Известия вузов. Математика
2013, № 5, с. 61–63

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение

Р.З. ДАУТОВ

ТОЧНАЯ ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ В ВЕСОВОМ $L_2(-1,1)$

Аннотация. Получена точная оценка погрешности наилучшего приближения алгебраическими полиномами в пространстве Лебега $L_2(-1,1)$ с весом $1-x^2$ в степени $\lambda > -1$.

Ключевые слова: наилучшее приближение, точные оценки, весовое пространство.

УДК: 517.518

Введение

В теории p-метода конечных элементов известна оценка

$$\min_{p\in P_{m-1}} |u-p|_{L_2(-1,1)} \le C_{ms}\, |\rho^{s/2}u^{(s)}|_{L_2(-1,1)}, \quad C_{ms}^2 = \frac{(m-s)!}{(m+s)!}, \quad s=0,1,\dots,m. \tag{1}$$

Здесь P_{m-1} — множество алгебраических полиномов степени не выше $m-1$, $m \ge 1$, $\rho = 1-x^2$ (см., например, [1], с. 72, теорема 3.11). Из (1) вытекает хорошо известная в теории аппроксимации функций оценка

$$\min_{p\in P_{m-1}} |u-p|_{L_2(-1,1)} \le c_s m^{-s} |u^{(s)}|_{L_2(-1,1)}, \quad s=0,1,\dots,m,$$

поскольку $0 \le \rho \le 1$, $C_{ms} \le (\theta/m)^s$, $\theta = (e/2)^{s/m}$. Ясно, что наличие множителя $\rho^{s/2}$ делает оценку (1) существенно более точной. Далее покажем, что постоянную C_{ms} нельзя заменить на меньшую.

Известны различные обобщения оценки (1), например, ([1], с. 85, теорема 3.28)

$$\min_{p\in P_{m-1}} |\rho^{\lambda/2}(u-p)|_{L_2(-1,1)} \le c_{\lambda s}\, m^{-s} |\rho^{(\lambda+s)/2}u^{(s)}|_{L_2(-1,1)}, \quad s=0,1,\dots,m, \quad \lambda > 1/2.$$

Целью данного сообщения является уточнение этой оценки.

1. Точная оценка

Далее $\lambda > -1$, $L_{2,\lambda}(-1,1)$ — весовое пространство Лебега с нормой

$$|u|_{0,\lambda}^2 = \int_{-1}^{1} \rho^\lambda u^2 dx,$$

Поступила 28.11.2012

$H^m_{\lambda+m}(-1,1)$ есть весовое пространство Соболева — замыкание пространства $C^\infty([-1,1])$ по норме

$$\|u\|^2_{m,\lambda+m} = \sum_{k=0}^{m} |u^{(k)}|^2_{0,\lambda+k}, \quad m = 0, 1, \dots \,.$$

Отметим, что $H^0_\lambda(-1,1) = L_{2,\lambda}(-1,1)$ ([2], сс. 303, 305). Далее через $P_n^{(\lambda)} = P_n^{(\lambda,\lambda)}$ обозначается полином Якоби степени n на отрезке $[-1,1]$.

Теорема. *Пусть $u \in H^k_{\lambda+k}(-1,1)$ при некотором $k \ge 0$ и $m = 1, 2, \dots$. Тогда*

$$\min_{p \in P_{m-1}} |u - p|_{0,\lambda} \le C_{ms\lambda} |u^{(s)}|_{0,\lambda+s}, \quad C^2_{ms\lambda} = \frac{(m-s)!\,\Gamma(m+2\lambda+1)}{m!\,\Gamma(m+s+2\lambda+1)},$$

для любого $s = 0, 1, \dots, \min(m,k)$. Равенство в оценке достигается при $u = P_m^{(\lambda)}$.

Приведем схему доказательства теоремы при $s \ge 1$. Поскольку

$$-\big(\rho^{1+\lambda}(P_n^{(\lambda)})'\big)' = n(n+2\lambda+1)\rho^\lambda P_n^{(\lambda)}, \quad \big(P_n^{(\lambda)}\big)' = (n+2\lambda+1)/2\, P_{n-1}^{(\lambda+1)}, \tag{2}$$

$$d^2_{n\lambda} = \int_{-1}^{1} \rho^\lambda \big(P_n^{(\lambda)}\big)^2 dx = \frac{2^{2\lambda+1}\Gamma^2(n+\lambda+1)}{n!(2n+2\lambda+1)\Gamma(n+2\lambda+1)},$$

а система $\{P_n^{(\lambda)},\, n = 0, 1, \dots\}$ образует ортогональный базис в $L_{2,\lambda}(-1,1)$, то

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n\,\lambda} P_n^{(\lambda)}, \quad c_{n\lambda} = \frac{1}{d^2_{n\lambda}} \int\limits_{-1}^{1} \rho^\lambda u P_n^{(\lambda)} dx,$$

для любого $u \in L_{2,\lambda}(-1,1)$, причем

$$|u|^2_{0,\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{d_{n\lambda}} \int_{-1}^{1} \rho^\lambda u P_n^{(\lambda)}\, dx \right)^2. \tag{3}$$

Обозначим через $u_{m-1} \in P_{m-1}$ полином наилучшего приближения в $L_{2,\lambda}(-1,1)$. Тогда

$$u_{m-1} = \sum_{n=0}^{m-1} c_{n\,\lambda} P_n^{(\lambda)}, \quad u - u_{m-1} = \sum_{n=m}^{\infty} c_{n\,\lambda} P_n^{(\lambda)}, \quad |u - u_{m-1}|^2_{0,\lambda} = \sum_{n=m}^{\infty} d^2_{n\lambda} c^2_{n\,\lambda}.$$

Преобразуем интеграл в определении $c_{n\,\lambda}$, интегрируя по частям. Пусть $I(f) = \int\limits_{-1}^{x} f\, dx$. Из (2) имеем

$$I\big(\rho^\lambda P_n^{(\lambda)}\big) = \frac{-\rho^{\lambda+1}}{2n}\, P_{n-1}^{(\lambda+1)}.$$

Следовательно,

$$I^s\big(\rho^\lambda P_n^{(\lambda)}\big) = (-1)^s \frac{\rho^{\lambda+s}}{2^s n(n-1)\cdots(n-s+1)}\, P_{n-s}^{(\lambda+s)} = (-1)^s\, e_{ns}\, \rho^{\lambda+s}\, P_{n-s}^{(\lambda+s)},$$

$$\int_{-1}^{1} \rho^\lambda u\, P_n^{(\lambda)}\, dx = (-1)^s \int_{-1}^{1} u^{(s)}\, I^s\big(\rho^\lambda P_n^{(\lambda)}\big)\, dx = e_{ns} \int_{-1}^{1} u^{(s)}\, \rho^{\lambda+s}\, P_{n-s}^{(\lambda+s)}\, dx.$$

Таким образом, при $s \le m$ получаем

$$|u - u_{m-1}|^2_{0,\lambda} = \sum_{n=m}^{\infty} d^2_{n\lambda} c^2_{n\,\lambda} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{d^2_{n\lambda}} \left(\int_{-1}^{1} \rho^\lambda u P_n^{(\lambda)} dx \right)^2 =$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{e_{ns}^2 d_{n-s\lambda+s}^2}{d_{n\lambda}^2} \left(\frac{1}{d_{n-s\lambda+s}} \int_{-1}^{1} u^{(s)}\, \rho^{\lambda+s}\, P_{n-s}^{(\lambda+s)}\, dx \right)^2. \quad (4)$$

Поскольку $e_{ns} = 2^{-s}(n-s)!/n!$,

$$\frac{d_{n-s\lambda+s}^2}{d_{n\lambda}^2} = \frac{2^{2s} n!\, \Gamma(n+2\lambda+1)}{(n-s)!\, \Gamma(n+s+2\lambda+1)}, \quad (5)$$

то

$$\frac{e_{ns}^2 d_{n-s\lambda+s}^2}{d_{n\lambda}^2} = \frac{(n-s)!\, \Gamma(n+2\lambda+1)}{n!\, \Gamma(n+s+2\lambda+1)} = C_{ns\lambda}^2.$$

Функция $n \to C_{ns\lambda}$ убывает, поэтому согласно (3) из (4) следует искомая оценка

$$|u - u_{m-1}|_{0,\lambda}^2 \le C_{ms\lambda}^2 |u^{(s)}|_{0,\lambda+s}^2.$$

Точность оценки устанавливается следующим образом. Пусть $u = P_m^{\lambda}$. Тогда $u_{m-1} = 0$ и $|u - u_{m-1}|_{0,\lambda}^2 = |u|_{0,\lambda}^2 = d_{m\lambda}^2$. Далее, из (2) имеем

$$\big(P_m^{(\lambda)}\big)^{(s)} = f_{m\lambda s}\, P_{m-s}^{(\lambda+s)}, \quad f_{m\lambda s} = 2^{-s}(m+1+2\lambda)\cdots(m+s+2\lambda) = 2^{-s}\, \frac{\Gamma(m+s+2\lambda+1)}{\Gamma(m+2\lambda+1)}.$$

Поэтому

$$|u^{(s)}|_{0,\lambda+s}^2 = f_{m\lambda s}^2 \int_{-1}^{1} \rho^{\lambda+s} \big(P_{m-s}^{(\lambda+s)}\big)^2 dx = f_{m\lambda s}^2 d_{m-s\lambda+s}^2.$$

Следовательно, учитывая равенство (5), получаем

$$\frac{|u - u_{m-1}|_{0,\lambda}^2}{|u^{(s)}|_{0,\lambda+s}^2} = \frac{d_{m\lambda}^2}{f_{m\lambda s}^2 d_{m-s\lambda+s}^2} = \frac{(m-s)!\, \Gamma(m+s+2\lambda+1)}{f_{m\lambda s}^2 2^{2s} m!\, \Gamma(m+2\lambda+1)} = C_{ms\lambda}^2.$$

Литература

[1] Schwab C. *p- and hp-finite element methods: theory and applications to solid and fluid mechanics* (Oxford Univer. Press, Oxford, 1999).

[2] Трибель Х. *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы* (Мир, М., 1980).

Р.З. Даутов

профессор, кафедра вычислительной математики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: rdautov@kpfu.ru

R.Z. Dautov

A sharp error estimate of the best approximation by algebraic polynomials in the weighted space $L_2(-1,1)$

Abstract. We obtain a sharp error estimate of the best approximation by algebraic polynomials in the Lebesgue space $L_2(-1,1)$ with the weight $1-x^2$ of degree $\lambda > -1$.

Keywords: best approximation, sharp estimate, weighted space.

R.Z. Dautov

Professor, Chair of Computational Mathematics,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,
e-mail: rdautov@kpfu.ru