} a c^3_2 (x^2)^3\right)\partial_1,$$

где $c^s_t = c^s_{t\alpha}\varepsilon^\alpha$ — произвольные элементы алгебры $\mathbb{A}$, удовлетворяющие системе линейных уравнений

$$A^\alpha_\tau c^h_{1\alpha} = 0 \;\; (h > 1), \;\; A^\alpha_\tau c^2_{l\alpha} = 0 \;\; (l > 2), \;\; A^\alpha_\tau c^3_{l_1\alpha} = 0 \;\; (l_1 > 3), \;\; A^\alpha_\tau(2c^2_{2\alpha} + c^3_{3\alpha} - c^1_{1\alpha}) = 0, \tag{4.4}$$

где $A^\alpha_\tau = a_\vartheta \gamma^{\vartheta\alpha}_\tau$ — элементы матрицы линейного оператора L_a относительно базиса (ε^α).

Условие $\operatorname{rank} a = r$ влечет, что ранг системы (4.4) равен $r(3n - 5)$. Отсюда следует, что вещественная размерность алгебры Ли $(g(M_n))^\mathbb{R}$ голоморфных аффинных векторных полей пространства $(\mathbb{A}^n, \nabla)$ равна $m(n^2 + n) - r(3n - 5)$. Точность границы, указанной в предложении 4.2, установлена.

Если в примере 4.1 положим $a = \delta$, где δ — главная единица алгебры $\mathbb{A}$, то получим $r = \operatorname{rank} a = m$. Построенный пример доказывает точность оценки, указанной в следствии.

Рассмотрим теперь пространства (M_n, ∇), тензорное поле Вейля которых удовлетворяет следующему условию: составляющие вида W^h_{iij} равны нулю в каждой карте $\mathbb{A}$-гладкого атласа, но существует составляющая вида W^h_{ijk} в некоторой карте, отличная от нуля. Пусть $W^h_{ijk}(p) = \lambda_i$, $W^h_{jkl}(p) = \lambda_j$, $W^h_{klj}(p) = \lambda_k$. Положим $A^\alpha_{i\beta} = \lambda_{i\sigma}\gamma^{\sigma\alpha}_\beta$, где $\lambda_{i\sigma}$ — координаты элемента λ_i относительно базиса (ε^α): $\lambda_i = \lambda_{i\sigma}\varepsilon^\sigma$. Матрицу с элементами $A^\alpha_{i\beta}$ обозначим через A_i и введем еще одну матрицу

$$A = \begin{pmatrix} A_i \\ A_j \\ A_k \end{pmatrix}.$$

Так как тензорное поле W удовлетворяет тождеству Бианки, то $A_i + A_j + A_k = 0$. В силу этого ранг матрицы A равен рангу ее подматрицы, содержащей только два блока.

Имеет место

Предложение 4.3. *Если в каждой карте составляющие вида* W^h_{iij} *тензорного поля Вейля равны нулю и* $W^h_{ijk}(p)=\lambda_i\neq 0$, $W^h_{jki}(p)=\lambda_j$, $W^h_{kij}(p)=\lambda_k$ *для некоторых индексов* $i,j,k,p\in M_n$, *то* $\dim_{\mathbb{R}}(g(M_n))^{\mathbb{R}}\leq m(n^2+n)-r(4n-12)-2r_1$, *где* $r=\operatorname{rank}A$,

$$r_1=\operatorname{rank}\begin{pmatrix}A_i-A_j & 0 & 0\\ 0 & A_i-A_k & 0\\ 0 & 0 & A_k-A_j\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Локальную карту (U,x^i) можно выбрать так, чтобы $h=1$, $i=2$, $j=3$, $k=4$. Из определения тензорного поля W следует

$$R^h_{ijk}(p)=W^h_{ijk}(p)$$

для всевозможных индексов h, i, j, k, попарно различных между собой. Составим для (3.7) матрицу со строками

$$\begin{gathered}\tbinom{h}{\tau 234},\quad \tbinom{h}{\tau 342},\quad \tbinom{h}{\tau 423}\quad (h>1),\\ \tbinom{1}{\tau t34},\quad \tbinom{1}{\tau 34t},\quad \tbinom{1}{\tau 4t3},\\ \tbinom{1}{\tau 2t4},\quad \tbinom{1}{\tau t42},\quad \tbinom{1}{\tau 42t},\\ \tbinom{1}{\tau 23t},\quad \tbinom{1}{\tau 3t2},\quad \tbinom{1}{\tau t23}\quad (t>4),\\ \tbinom{1}{\tau 234},\quad \tbinom{1}{\tau 342},\quad \tbinom{1}{\tau 423},\\ \tbinom{1}{\tau 334},\quad \tbinom{1}{\tau 224},\quad \tbinom{1}{\tau 232},\quad \tbinom{1}{\tau 434},\quad \tbinom{1}{\tau 424},\quad \tbinom{1}{\tau 323}\end{gathered}\tag{4.5}$$

и столбцами

$$\begin{gathered}\tbinom{1\alpha}{s}\quad (s>1),\quad \tbinom{l\alpha}{2},\quad \tbinom{l\alpha}{3},\quad \tbinom{l\alpha}{4}\quad (l>4),\quad \tbinom{1\alpha}{1},\\ \tbinom{3\alpha}{2},\quad \tbinom{2\alpha}{3},\quad \tbinom{2\alpha}{4},\quad \tbinom{4\alpha}{2},\quad \tbinom{4\alpha}{3},\quad \tbinom{3\alpha}{4}.\end{gathered}$$

Элементы строк, отличных от (4.5), удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered}B\left(\begin{smallmatrix}h\\ \tau 234\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}1\alpha\\ s\end{smallmatrix}\right)=-\delta^h_s R^1_{\nu 234}(p)\gamma^{\nu\alpha}_\tau=-\delta^h_s A^\alpha_{2\tau},\\
B\left(\begin{smallmatrix}h\\ \tau 342\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}1\alpha\\ s\end{smallmatrix}\right)=-\delta^h_s A^\alpha_{3\tau},\quad B\left(\begin{smallmatrix}h\\ \tau 423\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}1\alpha\\ s\end{smallmatrix}\right)=-\delta^h_s A^\alpha_{4\tau},\\
B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau t34\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}1\alpha\\ s\end{smallmatrix}\right)=B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 34t\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}1\alpha\\ s\end{smallmatrix}\right)=B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 4t3\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}1\alpha\\ s\end{smallmatrix}\right)=0,\\
B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau t34\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ 2\end{smallmatrix}\right)=\delta^l_t A^\alpha_{2\tau},\quad B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 34t\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ 2\end{smallmatrix}\right)=\delta^l_t A^\alpha_{3\tau},\quad B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 4t3\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ 2\end{smallmatrix}\right)=\delta^l_t A^\alpha_{4\tau},\\
B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 2t4\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}1\alpha\\ s\end{smallmatrix}\right)=B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau t42\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}1\alpha\\ s\end{smallmatrix}\right)=B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 42t\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}1\alpha\\ s\end{smallmatrix}\right)=0,\\
B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 2t4\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ 2\end{smallmatrix}\right)=B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau t42\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ 2\end{smallmatrix}\right)=B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 42t\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ 2\end{smallmatrix}\right)=0,\\
B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 2t4\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ 3\end{smallmatrix}\right)=\delta^l_t A^\alpha_{2\tau},\quad B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau t42\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ 3\end{smallmatrix}\right)=\delta^l_t A^\alpha_{3\tau},\quad B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 42t\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ 3\end{smallmatrix}\right)=\delta^l_t A^\alpha_{4\tau},\\
B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 23t\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}1\alpha\\ s\end{smallmatrix}\right)=B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 3t2\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}1\alpha\\ s\end{smallmatrix}\right)=B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau t23\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}1\alpha\\ s\end{smallmatrix}\right)=0,\\
B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 23t\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ 2\end{smallmatrix}\right)=B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 3t2\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ 2\end{smallmatrix}\right)=B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau t23\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ 2\end{smallmatrix}\right)=0,\\
B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 23t\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ 3\end{smallmatrix}\right)=B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 3t2\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ 3\end{smallmatrix}\right)=B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau t23\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ 3\end{smallmatrix}\right)=0,\\
B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 23t\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ 4\end{smallmatrix}\right)=\delta^l_t A^\alpha_{2\tau},\quad B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 3t2\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ 4\end{smallmatrix}\right)=\delta^l_t A^\alpha_{3\tau},\quad B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau t23\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ 4\end{smallmatrix}\right)=\delta^l_t A^\alpha_{4\tau},\\
B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau abc\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}1\alpha\\ s\end{smallmatrix}\right)=0,\quad B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau abc\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ 2\end{smallmatrix}\right)=0,\quad B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau abc\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ 3\end{smallmatrix}\right)=0,\quad B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau abc\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ 4\end{smallmatrix}\right)=0,\end{gathered}$$

где a, b, c попарно различны и принимают значения 2, 3, 4,

$$B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 234\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}1\alpha\\ 1\end{smallmatrix}\right)=-A^\alpha_{2\tau},\quad B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 342\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}1\alpha\\ 1\end{smallmatrix}\right)=-A^\alpha_{3\tau},\quad B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 423\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}1\alpha\\ 1\end{smallmatrix}\right)=-A^\alpha_{4\tau}.$$

Элементы строк (4.5) удовлетворяют условиям

$$B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau aab\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}1\alpha\\ s\end{smallmatrix}\right)=0,\quad B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau aab\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}l\alpha\\ c\end{smallmatrix}\right)=0,\quad B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau aab\end{smallmatrix}\Big|\begin{smallmatrix}1\alpha\\ 1\end{smallmatrix}\right)=0,$$

где a, b, c, принимают значения 2, 3, 4,

$$B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau aab\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}c\alpha\\ d\end{smallmatrix}\right) = 0 \quad \text{при} \quad c \neq a,$$
$$B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau aab\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}a\alpha\\ d\end{smallmatrix}\right) = 0, \quad \text{если } d = a \text{ или } d = b.$$

Далее, при $d \neq a$ и $d \neq b$ имеем

$$B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau aab\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}a\alpha\\ d\end{smallmatrix}\right) = (R^1_{\nu dab}(p) + R^1_{\nu adb}(p))\gamma^{\nu\alpha}_{\tau}.$$

Кроме того,

$$B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau aab\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}c\alpha\\ d\end{smallmatrix}\right) = -B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau aba\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}c\alpha\\ d\end{smallmatrix}\right).$$

В силу этого

$$\begin{aligned}
B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 334\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}3\alpha\\ 2\end{smallmatrix}\right) &= A^{\alpha}_{2\tau} - A^{\alpha}_{3\tau}, \quad & B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 224\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}3\alpha\\ 3\end{smallmatrix}\right) &= A^{\alpha}_{2\tau} - A^{\alpha}_{3\tau},\\
B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 232\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}2\alpha\\ 4\end{smallmatrix}\right) &= A^{\alpha}_{2\tau} - A^{\alpha}_{4\tau}, \quad & B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 434\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}4\alpha\\ 2\end{smallmatrix}\right) &= A^{\alpha}_{2\tau} - A^{\alpha}_{4\tau},\\
B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 424\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}4\alpha\\ 3\end{smallmatrix}\right) &= A^{\alpha}_{4\tau} - A^{\alpha}_{3\tau}, \quad & B\left(\begin{smallmatrix}1\\ \tau 323\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}3\alpha\\ 4\end{smallmatrix}\right) &= A^{\alpha}_{4\tau} - A^{\alpha}_{3\tau}.
\end{aligned}$$

На основании этих результатов можно сделать вывод о строении матрицы

$$B = \begin{pmatrix}
-I_{n-1}\otimes A & * & * & * & * & * \\
0 & I_{n-4}\otimes A & * & * & * & * \\
0 & 0 & I_{n-4}\otimes A & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & I_{n-4}\otimes A & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & -A & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C
\end{pmatrix},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix}
A_2 - A_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & A_2 - A_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & A_2 - A_4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & A_2 - A_4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & A_4 - A_3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_4 - A_3
\end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\operatorname{rank} B = r(4n-12) + 2r_1,$$

где r_1 является рангом матрицы

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix}
A_2 - A_3 & 0 & 0 \\
0 & A_2 - A_4 & 0 \\
0 & 0 & A_4 - A_3
\end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\dim_{\mathbb{R}}(g(M_n))^{\mathbb{R}} \leq m(n^2+n) - r(4n-12) - 2r_1. \quad \square$$

Предложение 4.4. *Если в каждой карте составляющие вида W^h_{iij} тождественно равны нулю, а $W \neq 0$, то наибольшая вещественная размерность алгебры Ли голоморфных векторных полей пространств (M_n, ∇) равна $m(n^2+n) - 4r_0(n-2)$, где r_0 — сингулярный ранг алгебры $\mathbb{A}$, $m = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{A}$.*

Доказательство. Из условий предложения 4.4 и предложения 4.1 следует существование карты (U,x^i) и точки $p\in U$ таких, что $W^h_{ijk}(p)\neq 0$ для некоторых индексов h, i, j, k, попарно различных между собой. Пусть $r=\operatorname{rank} a$. Тогда $r\geq r_0$. Значит, ранг матрицы A_i с элементами $A^\alpha_{i\beta}=\lambda_{i\sigma}\gamma^{\sigma\alpha}_\beta$, где $\lambda_{i\sigma}\varepsilon^\sigma=W^h_{ijk}(p)$, не меньше, чем r_0. Матрица $\widetilde{C}$ имеет по крайне мере два ненулевых блока. В противном случае $A_2=A_3=A_4=0$. Следовательно, $r_1=\operatorname{rank}\widetilde{C}\geq 2r_0$. Отсюда на основании предложения 4.3 заключаем

$$\dim_{\mathbb{R}}(g(M_n))^{\mathbb{R}}\leq m(n^2+n)-4r_0(n-2).\quad\square$$

Для доказательства точности оценки приведем

Пример 4.2. На $\mathbb{A}$-гладком многообразии $\mathbb{A}^n$ линейную связность ∇ зададим соотношениями

$$\nabla_{\partial_2}\partial_3=\nabla_{\partial_3}\partial_2=bx^4,\quad \nabla_{\partial_3}\partial_4=\nabla_{\partial_4}\partial_3=2bx^2,\quad \text{остальные } \nabla_{\partial_j}\partial_k=0,$$

где $b\in\mathbb{A}$ и $\operatorname{rank} b=r_0$. Для этой связности ∇ имеем

$$R^1_{234}=-b,\quad R^1_{342}=-b,\quad R^1_{423}=2b,\quad R^1_{243}=b,\quad R^1_{324}=b,\quad R^1_{432}=-2b,\quad \text{другие } R^h_{ijk}=0.$$

Далее, $\nabla^k R=0$ для каждого натурального числа k. Поэтому соотношения $\mathcal{L}_X\nabla^k R=0$ являются следствиями соотношения $\mathcal{L}_X R=0$. Последнее условие равносильно системе

$$\begin{gathered}
bX^h_1=0\ \ (h>1),\quad bX^2_l=0,\quad bX^3_l=0,\quad bX^4_l=0\ \ (l>4),\\
bX^4_2=0,\quad bX^4_3=0,\quad bX^2_4=0,\quad bX^3_4=0,\\
b(X^2_2+X^3_3+X^4_4-X^1_1)=0.
\end{gathered}$$

Учитывая эти соотношения, из уравнения $\mathcal{L}_X\nabla=0$ находим, что алгебра Ли голоморфных аффинных векторных полей пространства $(\mathbb{A}^n,\nabla)$ состоит из всевозможных векторных полей вида

$$X=(c^t_s x^s+c^t)\partial_t+(c^3_2 b(x^2)^2x^4+c^2_3 b(x^3)^2x^4+c^4bx^2x^3+2c^2bx^3x^4)\partial_1,$$

где $c^t_s=c^t_{s\alpha}\varepsilon^\alpha$, $c^t=c^t_\alpha\varepsilon^\alpha$ — произвольные элементы алгебры $\mathbb{A}$, удовлетворяющие системе однородных линейных уравнений

$$\begin{gathered}
A^\beta_\tau c^h_{1\beta}=0\ \ (h>1),\quad A^\beta_\tau c^a_{l\beta}=0\ \ (a=2,3,4;\ \ l>4),\\
A^\beta_\tau c^4_{a\beta}=0,\quad A^\beta_\tau c^a_{4\beta}=0\ \ (a=2,3),\\
A^\beta_\tau(c^2_{2\beta}+c^3_{3\beta}+c^4_{4\beta}-c^1_{1\beta})=0,
\end{gathered}$$

где $A^\beta_\tau=b_\vartheta\gamma^{\vartheta\alpha}_\beta$, $b=b_\vartheta\varepsilon^\vartheta$. Ранг этой системы равен $4r_0(n-2)$. Значит,

$$\dim_{\mathbb{R}}(g(\mathbb{A}^n))^{\mathbb{R}}=m(n^2+n)-4r_0(n-2).$$

Теорема 4.1. *Пусть M_n — $\mathbb{A}$-гладкое многообразие, ∇ — голоморфная линейная связность на M_n. Если тензорное поле Вейля W ненулевое, то максимальная размерность алгебры Ли $(g(M_n))^{\mathbb{R}}$ голоморфных аффинных векторных полей равна $m(n^2+n)-r_0(3n-5)$, где $m=\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{A}$, $n\geq 3$, r_0 — сингулярный ранг алгебры $\mathbb{A}$.*

Доказательство. Если $W^h_{iij}(p)\neq 0$ в некоторой карте (U,x^i), то из предложения 4.2 следует

$$\dim_{\mathbb{R}}(g(M_n))^{\mathbb{R}}\leq m(n^2+n)-r_0(3n-5),$$

где $n\geq 3$, а r_0 — сингулярный ранг алгебры $\mathbb{A}$.

Если все составляющие вида W^h_{iij} равны нулю в каждой карте $\mathbb{A}$-гладкого атласа, а $W\neq 0$, то в силу предложения 4.4 имеем

$$\dim_{\mathbb{R}}(g(M_n))^{\mathbb{R}}\leq m(n^2+n)-4r_0(n-2),$$

причем $n \geq 4$. При $n \geq 3$ выполняется неравенство

$$m(n^2+n) - 4r_0(n-2) \leq m(n^2+n) - r_0(3n-5).$$

Точность оценки следует из примера 4.1. $\square$

Так как $r_0 \geq 1$, то следствием этой теоремы является

Теорема 4.2. *Размерности алгебр Ли $(g(M_n))^{\mathbb{R}}$ голоморфных аффинных векторных полей пространств (M_n, ∇) с $W \neq 0$ над коммутативными ассоциативными алгебрами $\mathbb{A}$ с единицей не превосходят $m(n^2+n) - 3n + 5$, где $m = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{A}$. Указанная оценка точная.*

Для установления точности оценки приведем

Пример 4.3. В примере 4.1 в качестве алгебры $\mathbb{A}$ возьмем алгебру $\mathbb{R}(\varepsilon^{m-1})$ плюральных чисел ранга m и положим $a = \varepsilon^{m-1}$. Тогда $\operatorname{rank} a = 1$. Элементами алгебры $g(M_n)$ являются векторные поля

$$X = (c^s_t x^t + c^s)\partial_s - \left(\varepsilon^{m-1} c^2 x^2 x^3 + \frac{1}{3}\varepsilon^{m-1} c^3_2 (x^2)^3\right)\partial_1,$$

причем постоянные $c^s_t = c^s_{t\alpha}\varepsilon^\alpha$ удовлетворяют условиям

$$c^h_{10} = 0 \quad (h > 1), \quad c^2_{k0} = 0 \quad (k > 2), \quad c^3_{l0} = 0 \quad (l > 3),$$
$$2c^2_{20} + c^3_{30} = c^1_{10}.$$

На основании этих соотношений заключаем, что базис алгебры $(g(M_n))^{\mathbb{R}}$ составляют векторные поля

$$2x^1\partial_1 + x^2\partial_2, \quad x^1\partial_1 + x^3\partial_3, \quad \partial_2 - \varepsilon^{m-1}x^2x^3\partial_1, \quad x^2\partial_3 - \frac{1}{3}\varepsilon^{m-1}(x^2)^3\partial_1,$$
$$\partial_s, \quad x^k\partial_1, \quad x^k\partial_j, \quad \varepsilon^\lambda\partial_s, \quad \varepsilon^\lambda x^1\partial_s, \quad \varepsilon^\lambda x^k\partial_2, \quad \varepsilon^\lambda x^k\partial_3, \quad \varepsilon^\lambda x^3\partial_3, \quad \varepsilon^\lambda x^j\partial_3, \quad \varepsilon^\lambda x^k\partial_j,$$

где $s = 1, 2, \ldots, n$, $k = 2, 3, \ldots, n$, $j = 4, 5, \ldots, n$, $\lambda = 1, 2, \ldots, m-1$.

Литература

1. Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В. *Пространства над алгебрами.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1985. – 263 с.
2. Егоров И.П. *Движения в пространствах аффинной связности* // Учен. зап. Пензенск. гос. пед. ин-та. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1965. – С. 3–179.
3. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 1. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
4. Султанов А.Я. *О максимальной размерности интранзитивных групп движений пространств аффинной связности* // Движения в обобщенных пространствах. Межвузовский сб. науч. тр. Пенза. – 2000. – С. 79–90.

Пензенский государственный педагогический университет

Поступила 14.12.2005