ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 8 (531)

УДК 514.764

Т.В. ЗУДИНА, С.Е. СТЕПАНОВ

О КЛАССИФИКАЦИИ ЭКВИОБЪЕМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПСЕВДОРИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Введение

На основе теории представлений групп дана классификация эквиобъемных отображений псевдоримановых многообразий, анонсированная в [1]. Частично описана геометрия и найдены необходимые условия существования эквиобъемных отображений каждого класса, а также получен вид метрик многообразий, допускающих некоторые из таких отображений.

1. Эквиобъемные отображения псевдоримановых многообразий

1.1. Рассмотрим n-мерное псевдориманово C^∞-многообразие (M,g). Пусть (U,φ) — произвольная карта данного многообразия с локальной системой координат $x^1,\dots,x^n$, $\|g_{ij}\|$ — матрица компонент тензора g в локальной системе координат карты (U,φ), а $\det g = \det\|g_{ij}\|$ — ее определитель.

Римановым элементом объема ([2], с. 158; [3], с. 51) псевдориманова многообразия (M,g) называется плотность $dV = \sqrt{|\det g|}$, которая, как известно ([2], с. 159), связана формулой $\frac{\partial \ln\sqrt{|\det g|}}{\partial x^i} = \Gamma^k_{ik}$ с символами Кристоффеля Γ^k_{ij} связности Леви-Чивита ∇, найденными в локальной системе координат карты (U,φ) многообразия (M,g).

Введем другое n-мерное псевдориманово C^∞-многообразие $(\overline{M},\overline{g})$ и диффеоморфное отображение $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$. Тогда ([4], с. 67) для любой пары точек $x\in M$ и $\overline{x}=f(x)\in\overline{M}$ можно выбрать такие карты (U,φ) для $x\in U$ и $(\overline{U},\overline{\varphi})$ для $\overline{x}\in\overline{U}$, что диффеоморфизм f в этих картах можно локально задать уравнениями вида $\overline{x}^1 = x^1,\dots,\overline{x}^n = x^n$. В этом случае говорят ([5], с. 47), что многообразия (M,g) и $(\overline{M},\overline{g})$ отнесены к общей по отношению к данному отображению $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ системе локальных координат $x^1,\dots,x^n$.

Диффеоморфизм $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ называется *эквиобъемным отображением*, если $dV = f^*d\overline{V}$, где $f^*d\overline{V}$ — обратный образ плотности $d\overline{V}$ при отображении f. В общей по отношению к данному отображению $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ системе локальных координат $x^1,\dots,x^n$ условие эквиобъемности отображения примет вид $\sqrt{|\det g|}=\sqrt{|\det\overline{g}|}$. После дифференцирования левой и правой частей этого равенства получим

$$\Gamma^k_{ik} = \overline{\Gamma}^k_{ik}. \tag{1.1}$$

Поскольку разности $T^k_{ij} = \overline{\Gamma}^k_{ij} - \Gamma^k_{ij}$ символов Кристоффеля Γ^k_{ij} и $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ связностей Леви-Чивита ∇ и $\overline{\nabla}$ псевдоримановых многообразий (M,g) и $(\overline{M},\overline{g})$, найденных в общей по отображению f системе локальных координат $x^1,\dots,x^n$, являются компонентами тензора деформации $T=\overline{\nabla}-\nabla$ связности Леви-Чивита ∇ многообразия (M,g) при диффеоморфном отображении $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ ([5], с. 71; [6], с. 162), то равенство (1.1) можно записать в инвариантной форме $\operatorname{trace} T = 0$. Тем самым доказана

Лемма 1.1. *Для того чтобы диффеоморфное отображение f псевдориманова многообразия (M,g) со связностью Леви-Чивита ∇ на псевдориманово многообразие $(\overline{M},\overline{g})$ со связностью Леви-Чивита $\overline{\nabla}$ было эквиобъемным, необходимо, чтобы тензор деформации $T=\overline{\nabla}-\nabla$ связности Леви-Чивита ∇ многообразия (M,g) при отображении f на многообразие $(\overline{M},\overline{g})$ подчинялся условию* $\operatorname{trace} T=0$.

1.2. При наличии диффеоморфизма $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ на псевдоримановых многообразиях $(\overline{M},\overline{g})$ и (M,g) выполняются соответственно уравнения

$$(\overline{\nabla}_X g)(Y,Z)=-g(Y,T(Z,X))-g(Z,T(Y,X)), \tag{1.2}$$

$$(\nabla_X \overline{g})(Y,Z)=\overline{g}(Y,T(Z,X))+\overline{g}(Z,T(Y,X)), \tag{1.3}$$

из которых находятся значения тензора деформации $T=\overline{\nabla}-\nabla$,

$$g(Z,T(X,Y))=\frac{1}{2}\{-(\overline{\nabla}_X g)(Y,Z)-(\overline{\nabla}_Y g)(Z,X)+(\overline{\nabla}_Z g)(X,Y)\}, \tag{1.4}$$

$$\overline{g}(Z,T(X,Y))=\frac{1}{2}\{(\nabla_X \overline{g})(Y,Z)+(\nabla_Y \overline{g})(Z,X)-(\nabla_Z \overline{g})(X,Y)\} \tag{1.5}$$

на векторных полях $X=X^i\partial_i$, $Y=Y^i\partial_i$, $Z=Z^i\partial_i$, найденных в локальном базисе $\{\partial_i=\partial/\partial x^i\}_{i=1,\dots,n}$ векторных полей в общей по отображению f системе локальных координат $x^1,\dots,x^n$.

Уравнениям (1.1) на основании равенств (1.4) и (1.5) можно придать вид $\operatorname{trace}(g^{-1}\overline{\nabla}g)=0$ или же равносильный им вид $\operatorname{trace}(\overline{g}^{-1}\nabla\overline{g})=0$. Доказано

Следствие 1.1. Для того чтобы диффеоморфное отображение $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ было эквиобъемным, необходимо, чтобы выполнялось одно из двух равносильных дифференциальных уравнений $\operatorname{trace}(g^{-1}\overline{\nabla}g)=0$ или $\operatorname{trace}(\overline{g}^{-1}\nabla\overline{g})=0$.

2. Групповой подход к изучению эквиобъемных отображений

2.1. Рассмотрим эквиобъемное отображение $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ псевдориманова многообразия (M,g) со связностью Леви-Чивита ∇ на псевдориманово многообразие $(\overline{M},\overline{g})$ со связностью Леви-Чивита $\overline{\nabla}$. Заменим в дальнейших рассуждениях тензор деформации $T=\overline{\nabla}-\nabla$ тензорным полем $\widetilde{T}$, определяемым равенством $\widetilde{T}(X,Y,Z)=g(X,T(Y,Z))$ для всех $X,Y,Z\in C^\infty TM$. Тензорное поле $\widetilde{T}$ в силу леммы 1.1 удовлетворяет, кроме условия $\widetilde{T}(X,Y,Z)=\widetilde{T}(X,Z,Y)$, еще и дополнительному условию $\sum\limits_{i=1}^{n}\widetilde{T}(E_i,E_i,X)=0$, где $\{E_1,\dots,E_n\}$ — локальный ортонормированный базис векторных полей на многообразии (M,g).

Полагаем $E=T_xM$ для произвольной точки $x\in M$ и введем сопряженное ему пространство $E^*=T_x^*M$. Напомним, что S^kE означает k-ю симметрическую степень E^*. Тогда тензор $\widetilde{T}_x$ поля $\widetilde{T}$ будет элементом подпространства $\Im(E)$ тензорного пространства $E^*\otimes S^2E$ такого, что

$$\Im(E)=\{\tau\in E^*\otimes S^2E\mid \tau(a,b,c)=\tau(a,c,b),\ \tau_{12}(c)=0\}$$

для произвольных векторов a, b, c, и ортонормированного базиса $\{e_1,\dots,e_n\}$ псевдоевклидова векторного пространства E и $\tau_{12}(c)=\sum\limits_{i=1,\dots,n}\tau(e_i,e_i,c)=0$.

Тензорное пространство $E^*\otimes S^2E$ является пространством представления ортогональной группы $O(n,\mathbf{R})$. При этом его подпространство $\Im(E)$ допускает разложение в сумму $\Im(E)=\Im_1(E)\oplus\Im_2(E)\oplus\Im_3(E)$ трех неприводимых относительно действий группы $O(n,\mathbf{R})$ подпространств

$$\Im_1(E)=\{\tau\in\Im(E)\mid \tau(a,b,c)=\tau(b,a,c)\},$$
$$\Im_2(E)=\{\tau\in\Im(E)\mid \tau(a,b,c)+\tau(b,c,a)+\tau(c,a,b)=0\},$$
$$\Im_3(E)=\{\tau\in\Im(E)\mid \tau(a,b,c)=(n^2+n-2)^{-1}[(n+1)\tau_{23}(a)q(b,c)-\tau_{23}(b)q(a,c)-\tau_{23}(c)q(a,b)]\}$$

для $\tau_{23}(a) = \sum_{i=1,\dots,n} \tau(a, e_i, e_i) = 0$ и произвольных $a, b, c \in E$. Этот факт следует из теории инвариантов: достаточно проверить, что пространство $O(n, \mathbf{R})$-инвариантных квадратичных форм на $\Im(E)$ трехмерно ([7], § II.9 и § II.17; [8], доклад IX; [9]). Точнее, это пространство порождается формами

$$\Phi_1(\tau) = \sum_{i,j,k=1,\dots,n} [\tau(e_i, e_j, e_k)]^2, \quad \Phi_2(\tau) = \sum_{i,j,k=1,\dots,n} \tau(e_i, e_j, e_k)\tau(e_k, e_i, e_j),$$

$$\Phi_3(\tau) = \sum_{i=1,\dots,n} \left[\sum_{j=1,\dots,n} \tau(e_i, e_j, e_j) \right]^2.$$

Как результат имеем разложение тензора $\widetilde{T}_x$ на три части, принадлежащие неприводимым компонентам действия группы $O(n, \mathbf{R})$. Тогда поточечно неприводимому разложению тензорного поля $\widetilde{T}$ будет соответствовать "грубая" классификация эквиобъемных отображений, когда к одному классу относятся отображения, для которых $\widetilde{T}$ — сечение одного из инвариантных подрасслоений $\Im_1(TM)$, $\Im_2(TM)$, $\Im_3(TM)$ расслоения $\Im(TM)$ их прямых сумм. Пополним список классов еще одним, для которого $\widetilde{T}$ является сечением подрасслоения $\Im_1(TM) \cap \Im_2(TM) \cap \Im_3(TM)$, т. е. классом отображений, определяемым условием $T = 0$. Принимая во внимание канонический изоморфизм $g_x : T_x M \cong T_x^* M$, сформулируем

Предложение 2.1. *Инвариантным образом выделяются семь классов эквиобъемных отображений $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$, для каждого из которых тензор деформации $T = \overline{\nabla} - \nabla$ является сечением одного из инвариантных подрасслоений $\Im_1(TM)$, $\Im_2(TM)$, $\Im_3(TM)$, $\Im_1(TM) \cap \Im_2(TM) \cap \Im_3(TM)$ или их прямых сумм.*

3. Геометрия семи классов эквиобъемных отображений

3.1. Произвольное эквиобъемное отображение $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ класса $\Im_1 \oplus \Im_2$ характеризуется условием $\widetilde{T} \in \Im_1(TM) \oplus \Im_2(TM)$, которое имеет вид равенств $\sum_{i=1}^{n} \widetilde{T}(E_i, E_i, X) = 0$ и $\sum_{i=1}^{n} \widetilde{T}(X, E_i, E_i) = 0$. Второе из них означает, что диффеоморфизм $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ является гармоническим отображением [10].

Теорема 3.1. *Эквиобъемное отображение $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ класса $\Im_1 \oplus \Im_2$ является гармоническим отображением.*

3.2. Произвольное эквиобъемное отображение $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ класса $\Im_2 \otimes \Im_3$ характеризуется условием $\widetilde{T} \in \Im_2(TM) \oplus \Im_3(TM)$, которое имеет вид равенства

$$\widetilde{T}(X, Y, Z) + \widetilde{T}(Y, Z, X) + \widetilde{T}(Z, X, Y) = \frac{1}{n+2}\{\varpi(Z)g(X, Y) + \varpi(X)g(Y, Z) + \varpi(Y)g(Z, X)\}, \tag{3.1}$$

где $\varpi(X) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{T}(X, E_i, E_i)$. С учетом (1.4) равенству (3.1) можно придать равносильный вид

$$(\overline{\nabla}_Z g)(X, Y) + (\overline{\nabla}_X g)(Y, Z) + (\overline{\nabla}_Y g)(Z, X) = \omega(Z)g(X, Y) + \omega(X)g(Y, Z) + \omega(Y)g(Z, X) \tag{3.2}$$

для $\omega(X) = -\frac{2}{n-2}\varpi(X)$ и произвольных $X, Y, Z \in C^\infty TM$.

Ковариантное симметрическое тензорное поле 2-тензоров g на псевдоримановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$ назовем *конформно киллинговым*, если оно удовлетворяет уравнению (3.2).

В касательном пространстве $T_{\overline{x}}\overline{M}$ в произвольной точке $\overline{x} \in \overline{M}$ псевдориманова многообразия $(\overline{M}, \overline{g})$ зададим конус уравнением $g(X_{\overline{x}}, X_{\overline{x}}) = 0$ для $X_{\overline{x}} \in T_{\overline{x}}\overline{M}$. Тогда уравнения (3.2) будут необходимым и достаточным условием того [11], [12], что параллельный перенос в связности $\overline{\nabla}$ вдоль геодезической $\overline{\gamma} \subset \overline{M}$, проходящей через точку $\overline{x} \in \overline{M}$, переводит конус метрики g в конус метрики $\overline{g}$. Это свойство является характеристическим признаком *геодезического поля конусов* (см. там же).

Если же $\omega = \operatorname{grad} \overline{F}$ для некоторой $\overline{F} \in C^1\overline{M}$, то поле $\widetilde{g} = e^{-\overline{F}}g$ удовлетворяет уравнению $(\overline{\nabla}_Z\widetilde{g})(X,Y)+(\overline{\nabla}_X\widetilde{g})(Y,Z)+(\overline{\nabla}_Y\widetilde{g})(Z,X) = 0$, которое означает, что $\widetilde{g} = e^{-\overline{F}}g$ — *тензор Киллинга* на многообразии $(\overline{M},\overline{g})$ ([13], с. 339–340). Последний задает на многообразии $(\overline{M},\overline{g})$ первый квадратичный интеграл уравнений геодезических ([6], с. 157–161; [13], с. 339–340). Доказана

Теорема 3.2. *Пусть $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ — эквиобъемное отображение класса $\mathfrak{I}_2\oplus\mathfrak{I}_3$, тогда g будет для многообразия $(\overline{M},\overline{g})$ конформно киллинговым тензорным полем, задающим в его касательном расслоении геодезическое поле конусов. Если при этом $\operatorname{trace}_g(\overline{\nabla}-\nabla) = \operatorname{grad}\overline{F}$ для некоторой функции $\overline{F}\in C^1\overline{M}$, то $\widetilde{g} = e^{\frac{2}{n-2}\overline{F}}g$ будет тензором Киллинга, задающим на многообразии $(\overline{M},\overline{g})$ первый квадратичный интеграл уравнений геодезических.*

Для произвольной точки $\overline{x}\in\overline{M}$ обозначим через $D_\lambda(\overline{x})\in T_{\overline{x}}\overline{M}$ собственное подпространство соответствующего $g_{\overline{x}}$ линейного оператора $G_{\overline{x}}$ с собственным значением $\lambda(\overline{x})$.

Обозначим через $\overline{M}_g$ открытое всюду плотное подмножество в $\overline{M}$, состоящее из точек, в которых число различных собственных значений оператора G локально постоянно. Тогда на каждой связной компоненте множества $\overline{M}_g$ собственные значения оператора G определяют попарно различные гладкие собственные функции и каждая такая функция λ задает гладкое распределение $D_\lambda:\overline{x}\in\overline{M}_g\to D_{\lambda(\overline{x})}(\overline{x})\subset T_{\overline{x}}\overline{M}_g$.

Пусть λ, μ — две такие собственные функции, тогда для любых векторных полей $X,Y\in C^\infty D_\lambda$ и $W\in C^\infty D_\mu$ выполняется соотношение

$$(\overline{\nabla}_Y g)(X,W) = (\lambda-\mu)\overline{g}(\overline{\nabla}_Y X,W), \tag{3.3}$$

полученное из уравнения

$$(\overline{\nabla}_Y G)X + G\overline{\nabla}_Y X = Y(\lambda)X + \lambda\overline{\nabla}_Y X, \tag{3.4}$$

которое является дифференциальным следствием равенства $GX=\lambda X$.

С учетом (3.3) уравнение (3.2) представим в виде

$$(\lambda-\mu)\overline{g}(\overline{\nabla}_X Y + \overline{\nabla}_Y X, W) = \lambda\omega(W)\overline{g}(X,Y), \tag{3.5}$$

где $\overline{g}(\overline{\nabla}_X Y+\overline{\nabla}_Y X,W) = 2\overline{g}(Q_\lambda(X,Y),W)$ для второй фундаментальной формы Q_λ распределения D_λ ([14], с. 148; [15]). Равенство (3.5) означает, что распределение D_λ омбилическое ([14], с. 151; [15]). Положив в (3.2) $X=Y=Z$, получим

$$(\overline{\nabla}_X g)(X,X) = \omega(X)g(X,X) = \omega(X)\overline{g}(GX,X) = \lambda\omega(X)\overline{g}(X,X),$$

где согласно (3.4)

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_X g)(X,X) &= -g(\overline{\nabla}_X X,X) + X(\lambda)\overline{g}(X,X) + \lambda\overline{g}(\overline{\nabla}_X X,X) = \\ &= -\lambda\overline{g}(\overline{\nabla}_X X,X) + X(\lambda)\overline{g}(X,X) + \lambda\overline{g}(\overline{\nabla}_X X,X) = X(\lambda)\overline{g}(X,X).\end{aligned}$$

Следовательно, $[\lambda\omega(X)-X(\lambda)]\overline{g}(X,X)=0$. Поэтому, если распределение D_λ неизотропное, то будет справедливым равенство $X(\ln|\lambda|)=\omega(X)$ для всех $X\in C^\infty D_\lambda$. Доказана

Теорема 3.3. *Пусть $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ — эквиобъемное отображение класса $\mathfrak{I}_2\oplus\mathfrak{I}_3$ и λ — собственная функция тензора g на связной компоненте множества $\overline{M}_g\subset\overline{M}$. Тогда собственное распределение D_λ будет омбилическим, а в случае его неизотропности $2g(\operatorname{trace}_g(\overline{\nabla}-\nabla),X)+(n+2)X(\ln|\lambda|)=0$ для всех полей $X\in C^\infty D_\lambda$.*

В [16] была получена интегральная формула для компактного ориентированного риманова многообразия, несущего два ортогональных распределения дополнительной размерности. В частности, с ее помощью были найдены условия, препятствующие существованию на таком многообразии двух ортогональных омбилических распределений дополнительной размерности.

Применительно к нашему случаю доказанное в [16] утверждение может быть сформулировано как

Следствие 3.1. Пусть $(\overline{M}, \overline{g})$ — компактное ориентированное риманово многообразие неположительной секционной кривизны, обладающее, по меньшей мере, одной точкой, в которой секционная кривизна по всем двумерным направлениям строго отрицательная. Тогда не существует псевдориманова многообразия (M, g), допускающего эквиобъемное отображение $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ класса $\mathfrak{I}_2 \oplus \mathfrak{I}_3$ такое, что тензор g на многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$ имел бы только две различные собственные функции постоянных кратностей.

3.3. Произвольное эквиобъемное отображение $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ класса $\mathfrak{I}_1 \oplus \mathfrak{I}_3$ характеризуется условием $\widetilde{T} \in \mathfrak{I}_1(TM) \oplus \mathfrak{I}_3(TM)$, которое имеет вид равенства

$$\widetilde{T}(X, Y, Z) - \widetilde{T}(Y, X, Z) = \frac{1}{n-1}\{\varpi(X)g(Y, Z) - \varpi(Y)g(X, Z)\} \tag{3.6}$$

для $\varpi(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} \widetilde{T}(X, E_i, E_i)$ и произвольных $X, Y, Z \in C^\infty TM$. С учетом (1.4) равенству (3.6) можно придать равносильный вид

$$(\overline{\nabla}_X g)(Y, Z) - (\overline{\nabla}_Y g)(X, Z) = \omega(X)g(Y, Z) - \omega(Y)g(X, Z), \tag{3.7}$$

где в этом случае $\omega(X) = -\frac{2}{n-2}\varpi(X)$. Уравнение (3.8) носит название *обобщенного уравнения Кодацци* ([2], с. 176) и в соответствии с этим ковариантное симметрическое тензорное поле 2-тензоров g на псевдоримановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$ назовем *обобщенно кодацциевым*, если оно удовлетворяет уравнению (3.7).

Если $\omega = \operatorname{grad} \overline{F}$ для некоторой функции $\overline{F} \in C^1\overline{M}$, то поле $\widetilde{g} = e^{-\overline{F}}g$ удовлетворяет равенству $(\overline{\nabla}_X g)(Y, Z) - (\overline{\nabla}_Y g)(X, Z) = 0$, которое означает, что $\widetilde{g} = e^{-\overline{F}}g$ — *тензор Кодацци* для многообразия $(\overline{M}, \overline{g})$ (напр., [3], с. 589). Доказана

Теорема 3.4. *Пусть $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ — эквиобъемное отображение класса $\mathfrak{I}_1 \oplus \mathfrak{I}_3$, тогда g для многообразия $(\overline{M}, \overline{g})$ будет обобщенным тензором Кодацци. Если же при этом $\operatorname{trace}_g(\overline{\nabla} - \nabla) = \operatorname{grad} F$ для некоторой функции $\overline{F} \in C^1\overline{M}$, то $\widetilde{g} = e^{\frac{2}{n-2}F}g$ будет тензором Кодацци для многообразия $(\overline{M}, \overline{g})$.*

Обозначим, как и прежде, через $\overline{M}_g$ открытое всюду плотное подмножество в $\overline{M}$, состоящее из точек, в которых число различных собственных значений оператора G локально постоянно. Пусть λ, μ — две такие собственные функции, тогда для любых векторных полей $X, Y \in C^\infty D_\lambda$ и $W \in C^\infty D_\mu$ выполняются соотношения

$$(\overline{\nabla}_Y g)(X, W) = (\lambda - \mu)\overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, W), \quad (\overline{\nabla}_X g)(Y, W) = (\lambda - \mu)\overline{g}(\overline{\nabla}_Y X, W). \tag{3.8}$$

Вычитая почленно из первого равенства второе, получим

$$\begin{aligned} \overline{g}(F_\lambda(X, Y), W) &= \frac{1}{2(\lambda - \mu)}\{\omega(Y)\overline{g}(GX, W) - \omega(X)\overline{g}(GY, W)\} = \\ &= \frac{\lambda}{2(\lambda - \mu)}\{\omega(Y)\overline{g}(X, W) - \omega(X)\overline{g}(Y, W)\} = 0, \end{aligned}$$

где $\overline{g}(\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X, W) = 2\overline{g}(F_\lambda(X, Y), W)$ для тензора интегрируемости F_λ распределения D_λ ([14], с. 148; [15]). Последнее равенство означает, что распределение D_λ интегрируемое.

После замены в (3.4) поля Y на W равенство примет вид $(\overline{\nabla}_W G)X + G\overline{\nabla}_W X = W(\lambda)X + \lambda\overline{\nabla}_W X$ и тогда

$$(\overline{\nabla}_W g)(X, Y) = W(\lambda)\overline{g}(X, Y). \tag{3.9}$$

Вычитая почленно из второго равенства (3.8) равенство (3.9), получим

$$\overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, W) = \frac{1}{\lambda - \mu}\{W(\lambda) - \lambda\omega(W)\}\overline{g}(X, Y).$$

Это означает, что интегральные многообразия распределения D_λ вполне омбилические.

Как и для обобщенно киллингова тензора, здесь в случае неизотропного распределения D_λ имеет место равенство $\omega(X) = X(\ln|\lambda|)$. Справедлива

Теорема 3.5. *Пусть $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ — эквиобъемное отображение класса $\Im_1 \oplus \Im_3$ и λ — собственная функция тензора g на связной компоненте множества $\overline{M}_g \subset \overline{M}$. Тогда собственное распределение D_λ будет интегрируемым с вполне омбилическими интегральными многообразиями. Если распределение D_λ неизотропное, то $2g(\mathrm{trace}_g(\overline{\nabla} - \nabla), X) + (n-2)X(\ln|\lambda|) = 0$ для всех $X \in C^\infty D_\lambda$.*

Здесь можно сформулировать следствие, аналогичное следствию 3.1.

Следствие 3.2. Пусть $(\overline{M}, \overline{g})$ — компактное ориентированное риманово многообразие неположительной секционной кривизны, обладающее, по меньшей мере, одной точкой, в которой секционная кривизна по всем двумерным направлениям строго отрицательная. Тогда не существует псевдориманова многообразия (M, g), допускающего такое эквиобъемное отображение $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ класса $\Im_1 \oplus \Im_3$, что тензор g на многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$ имел бы только две различные собственные функции постоянных кратностей.

3.4. Произвольное эквиобъемное отображение $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ класса $\Im_1$ характеризуется условием $\widetilde{T} \in \Im_1(TM)$, которому можно придать вид $\widetilde{T} \in C^\infty S_0^3 M$, где через $S_0^3 M$ принято обозначать расслоение ковариантных бесследовых симметрических тензоров на (M, g). Отсюда, в частности, следует, что $\sum_{i=1}^{n} \widetilde{T}(E_i, E_i, X) = 0$ для локального ортонормированного базиса $\{E_1, \dots, E_n\}$ векторных полей на (M, g) и произвольного $X \in C^\infty TM$, а потому $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ является гармоническим отображением. Кроме того, из (1.3) непосредственно выводится, что g на многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$ является тензором Кодацци. Справедлива

Теорема 3.6. *Чтобы отображение $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ было эквиобъемным класса $\Im_1$, необходимо, чтобы f было гармоническим отображением и g – тензором Кодацци на многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$.*

В этом случае с успехом можно применять известные факты о геометрии римановых многообразий, несущих тензорные поля Кодацци ([3], с. 590–598), для описания геометрии эквиобъемных отображений класса $\Im_1$. Так, например, справедлива

Теорема 3.7. *Пусть $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ — эквиобъемное отображение класса $\Im_1$ риманова многообразия (M, g) на риманово многообразие $(\overline{M}, \overline{g})$ постоянной кривизны K, тогда тензор g имеет вид $g = \overline{\nabla}(dF) + \overline{K}F\overline{g}$, где функция F находится как решение уравнения Пуассона $\Delta F + \overline{K}(\mathrm{trace}_g\,\overline{g})F = n$ для лапласиана Ходжа–де Рама Δ многообразия (M, g).*

Доказательство. С одной стороны, для того чтобы диффеоморфизм $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ был гармоническим класса $\Im_1$, необходимо, чтобы g на многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$ был тензором Кодацци. С другой стороны ([3], с. 591), на римановом многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$ постоянной секционной кривизны $\overline{K}$ произвольный тензор Кодацци имеет вид

$$g = \overline{\nabla}(dF) + \overline{K}F\overline{g}, \tag{3.10}$$

где $F = F(x^1, \dots, x^n)$ — произвольная дифференцируемая функция в общей по отображению f системе локальных координат $x^1, \dots, x^n$. Перепишем равенство (3.10) в виде $g(X, Y) = [\nabla_X(dF)]Y - (dF)T(X, Y) + \overline{K}F\overline{g}(X, Y)$ и свернем его с контравариантными компонентами тензора g, воспользовавшись условием гармоничности отображения $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$. В результате придем к уравнению Пуассона $\Delta F + \overline{K}(\mathrm{trace}_g\,\overline{g})F = n$ для лапласиана Ходжа–де Рама Δ многообразия (M, g).

Отметим, что существуют ограничения на выбор функции F в случае компактного риманова многообразия (M, g). А именно, неравенства $F \leq n[\overline{K}(\mathrm{trace}_g\,\overline{g})]^{-1}$ и $F \geq n[\overline{K}(\mathrm{trace}_g\,\overline{g})]^{-1}$ равносильны требованиям $\Delta F \geq 0$ и $\Delta F \leq 0$ соответственно, каждое из которых в силу леммы Хопфа ([17], с. 308) на компактном римановом многообразии (M, g) приводит к равенству $F = \mathrm{const}$. Последнее будет означать изометричность отображения f.

3.5. Произвольное эквиобъемное отображение $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ класса $\mathfrak{I}_2$ характеризуется условием $\widetilde{T} \in \mathfrak{I}_2(TM)$, которое имеет вид равенств

$$\sum_{i=1}^{n} \widetilde{T}(E_i, E_i, X) = 0, \quad \widetilde{T}(X, Y, Z) + \widetilde{T}(Y, Z, X) + \widetilde{T}(Z, X, Y) = 0 \tag{3.11}$$

для локального ортонормированного базиса $\{E_1, \ldots, E_n\}$ векторных полей на (M, g) и произвольных $X, Y, Z \in C^\infty TM$. Из (3.11), в частности, следует $\sum\limits_{i=1}^{n} \widetilde{T}(X, E_i, E_i) = 0$, а потому $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ является гармоническим отображением. Кроме того, на основании (1.2) и (3.11) заключаем, что тензор g удовлетворяет уравнению

$$(\overline{\nabla}_Z g)(X, Y) + (\overline{\nabla}_X g)(Y, Z) + (\overline{\nabla}_Y g)(Z, X) = 0, \tag{3.12}$$

а потому является тензором Киллинга, задающим первый квадратичный интеграл уравнений геодезических на многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$. Таким образом, справедлива

Теорема 3.8. *Чтобы отображение $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ было эквиобъемным отображением класса $\mathfrak{I}_2$, необходимо, чтобы f было гармоническим и g — тензором Киллинга на многообразии $(\overline{M}, \overline{g})$, задающим первый квадратичный интеграл уравнений геодезических.*

Геометрия многообразий, допускающих первые квадратичные интегралы уравнений геодезических, подробно описана в литературе. Установленные факты можно применять для описания геометрии эквиобъемных отображений класса $\mathfrak{I}_1$. В качестве примера докажем два утверждения. Во-первых, сформулируем

Следствие 3.3. Если псевдориманово многообразие (M, g) допускает эквиобъемное отображение $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ класса $\mathfrak{I}_2$ на некоторое локально плоское псевдориманово многообразие $(\overline{M}, \overline{g})$, то его метрический тензор g в общей по отображению f системе координат $x^1, \ldots, x^n$ имеет компоненты

$$g_{ij} = A_{ijkl}x^k x^l + B_{ijk}x^k + C_{ij} \tag{3.13}$$

для симметричных по первым двум индексам постоянных A_{ijkl}, B_{ijk}, C_{ij} таких, что

$$A_{ijkl} + A_{jkil} + A_{kijl} = 0, \quad B_{ijk} + B_{jki} + B_{kij} = 0. \tag{3.14}$$

Для доказательства достаточно напомнить [18], что на локально плоском псевдоримановом многообразии (M, g) общее решение уравнений (3.12) имеет вид (3.13) для произвольных симметричных по первым двум индексам постоянных A_{ijkl}, B_{ijk}, C_{ij}, удовлетворяющих условиям (3.14).

Теорема 3.9. *Не существует m-мерного ($m \geq 3$) псевдориманова многообразия (M, g), допускающего эквиобъемное отображение класса $\mathfrak{I}_2$ на компактное ориентированное риманово многообразие $(\overline{M}, \overline{g})$ неположительной секционной кривизны, которое имеет, по меньшей мере, одну точку со строго отрицательной секционной кривизной по всем двумерным направлениям.*

Доказательство. Рассмотрим эквиобъемное отображение $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ класса $\mathfrak{I}_1$. В этом случае, как это было доказано выше, на $(\overline{M},\overline{g})$ существует первый квадратичный интеграл уравнений геодезических, задаваемый тензором g. Если многообразие $(\overline{M},\overline{g})$ удовлетворяет условию теоремы, то согласно [19] тензор g должен иметь вид $g=\lambda\overline{g}$ для $\lambda=\mathrm{const}$. Это совместимо с требованием эквиобъемности отображения только при $\lambda=1$. В этом случае отображение становится изометрией, а (M,g) — римановым многообразием.

3.6. Каждое эквиобъемное отображение $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ класса $\mathfrak{I}_3$ характеризуется условием $\widetilde{T}\in\mathfrak{I}_3(TM)$, которое в локальных координатах принимает вид

$$T_{kij}=\frac{1}{n^2+n-2}[(n+1)\varpi_k g_{ij}-\varpi_i g_{kj}-\varpi_j g_{ki}],$$

где $\varpi_k=g^{ij}T_{kij}$, или вид им равносильных равенств

$$T^k_{ij}=\frac{1}{n^2+n-2}[(n+1)\varpi^k g_{ij}-\varpi_i\delta^k_j-\varpi_j\delta^k_i] \tag{3.15}$$

для $\varpi^k=g^{kj}\varpi_j$.

Непосредственно проверяется, что в этом случае тензор g для риманова многообразия является конформно киллинговым и обобщенно кодаццевым одновременно. На этом основании можно продублировать любую из теорем 3.5 или 3.6.

Для того чтобы еще как-то охарактеризовать подобного вида эквиобъемное отображение, напомним некоторые понятия. Рассмотрим гладкую кривую $\gamma\subset M$ и обозначим через $\dot\gamma$ ее касательное векторное поле. Кривая $\gamma\subset M$ называется *субпланарной* [20], если для каждой точки $x\in\gamma$ ее касательный вектор $\dot\gamma_x$ при параллельном перенесении его вдоль кривой в точку кривой $x'=x+dx$ окажется в 2-мерном подпространстве из $T_{x'}M$, натянутом на $\dot\gamma_{x'}$ и некоторый вектор $\xi_{x'}$, т.е. $(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma)_{x'}=\lambda(x')\dot\gamma_{x'}+\mu(x')\xi_{x'}$ для гладких функций λ и μ, заданных в точках кривой $\gamma\subset M$. Субпланарные кривые обобщают геодезические, аналитически планарные и квазигеодезические кривые (напр., [21], [22]).

Диффеоморфное отображение $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ называют *субгеодезическим* [23], если любая субпланарная кривая из (M,g) при таком отображении перейдет в субпланарную кривую из $(\overline{M},\overline{g})$. Это возможно тогда и только тогда, когда в общей по отображению системе координат $x^1,\dots,x^n$ выполняются равенства [23]

$$\overline{\Gamma}^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}+\delta^k_i\varphi_j+\delta^k_j\varphi_i+\xi^k a_{ij} \tag{3.16}$$

для некоторого ковекторного поля φ с локальными компонентами φ_i и симметрического тензорного поля a с локальными компонентами a_{ij}. Сравнивая (3.15) и (3.16), заключаем, что эквиобъемное отображение класса $\mathfrak{I}_3$ является субгеодезическим отображением.

Более того, эквиобъемное отображение $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ класса $\mathfrak{I}_3$ переводит изотропные геодезические из (M,g) в геодезические из $(\overline{M},\overline{g})$, т.е. в общей по отображению системе координат из условий $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma=\lambda\dot\gamma$ и $g(\dot\gamma,\dot\gamma)=0$ с необходимостью следует $\overline{\nabla}_{\dot\gamma}\dot\gamma=\overline{\lambda}\dot\gamma$. Действительно, для произвольной изотропной геодезической $\gamma\subset M$ с учетом равенств (3.15) имеем $\overline{\nabla}_{\dot\gamma}\dot\gamma=(\lambda-\frac{2}{n^2+n-2}\varpi(\dot\gamma))\dot\gamma$.

Теорема 3.10. *Эквиобъемное класса $\mathfrak{I}_3$ отображение $f:(M,g)\to(\overline{M},\overline{g})$ является субгеодезическим отображением, переводящим изотропные геодезические многообразия (M,g) в геодезические многообразия $(\overline{M},\overline{g})$.*

В [23] для случая $\overline{\Gamma}^k_{ij}=\Gamma^k_{ij}+\delta^k_i\varphi_j+\delta^k_j\varphi_i+\xi^k g_{ij}$ указаны канонические виды, к которым можно привести метрические формы $ds^2=g_{ij}dx^i\otimes dx^j$ и $d\overline{s}^2=\overline{g}_{ij}dx^i\otimes dx^j$ римановых многообразий (M,g) и $(\overline{M},\overline{g})$ при условии, что среди корней уравнения $\det(\overline{g}_{ij}-r^2g_{ij})=0$ имеются различные. Так, в частности, если на открытом всюду плотном подмножестве $M_{\overline{g}}$ в M число различных собственных значений оператора $\overline{G}$ локально постоянно и равно n, то метрические формы многообразий (M, g) и $(\overline{M}, \overline{g})$ в общей по отношению к данному отображению $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ системе локальных координат $x^1, \dots, x^n$ приводятся к виду

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= e^{2\xi(x^1,\dots,x^n)}\{a_1(x^1)z'(x^1)(dx^1)^2 + \dots + a_n(x^n)z'(x^n)(dx^n)^2\},\\
d\overline{s}^2 &= (x^1 \dots x^n)^{-1}\{[a_1(x^1)z'(x^1)/(x^1)](dx^1)^2 + \dots + [a_n(x^n)z'(x^n)/(x^n)](dx^n)^2\},
\end{aligned}
$$

где $\xi_i = \partial_i \xi$, $(n+1)\varphi_i + \xi_i = 2^{-1}\partial_i(\ln(\det \overline{g}/\det g))$ и $z(x) = (x - x^1)\dots(x - x^n)$. В итоге будет справедливым

Следствие 3.4. Пусть $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ — эквиобъемное отображение класса $\mathfrak{I}_3$ риманова многообразия (M, g) на риманово многообразие $(\overline{M}, \overline{g})$ и тензор $\overline{g}$ на связной компоненте множества $M_{\overline{g}} \subset M$ обладает n различными собственными функциями. Тогда метрические формы $ds^2 = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$ и $d\overline{s}^2 = \overline{g}_{ij}dx^i \otimes dx^j$ данных многообразий в общей по отношению к отображению $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ системе локальных координат $x^1, \dots, x^n$ приводятся к виду

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= e^{2\varpi(x^1,\dots,x^n)}\{a_1(x^1)z'(x^1)(dx^1)^2 + \dots + a_n(x^n)z'(x^n)(dx^n)^2\},\\
d\overline{s}^2 &= (x^1 \dots x^n)^{-1}\{[a_1(x^1)z'(x^1)/(x^1)](dx^1)^2 + \dots + [a_n(x^n)z'(x^n)/(x^n)](dx^n)^2\}
\end{aligned}
$$

для $\partial_i \varpi = [2(n+2)]^{-1}\partial_i(\ln(\det \overline{g}/\det g))$ и $z(x) = (x - x^1)\dots(x - x^n)$.

3.7. Последний седьмой класс эквиобъемных отображений характеризуется условием $T = 0$, которое означает, что в общей по отображению $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ системе локальных координат $x^1, \dots, x^n$ в соответствующих точках равны символы Кристоффеля Γ^k_{ij} и $\overline{\Gamma}^k_{ij}$ связностей Леви-Чивита ∇ и $\overline{\nabla}$ многообразий (M, g) и $(\overline{M}, \overline{g})$ соответственно. Такое отображение носит название *аффинного* (напр., [5], сс. 47–48, 67). Из равенств (1.3) в случае аффинного отображения выводим $\nabla \overline{g} = 0$.

Предположим, что многообразие (M, g) риманово. Тогда из равенства $\nabla \overline{g} = 0$ на основании теоремы П.А. Широкова [24] делаем вывод, что многообразие (M, g) локально является римановым произведением многообразий $(M_1, g_1), \dots, (M_q, g_q)$, где q — число различных собственных значений тензора $\overline{g}$. Если же многообразие (M, g) не является локальным произведением римановых многообразий, то $\overline{g} = Cg$ для некоторой постоянной $C > 0$, что совместимо с требованием эквиобъемности отображения только для случая $C = 1$. Тогда $f : (M, g) \to (\overline{M}, \overline{g})$ — изометрия и $(\overline{M}, \overline{g})$ — риманово многообразие.

Литература

1. Stepanov S.E. *The seven classes of equiaffine mappings of pseudo-Riemannian manifolds* // Abstracts of 9th Internat. Conf. on Diff. Geom. and Appl., Prague, August 30 – September 3, 2004. – Czech Republic: Charles University in Prague, 2004. – P. 46–47.
2. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.
3. Бессе А. *Многообразия Эйнштейна.* – М.: Мир, 1990. – 703 с.
4. Нарасимхан Р. *Анализ на действительных и комплексных многообразиях.* – М.: Мир, 1971. – 232 с.
5. Синюков Н.С. *Геодезические отображения римановых пространств.* – М.: Наука, 1979. – 255 с.
6. Эйзенхарт Л.П. *Риманова геометрия.* – М.: Ин. лит., 1948. – 316 с.
7. Вейль Г. *Классические группы, их инварианты и представления.* – М.: Мир, 1947. – 347 с.
8. Бессе А. *Четырехмерная риманова геометрия.* – М.: Мир, 1985. – 334 с.
9. Степанов С.Е. *О групповом подходе к изучению уравнений Эйнштейна и Максвелла* // Теоретич. и матем. физ. – 1997. – Т. 111. – № 1. – С. 32–43.
10. Stepanov S.E., Shandra I.G. *Geometry of infinitesimal harmonic transformations* // Ann. Global Anal. and Geom. – 2003. – V. 24. – Issue 3. – P. 291–299.

11. Шапиро Я.Л. *Об одном классе римановых пространств* // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. – 1963. – Вып. XII. – С. 203–212.
12. Шапиро Я.Л. *О некоторых полях геодезических конусов* // ДАН СССР. – 1943. – Т. 39. – № 1. – С. 6–10.
13. Крамер Д., Штефани Х., Херльт Э., Мак-Каллум М. *Точные решения уравнений Эйнштейна.* – М.: Энергоиздат, 1982. – 416 с.
14. Reinhart B.L. *Differential geometry of foliations.* – Berlin–New York: Springer-Verlag, 1983. – 194 p.
15. Степанов С.Е. $O(n) \times O(m-n)$*-структуры на* m*-мерных многообразиях и субмерсии* // Алгебра и анализ. – 1995. – Т. 7. – № 6. – С. 188–204.
16. Степанов С.Е. *Интегральная формула для компактного многообразия с римановой структурой почти произведения* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 7. – С. 69–73.
17. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 2. – М.: Наука, 1981. – 414 с.
18. Nijenhuis A. *A note on first integrals of geodesies* // Proc. Nederl. Akad. Wet., Ser. A. – 1967. – V. 70. – № 2. – P. 141–145.
19. Степанов С.Е. *О применении одной теоремы П.А. Широкова в технике Бохнера* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 9. – С. 53–59.
20. Yano K. *Union curves and subpaths* // Math. J. – 1948. – V. 1. – P. 51–59.
21. Otsuki T., Tashiro Y. *On curves in Kahlerian space* // Math. J. Okayama Univ. – 1954. – V. 4. – P. 54–58.
22. Петров А.З. *Моделирование физических полей* // Гравитация и теория относительности. – Казань: Изд. Казанск. ун-та. – 1968. – № 4–5. – С. 7–21.
23. Nicolescu Liviu. *Les espaces de Riemann en representation subgeodesique* // Tensor, N. S. – 1978. – V. 32. – № 2. – P. 182–187.
24. Широков П.А. *Постоянные поля векторов и тензоров второго порядка в Riemann'овых пространствах* // Изв. физ.-матем. о-ва, Казань. – 1925. – Т. 25. – С. 86–114.

Владимирский государственный
педагогический университет

Поступила
19.03.2004