ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 8 (459)

УДК 517.927

С.П. ЗУБОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассматривается задача Коши для уравнения

$$\varepsilon^h C(\varepsilon)\frac{dx}{dt} = [A - B(\varepsilon)]x(t,\varepsilon), \quad t \in [0,\infty), \ \ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0], \ \ h \in Q, \tag{1}$$

где A — замкнутый, линейный, фредгольмовский, вообще говоря, неограниченный оператор, действующий из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, с плотной в E_1 областью определения, $\dim\ker A = \dim co\ker A = 1$;

$$B(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k B_k, \quad C(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k C_k;$$

B_k, C_k — линейные операторы, действующие из E_1 в E_2, $\varepsilon^{-1}B(\varepsilon)$ и $C(\varepsilon)$ — равномерно ограниченные операторы на $(0,\varepsilon_0]$.

Оператор $C(\varepsilon)$ может быть необратимым при всех достаточно малых ε, поэтому задача Коши для уравнения (1) может иметь решение не при любых значениях $x(0,\varepsilon)$; решение, если оно существует, может быть не единственным.

В данной работе строится подпространство в E_1, в котором задача Коши однозначно разрешима; исследуется структура решения; строится само решение в виде, позволяющем легко найти его разложение в сумму рядов по дробным степеням ε; находится порядок роста решения при $\varepsilon \to 0$; изучается возможность наблюдения явления погранслоя. Воспользуемся разложениями $E_1 = E_{\infty-1} \oplus \ker A$, $E_2 = R(A) \oplus co\ker A$, где $R(A)$ — множество значений оператора A, $E_{\infty-1}$ — прямое дополнение к $\ker A$ в E_1. Тогда $I_1 = (I_1 - P) + P$, $I_2 = (I_2 - Q) + Q$, где $P(Q)$ — проектор на $\ker A$ ($co\ker A$); I_1 (I_2) — единичный оператор в E_1 (E_2). Сужение $\widetilde{A}$ оператора A на $E_{\infty-1}$ имеет ограниченный обратный $\widetilde{A}^{-1}$.

Обозначим $\widetilde{A}^{-1}(I_2 - Q) = H$, $\ker A = \{e\}$, $co\ker A = \{\varphi\}$, $\langle y, \varphi\rangle$ — значение линейного функционала φ из E_2^* на $y \in E_2$,

$$R(\varepsilon,\lambda) = \langle [B(\varepsilon) + \lambda C(\varepsilon)][I_1 - HB(\varepsilon) - \lambda HC(\varepsilon)]^{-1}e, \varphi\rangle.$$

Величину λ назовем C-собственным значением оператора D ($C, D : E_1 \to E_2$), если существует $u \in E_1$, $u \neq 0$, такой, что $(D - \lambda C)u = 0$. Элемент u будем называть C-собственным элементом, отвечающим значению λ.

Лемма. *Величина $\lambda = \lambda(\varepsilon)$, обладающая свойством $\lambda(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, является $C(\varepsilon)$-собственным значением оператора $A - B(\varepsilon)$ в том и только том случае, когда λ удовлетворяет условию $R(\varepsilon,\lambda) = 0$. Соответствующий $C(\varepsilon)$-собственный элемент $u(\varepsilon)$ имеет вид*

$$u(\varepsilon) = [I_1 - HB(\varepsilon) - \lambda(\varepsilon)HC(\varepsilon)]^{-1}e.$$

Действительно, уравнение $[A-B(\varepsilon)]u=\lambda C(\varepsilon)u$ разрешимо в том и только том случае, когда

$$\langle [B(\varepsilon)+\lambda C(\varepsilon)]u,\varphi\rangle = 0. \tag{2}$$

При выполнении этого условия имеем

$$[I_1 - HB(\varepsilon)]u = \lambda HC(\varepsilon)u + ce \quad \forall c\in C,$$

откуда $u(\varepsilon)=[I_1-HB(\varepsilon)-\lambda HC(\varepsilon)]^{-1}e$ с точностью до произвольного множителя. Подставив это выражение в (2), получим утверждение леммы.

Из выражения, определяющего вид $R(\varepsilon,\lambda)$, следует

$$R(\varepsilon,\lambda)=\sum_{k,j=0}^{\infty} d_{kj}\varepsilon^j\lambda^k,$$

где $d_{kj}\in C$, $d_{00}=0$. В силу подготовительной теоремы Вейрштрасса

$$R(\varepsilon,\lambda)=\varepsilon^r\lambda^{q_0}\cdot(\lambda-\lambda_1)^{q_1}\dots(\lambda-\lambda_s)^{q_s}\psi(\varepsilon,\lambda),$$

где $\psi(\varepsilon,\lambda)$ — аналитическая функция в точке $(0,0)$, причем $\psi(0,0)\neq 0$; $\lambda_k=\lambda_k(\varepsilon)$ — решения уравнения $R(\varepsilon,\lambda)=0$, пронумерованные в порядке возрастания их абсолютных величин для $k=0,1,\dots,s$; $\lambda_0=0$; $r\geq 0$.

Предположим, что не все q_k, $k=0,1,\dots,s$, равны нулю. Для нахождения $\lambda_k(\varepsilon)$ удобно пользоваться диаграммой Ньютона ([1], c. 34). С помощью диаграммы находятся главные значения бесконечно малых при $\varepsilon\to 0$ величин $\lambda_k(\varepsilon)$, т. е. $\lambda_k(\varepsilon)=a_k\varepsilon^{\nu_k}+o(\varepsilon^{\nu_k})$, $k=1,2,\dots,s$, $a_k\in C$, $\nu_k\in Q$, значения ν_k при разных k могут совпадать.

Обозначим через L совокупность всех $C(\varepsilon)$-собственных значений оператора $A-B(\varepsilon)$, тогда $L=L_{-1}\cup(\bigcup_{k=0}^{s}\lambda_k(\varepsilon))$, где L_{-1} — объединение остальных $C(\varepsilon)$-собственных значений.

Пусть $\Gamma_k=\Gamma_k(\varepsilon)$ — окружности на λ-плоскости с центрами в точках λ_k, с радиусами достаточно малыми, чтобы Γ_k не пересекались; Γ_{-1} — окружность фиксированного радиуса такая, что все Γ_k лежат внутри Γ_{-1}, а L_{-1} — вне Γ_{-1}. Введем операторы

$$P_k(\varepsilon)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}[A-B(\varepsilon)-\lambda C(\varepsilon)]^{-1}C(\varepsilon)d\lambda, \quad k=-1,\dots,s.$$

Теорема 1. *При $k=0,\dots,s$ операторы $P_k(\varepsilon)$ — это проекторы на подпространства E_{1k}, являющиеся линейными оболочками элементов жордановых цепочек собственных и $C(\varepsilon)$-присоединенных элементов операторов $A-B(\varepsilon)-\lambda_kC(\varepsilon)$, т. е.*

$$E_{1k}=\{u_1(\lambda_k),u_2(\lambda_k),\dots,u_{q_k}(\lambda_k)\},$$

где

$$[A-B(\varepsilon)-\lambda_kC(\varepsilon)]u_1(\lambda_k)=0, \quad [A-B(\varepsilon)-\lambda_kC(\varepsilon)]u_j(\lambda_k)=C(\varepsilon)u_{j-1}(\lambda_k), \;\; j=2,3,\dots,$$
$$u_1(\lambda_k)=F(\varepsilon,\lambda_k)e, \quad F(\varepsilon,\lambda)=[I_1-HB(\varepsilon)-\lambda HC(\varepsilon)]^{-1},$$
$$u_j(\lambda_k)=\phi^{j-1}(\varepsilon,\lambda_k)u_1(\lambda_k), \quad \phi(\varepsilon,\lambda)=F(\varepsilon,\lambda)HC(\varepsilon).$$

При этом

$$P_k(\varepsilon)v=\sum_{j=1}^{q_k}v_{kj}(\varepsilon)u_j(\lambda_k), \quad v\in E_1,$$

где

$$v_{kj}(\varepsilon)=[S_{q_k+1}(\varepsilon,\lambda_k)u_1(\lambda_k)]^{-1}[S_{q_k-j+2}(\varepsilon,\lambda_k)v-\sum_{m=1}^{q_k-j}v_{k\ j+m}(\varepsilon)S_{q_k+m+1}(\varepsilon,\lambda_k)u_1(\lambda_k)], \tag{3}$$
$$S_j(\varepsilon,\lambda)(\cdot)=\langle\{C(\varepsilon)+[B(\varepsilon)+\lambda C(\varepsilon)]\phi(\varepsilon,\lambda)\}\phi^{j-2}(\varepsilon,\lambda)(\cdot),\varphi\rangle.$$

В самом деле, соотношение $[A-B(\varepsilon)-\lambda_k C(\varepsilon)]u_j(\lambda_k)=C(\varepsilon)u_{j-1}(\lambda_k)$ разрешимо относительно u_j в том и только том случае, когда

$$-\langle [B(\varepsilon)+\lambda_k C(\varepsilon)]u_j(\lambda_k),\varphi\rangle = \langle C(\varepsilon)\phi^{j-2}(\varepsilon,\lambda_k)u_1(\lambda_k),\varphi\rangle. \tag{4}$$

При выполнении этого условия

$$[I_1-HB(\varepsilon)-\lambda_k HC(\varepsilon)]u_j(\lambda_k)=HC(\varepsilon)u_{j-1}(\lambda_k)+ce, \quad c\in C,$$

т. е. $u_j(\lambda_k)=\phi(\varepsilon,\lambda_k)u_{j-1}(\lambda_k)$ с точностью до младшего члена $u_1(\lambda_k)$. Условие существования (4) элемента $u_j(\lambda_k)$ теперь имеет вид $S_j(\varepsilon,\lambda_k)u_1(\lambda_k)=0$. Имеется ровно q_k элементов $u_j(\lambda_k)$, т. к.

$$R(\varepsilon,\lambda)=R(\varepsilon,\lambda_k)+\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_k)^j S_{j+1}(\varepsilon,\lambda_k)u_1(\lambda_k),$$

т. е.

$$S_j(\varepsilon,\lambda_k)u_1(\lambda_k)=0, \ \ j=2,\dots,q_k; \quad S_{q_k+1}(\varepsilon,\lambda_k)u_1(\lambda_k)\neq 0. \tag{5}$$

Элементы $u_j(\lambda_k)$, $j=1,\dots,q_k$, линейно независимы, поскольку при применении к соотношению $\sum\limits_{j=1}^{q_k}\alpha_j u_j(\lambda_k)=0$, $\alpha_j\in C$, функционалов $S_n(\lambda_k)$, $n=2,\dots,q_k$, с учетом (5) и равенств

$$S_j(\lambda_k)u_r(\lambda_k)=S_{j-s}(\lambda_k)u_{r+s}(\lambda_k), \quad -r<s\le j-2, \ \ j\ge 2, \ \ r\ge 1,$$

получаем $\alpha_j=0$, $j=1,\dots,q_k$. Равенства $P_k^2(\varepsilon)=P_k(\varepsilon)$ и $P_k(\varepsilon)P_j(\varepsilon)=0$, $k\neq j$, доказываются применением обобщенного тождества Гильберта

$$[A-B-\lambda C]^{-1}C\cdot[A-B-\mu C]^{-1}C=\frac{1}{\mu-\lambda}\{[A-B-\mu C]^{-1}C-[A-B-\lambda C]^{-1}C\}.$$

Операторы $P_k(\varepsilon)$ проектируют E_1 на E_{1k}, т. к.

$$P_k(\varepsilon)v=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}\frac{\langle S_2(\varepsilon,\lambda)v,\varphi\rangle F(\varepsilon,\lambda)e}{R(\varepsilon,\lambda)}d\lambda \tag{6}$$

и имеют место разложения

$$S_2(\varepsilon,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_k)^n S_{n+2}(\varepsilon,\lambda_k), \quad F(\varepsilon,\lambda)e=\sum_{m=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_k)^m u_{m+1}(\lambda_k). \tag{7}$$

Поскольку в числителе подинтегрального выражения (6) множителем при $u_{m+q}(\lambda_k)$ для $q\ge 1$ является $(\lambda-\lambda_k)^{q_k+s}$, $s\ge 0$, то $P_k(\varepsilon)v$ есть линейная комбинация элементов $u_j(\lambda_k)$, $j=1,\dots,q_k$, при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ для всех $v\in E_1$, т. е.

$$P_k(\varepsilon)v=\sum_{j=1}^{q_k}v_{kj}(\varepsilon)u_j(\lambda_k), \quad v_{kj}(\varepsilon)\in C.$$

Формулы (3) для определения коэффициентов $v_{kj}(\varepsilon)$ получаются при решении треугольной системы

$$S_n(\lambda_k)v=\sum_{m=q_k-n+2}^{q_k}v_{km}(\varepsilon)S_{m+n-1}(\varepsilon,\lambda_k)u_1, \quad n=2,\dots,q_k+1. \quad \square$$

С помощью проекторов $P_k(\varepsilon)$, $k=-1,\dots,s$, получаем

$$E_1=E_{1,-1}\oplus\widetilde{E}_1, \quad \widetilde{E}_1=E_{1,0}\oplus E_{1,1}\oplus\dots\oplus E_{1,s}.$$

Решим задачу Коши для уравнения (1) в подпространстве $\widetilde{E}_1$ с начальным условием

$$x(0,\varepsilon)=x^0(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{s}P_k(\varepsilon)x^0 \ \ \forall x^0\in E_1. \tag{8}$$

Теорема 2. *Решение задачи* (1), (8) *существует, единственно и имеет вид*

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{s}[\exp(\varepsilon^{-h}\lambda_k(\varepsilon)t)]x_k(t,\varepsilon),$$

$$x_k(t,\varepsilon)\in E_{1,k},\quad x_k(t,\varepsilon)=\sum_{j=1}^{q_k}x_{kj}(t,\varepsilon)u_j(\lambda_k),$$

$$x_{kj}(t,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{q_k-j}(n!)^{-1}(\varepsilon^{-h}t)^n(P_k(\varepsilon)x^0)_{j+n}, \tag{9}$$

где $(P_k(\varepsilon)x^0)_{j+n}$ — $(j+n)$*-я компонента* $P_k(\varepsilon)x^0$ *в* $E_{1,k}$.

Подстановкой функции

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{s}\Big(-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}[\exp(\varepsilon^{-h}\lambda t)][A-B(\varepsilon)-\lambda C(\varepsilon)]^{-1}C(\varepsilon)x^0d\lambda\Big)\in\widetilde{E}_1 \tag{10}$$

в (1), (8) убеждаемся, что она является решением задачи (1), (8). Единственность решения в $E_{1,k}$ следует из того, что оператор $C(\varepsilon)$ обратим на $E_{1,k}$. Из (10) с помощью разложения по степеням $\lambda-\lambda_k$ функции $\exp(\varepsilon^{-h}\lambda t)$, соотношения $[A-B(\varepsilon)-\lambda C(\varepsilon)]^{-1}C(\varepsilon)v=F(\varepsilon,\lambda)HCv-\frac{\langle S_2(\varepsilon,\lambda)v,\varphi\rangle F(\varepsilon,\lambda)e}{R(\varepsilon,\lambda)}$, а также (3) и (7), следуют формулы (9).

Поскольку решение $\lambda_k(\varepsilon)$ уравнения $R(\varepsilon,\lambda)=0$ разлагается в ряд по степеням ε^{1/m_k}, где m_k — знаменатель несократимой дроби $\nu_k\in Q$, то из (10) находится разложение $x_k(t,\varepsilon)$ в ряд по степеням ε^{1/m_k}, если $h\in Z$. Ряд является сходящимся или асимптотическим в зависимости от поведения $B(\varepsilon)$ и $C(\varepsilon)$ при достаточно малых ε.

Определим порядок полюса в точке $\varepsilon=0$ функции

$$x_k(t,\varepsilon)=\frac{t^{q_k-1}}{\varepsilon^{h(q_k-1)}(q_k-1)!}\times$$
$$\times\frac{\langle C_0x^0,\varphi\rangle}{\varepsilon^r\lambda_k^{q_0}(\lambda_k-\lambda_1)^{q_1}\cdot\ldots\cdot(\lambda_k-\lambda_{k-1})^{q_{k-1}}(\lambda_k-\lambda_{k+1})^{q_{k+1}}\cdot\ldots\cdot(\lambda_k-\lambda_s)^{q_s}\psi(0,0)}\times$$
$$\times(1+o(\varepsilon^0))=\varepsilon^{-r_k}\Big[\frac{t^{q_k-1}\langle C_0x^0,\varphi\rangle}{(q_k-1)!a_k^{q_0+q_1+\cdots+q_{k-1}}a_{k+1}^{q_{k+1}}\cdot\ldots\cdot a_s^{q_s}\psi(0,0)}e+o(\varepsilon^0)\Big],$$

где

$$r_k=h(q_k-1)+r+\nu_k(q_0+q_1+\cdots+q_{k-1})+\nu_{k+1}q_{k+1}+\cdots+\nu_sq_s.$$

Заметим, что при $h>0$ выполняется свойство $x_k(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^0)$ $\forall x^0\in E_1$ в том и только том случае, если $r_k=0$, т.е. $q_k=1$, $r=q_0=\cdots=q_{k-1}=q_{k+1}=\cdots=q_s=0$, следовательно, оператор $A-B(\varepsilon)$ имеет лишь одно $C(\varepsilon)$-собственное значение $\lambda_k(\varepsilon)$ (нулевое или ненулевое, $k=0$ или 1) и оператор $A-B(\varepsilon)-\lambda_kC(\varepsilon)$ не имеет $C(\varepsilon)$-присоединенных элементов. Тогда

$$x_k(t,\varepsilon)=\frac{S_2(\varepsilon,\lambda_k)x^0}{S_2(\varepsilon,\lambda_k)u_1(\lambda_k)}u_1(\lambda_k)$$

и $x_k(t,\varepsilon)$ разлагается по целым степеням ε. При $\varepsilon\to0$ функция $x_k(t,\varepsilon)$ равномерно по $t\in[0,\infty)$ стремится к $\overline{x}(t)=\frac{\langle C_0x^0,\varphi\rangle}{\langle C_0e,\varphi\rangle}e$ — решению предельного уравнения $0=A\overline{x}(t)$.

Если же $h=0$, то $x_k(t,\varepsilon)=O(\varepsilon^0)$ $\forall x^0\in E_1$ тогда и только тогда, когда $r=q_0=\cdots=q_{k-1}=q_{k+1}=\cdots=q_s=0$. Тогда оператор $A-B(\varepsilon)$ имеет лишь одно $C(\varepsilon)$-собственное значение $\lambda(\varepsilon)$ кратности $q\geq1$, разлагаемое по целым степеням ε; $x(t,\varepsilon)$ разлагается в ряд по целым степеням

ε, $x(t,\varepsilon)$ стремится при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $t \in [0, \mathrm{T}]$ $\forall \mathrm{T} > 0$ к функции, решающей предельное уравнение $C_0 \frac{d\overline{x}}{dt} = A\overline{x}(t)$,

$$\overline{x}(t) = \sum_{j=1}^{q_k} \overline{x}_{kj} (HC_0)^{j-1} e,$$

$$\overline{x}_{kj} = [\langle C_0 (HC_0)^{q_k - 1} e, \varphi \rangle]^{-1} \left[\langle C_0 (HC_0)^{q_k - j} x^0, \varphi \rangle - \sum_{m=1}^{q_k - j} \overline{x}_{kj+m} \langle C_0 (HC_0)^{q_k + m - 1} e, \varphi \rangle \right].$$

В задаче (1), (8) наблюдается явление погранслоя тогда и только тогда, когда $\exists k$, $0 \le k \le s$, такое, что $\nu_k < h$ и $\operatorname{Re} a_k(t) < 0 \, \forall t \in [0, \infty)$. При $0 \le h \le 1$ эти условия выполняться одновременно не могут. Действительно, если $\lambda_{k_q}(\varepsilon) = o(\varepsilon^h)$, $0 < q \le m$, $m \in N$, то уравнение для определения a_{k_q}, как это следует из диаграммы Ньютона, имеет вид $(a_{k_q})^n + c = 0$, $n \in N$, $1 < n \le m$, $c \in C$, и, следовательно, $\operatorname{Re} a_{k_q}$ не могут быть меньше нуля для всех $0 < q \le m$. Поэтому при $0 \le h \le 1$ в задаче (1), (8) явления погранслоя быть не может.

Если $\lambda(\varepsilon) \in L_{-1}$, $\lambda(\varepsilon) = b\varepsilon^p + o(\varepsilon^p)$, $b \in C$, $p \le 0$, и оператор $A_b = A - bC_0$ является фредгольмовским с $\dim \ker A_b = \dim co\ker A_b = 1$, то задача Коши в соответствующем подпространстве решается (как и в $\widetilde{E}_1$) с заменой $x(t,\varepsilon) = \exp(\varepsilon^{-h-p} \lambda(\varepsilon) t) \widetilde{x}(t,\varepsilon)$.

Частный случай: $E_1 = E_2 = R^n$, A — жорданова клетка с нулевым собственным числом, $C(\varepsilon) = I_1$. Тогда $\langle \ , \ \rangle$ — скалярное произведение в R^n, $e = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\varphi = (0, \ldots, 0, 1)$. В этом случае $H = A^T$, $L_{-1} = \emptyset$, $\widetilde{E}_1 = R^n$. Действительно, $d_{k0} = \langle H^{k-1} e, \varphi \rangle = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$, $d_{n0} = \langle H^{n-1} e, \varphi \rangle = 1$, поэтому $R(\varepsilon, \lambda) = (\lambda^n + d_{n+10} \lambda^{n+1} + \cdots) + (\varepsilon d_{10} + \varepsilon \lambda d_{11} + \cdots) + \cdots$, и уравнение $R(\varepsilon, \lambda) = 0$ имеет ровно n корней $\lambda_k(\varepsilon)$, обладающих свойством $\lambda_k(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$. Решение уравнения (1) с начальным условием $x(0, \varepsilon) = x^0$ $\forall x^0 \in R^n$ имеет вид (9).

Литература

1. Вайнберг М.М., Треногин В.А. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений.* – М: Наука, 1969. – 527 с.

Воронежский государственный университет

Поступили
полный текст 23.02.1995
краткое сообщение 22.12.1999