И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

1998 МАТЕМАТИКА № 6 (433)

УДК 517.929

В.В. ВИШНЕВСКИЙ

МНОГООБРАЗИЕ С ПАРОЙ КОММУТАТИВНЫХ ПОЛУКАСАТЕЛЬНЫХ СТРУКТУР

Пополнение дифференцируемого многообразия M его касательными пучками приводит к касательному многообразию TM, обладающему нильпотентной регулярной интегрируемой аффинорной структурой. Подобно тому, если на M задана субмерсия $\pi : M \to B$, и база B пополнена ее касательными пучками, то на M возникает полукасательная структура, аффинор которой имеет нерегулярное строение. В данной работе изучаются локальные свойства пары коммутативных полукасательных структур, приводящей к их тензорному произведению. Все рассматриваемые функции и отображения предполагаются достаточно гладкими.

1. Многообразие с парой коммутативных субмерсий

Пусть M — гладкое вещественное многообразие ($\dim M = \rho + r + H$), на котором заданы две субмерсии $\pi_1 : M \to B_1$ и $\pi_2 : M \to B_2$, удовлетворяющие условию $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1$, характеризуемому коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\pi_1} & B_1 \\ {\scriptstyle\pi_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi_2} \\ B_2 & \xrightarrow{\pi_1} & B = B_1 \bigcap B_2. \end{array} \tag{1.1}$$

Введем на $U \subset M$ локальные координаты, адаптированные к субмерсиям π_1 и π_2. Пусть $(x^1, \dots, x^\rho)$ — локальные координаты слоя $\pi_1^{-1}(y)$, $y \in B_1$ и аналогично $(x^{\rho+1}, \dots, x^{\rho+r})$ — локальные координаты слоя $\pi_2^{-1}(z)$, $z \in B_2$. Вместе с набором локальных координат на B $(x^{\rho+r+1}, \dots, x^{\rho+r+H})$ получаем локальные координаты точки $x \in U : (x^\sigma, x^i, x^A)$. Здесь и в дальнейшем $\sigma, \tau, \dots = 1, 2, \dots, \rho$; $i, j, \dots = \rho+1, \rho+2, \dots, \rho+r$; $A, B, \dots = \rho+r+1, \rho+r+2, \dots, \rho+r+H$. Очевидно, что для пересекающихся окрестностей U и U' преобразование адаптированных к субмерсиям (1.1) локальных координат будет иметь вид

$$x^\sigma = x^\sigma(x'^\tau, x'^B), \quad x^i = x^i(x'^j, x'^B), \quad x^A = x^A(x'^B) \tag{1.2}$$

с якобиевой матрицей

$$J = \begin{pmatrix} A^\sigma_\tau & 0 & A^\sigma_B \\ 0 & A^i_j & A^i_B \\ 0 & 0 & A^A_B \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

где $A^t_s = (\partial x^t / \partial x'^s)$, а 0 означает нулевой блок. Условие $\det J \neq 0$ означает в силу (1.3), что

$$\det A^\sigma_\tau \neq 0, \quad \det A^i_j \neq 0, \quad \det A^A_B \neq 0. \tag{1.4}$$

В дальнейшем адаптированные к субмерсиям (1.1) локальные координаты будем рассматривать как предпочитаемые, а преобразования их (1.2) — как допустимые. Очевидно, что они образуют группу G.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 97-01-00347.

2. Проектируемые объекты на M

Векторное поле на M называется проектируемым [1] относительно расслоения, определяемого субмерсией π, если проекция векторов поля вдоль слоев на базу B зависит только от точки базы. Говорят также, что поле v и его проекция v' на базу B π-связаны ([2], с. 19). В нашем случае, если не оговорено противное, под термином "проектируемое векторное поле" будем подразумевать такое поле, которое проектируемо относительно обеих субмерсий (1.1). Это имеет место тогда и только тогда, когда его адаптированные координаты имеют вид

$$v^\sigma = v^\sigma(x^\tau, x^B), \quad v^i = v^i(x^j, x^B), \quad v^A = v^A(x^B). \tag{2.1}$$

Отметим свойства таких векторных полей.

1. Проектируемые векторные поля образуют векторное пространство над R.

2. Объект, образованный частными производными от координат векторного поля (2.1) по допустимым координатам, имеет матрицу вида (1.3).

3. Коммутатор пары проектируемых векторных полей проектируем ([2], с. 19).

Пусть T — $(1,k)$-тензорное поле на M $(k \geq 1)$. Будем называть его проектируемым, если $T(\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \dots, \underset{k}{v})$ — проектируемое векторное поле при любых проектируемых векторных полях $\underset{1}{v}, \underset{2}{v}, \dots, \underset{k}{v}$. Поскольку определение не опирается на закон преобразования координат тензора, то его можно отнести и ко всякому дифференциально-геометрическому объекту (напр., к связности), т. к. по существу речь идет лишь о соответствующих свойствах пространственной матрицы такого объекта. Если

$$u^Q = T^Q_{S_1, S_2, \dots, S_k} \underset{1}{v}^{S_1} \underset{2}{v}^{S_2} \dots \underset{k}{v}^{S_k} \tag{2.2}$$

— координатная запись векторнозначной полилинейной функции T, где $Q, S_1, \dots, S_k = 1, 2, \dots, N$; $N = \rho + r + H$, то проектируемость поля T по определению и с учетом (2.1) будет означать, что допустимые локальные координаты поля T удовлетворяют следующим необходимым и достаточным условиям.

1. Если верхний индекс Q принадлежит первой серии $(Q = \sigma)$, то все компоненты с хотя бы одним нижним индексом второй серии $(S_\alpha = i)$ равны нулю, а все ненулевые компоненты зависят лишь от координат первой и третьей серий.

2. Аналогично при $Q = i$ все компоненты с хотя бы одним нижним индексом первой серии равны нулю, а все ненулевые компоненты зависят лишь от координат второй и третьей серий.

3. При $Q = A$ все компоненты, у которых хотя бы один нижний индекс принадлежит первой или второй серии, равны нулю, а все компоненты с нижними индексами третьей серии зависят лишь от координат той же третьей серии.

Примерами проектируемых объектов служат следующие.

1. Матрица (1.3), очевидно, определяет проектируемый объект.

2. Объект, образованный частными производными поля (2.1) по допустимым координатам, проектируем, т. к. образует матрицу вида (1.3).

3. Назовем линейную связность ∇ проектируемой [1], если поле $\nabla_v u$ проектируемо при любых проектируемых векторных полях u и v. Поскольку

$$(\nabla_v u)^Q = v^S \partial_S u^Q + \Gamma^Q_{ST} v^S u^T, \tag{2.3}$$

то для того чтобы ∇ была проектируемой связностью, необходимо и достаточно, чтобы объект связности Γ^Q_{ST} был проектируем.

4. Тензор кривизны проектируемой связности проектируем, что очевидно из его известного выражения ([2], с. 131)

$$R(u,v)w = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u,v]} w. \tag{2.4}$$

5. Тензор кручения проектируемой связности проектируем, что также легко следует из известной формулы ([2], с. 131)

$$S(u,v) = \nabla_u v - \nabla_v u - [u,v]. \tag{2.5}$$

3. Полукасательные расслоения, порождаемые парой коммутативных субмерсий

Следуя общему принципу получения полукасательных структур [3], рассмотрим на базе B_2 линию $x^i = x^i(t_2)$, $x^A = x^A(t_2)$, при $t_2 = 0$ определяющую точку $x \in B_2$. Тогда величины $x^{\overline{i}} = \frac{dx^i}{dt_2}\Big|_{t_2=0}$, $x^{\overline{A}} = \frac{dx^A}{dt_2}\Big|_{t_2=0}$ определят координаты касательного вектора к B_2 в точке x. Аналогично для B_1 с помощью уравнений линии $x^\sigma = x^\sigma(t_1)$, $x^A = x^A(t_1)$ получим вектор касательного к B_1 пучка с координатами $x^{\widetilde{\sigma}} = \frac{dx^\sigma}{dt_1}\Big|_{t_1=0}$, $x^{\widetilde{A}} = \frac{dx^A}{dt_1}\Big|_{t_1=0}$. Наконец, для $B = B_1 \bigcap B_2$ с помощью продолжений в двух направлениях найдем $x^{\widetilde{\overline{A}}} = x^{\overline{\widetilde{A}}} = \frac{d}{dt_1}\left(\frac{dx^A}{dt_2}\right)\Big|_{\substack{t_1=0\\ t_2=0}}$.

Образуем для окрестности U точки $x \in M$ с координатами (x^σ, x^i, x^A) новую область $\widetilde{\overline{U}}$, определяемую набором переменных

$$(x^\sigma, x^{\widetilde{\sigma}}, x^i, x^{\overline{i}}, x^A, x^{\widetilde{A}}, x^{\overline{A}}, x^{\widetilde{\overline{A}}}), \tag{3.1}$$

а для окрестности $U' \subset M$ аналогичным путем определим индуцированные там переменные (3.1), отмеченные символом $'$, область значений которых обозначим символом $\widetilde{\overline{U}}'$. Если $U \bigcap U' \neq \emptyset$, то очевидно, что $\widetilde{\overline{U}} \bigcap \widetilde{\overline{U}}' \neq \emptyset$. Покажем, что переменные вида (3.1), индуцированные в $\widetilde{\overline{U}}$ и $\widetilde{\overline{U}}'$, преобразуются друг в друга на $\widetilde{\overline{U}} \bigcap \widetilde{\overline{U}}'$ дифференцируемым образом с отличным от нуля якобианом, откуда будет непосредственно следовать, что многообразие $\widetilde{\overline{M}}$, полученное указанным пополнением M касательными к B_1 и B_2 пучками, является дифференцируемым и достаточно гладким.

Для доказательства вычислим дифференциалы каждой серии переменных (3.1). С помощью (1.2) будем иметь

$$dx^\sigma = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\tau} dx'^\tau + \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^B} dx'^B, \tag{3.2}$$

так что в верхней полосе искомой якобиевой матрицы $\widetilde{\overline{J}}$ преобразования переменных (3.1) содержатся только два, вообще говоря, ненулевых блока A^σ_τ и A^σ_B, а остальные блоки нулевые. Далее с учетом (3.2) получим

$$dx^{\widetilde{\sigma}} = d\left(\frac{dx^\sigma}{dt_2}\right)\Big|_{t_1=0} = \frac{\partial x^{\widetilde{\sigma}}}{\partial x'^\tau} dx'^\tau + \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\tau} dx'^{\widetilde{\tau}} + \frac{\partial x^{\widetilde{\sigma}}}{\partial x'^B} dx'^B + \frac{\partial x^\sigma}{dx'^B} dx'^{\widetilde{B}}, \tag{3.3}$$

поэтому во второй полосе матрицы $\widetilde{\overline{J}}$ оказываются нулевыми все блоки, кроме $A^{\widetilde{\sigma}}_\tau$, $A^{\widetilde{\sigma}}_{\widetilde{\tau}} = A^\sigma_\tau$, $A^{\widetilde{\sigma}}_B$, $A^{\widetilde{\sigma}}_{\widetilde{B}} = A^\sigma_B$. Продолжая выкладки, аналогичные (3.2) и (3.3), для дифференциалов остальных шести серий переменных (3.1) приходим к следующий матрице Якоби

$$\widetilde{\overline{J}} = \begin{pmatrix} A^\sigma_\tau & 0 & 0 & 0 & A^\sigma_B & 0 & 0 & 0 \\ A^{\widetilde{\sigma}}_\tau & A^\sigma_\tau & 0 & 0 & A^{\widetilde{\sigma}}_B & A^\sigma_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^i_j & 0 & A^i_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^{\overline{i}}_j & A^i_j & A^{\overline{i}}_B & 0 & A^i_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A^A_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A^{\widetilde{A}}_B & A^A_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A^{\overline{A}}_B & 0 & A^A_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A^{\widetilde{\overline{A}}}_B & A^{\overline{A}}_B & A^{\widetilde{A}}_B & A^A_B \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

где $A^{\widetilde{\sigma}}_\tau = A^\sigma_{\tau\nu} x'^{\widetilde{\nu}} + A^\sigma_{\tau B} x'^{\widetilde{B}}$, $A^{\widetilde{\sigma}}_B = A^\sigma_{B\tau} x'^{\widetilde{\tau}} + A^\sigma_{BC} x'^{\widetilde{C}}$, $A^{\overline{i}}_j = A^i_{jk} x'^{\overline{k}} + A^i_{jB} x'^{\overline{B}}$, $A^{\overline{i}}_B = A^i_{Bj} x'^{\overline{j}} + A^i_{BC} x'^{\overline{C}}$, $A^{\widetilde{A}}_B = A^A_{BC} x'^{\widetilde{C}}$, $A^{\overline{A}}_B = A^A_{BC} x'^{\overline{C}}$, $A^{\widetilde{\overline{A}}}_B = A^A_{BCD} x'^{\widetilde{C}} x'^{\overline{D}} + A^A_{BC} x^{\widetilde{\overline{C}}}$, $A^P_{QR} = \frac{\partial^2 x^P}{\partial x'^Q \partial x'^R}$, $A^P_{QRS} = \frac{\partial^3 x^P}{\partial x'^Q \partial x'^R \partial x'^S}$.

Непосредственно очевидно, что $\det \widetilde{\overline{J}} = (\det A^{\sigma}_{\tau})^2 (\det A^{i}_{j})^2 (\det A^{A}_{B})^4 \neq 0$ в силу (1.4), поэтому многообразие $\widetilde{\overline{M}}$ переменных (3.1) действительно является дифференцируемым. Преобразования индуцированных на $\widetilde{\overline{M}}$ локальных координат (3.1) образуют группу $\widetilde{\overline{G}}$, которую следует рассматривать как продолжение в $\widetilde{\overline{M}}$ группы G. Ясно, что $\dim \widetilde{\overline{M}} = 2\rho + 2r + 4H$.

Введем на $\widetilde{\overline{M}}$ матрицы двух $(1,1)$-тензоров (аффиноров)

$$\widetilde{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E_\rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_H & 0 \end{pmatrix}, \qquad \overline{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_H & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_H & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (3.5)$$

где E_s — единичный блок порядка s, а разбиение матриц на блоки аналогично (3.4). Эти аффиноры обладают следующими свойствами.

1. Каждая из матриц (3.5) коммутирует с (3.4): $\widetilde{\overline{J}}\widetilde{\gamma} = \widetilde{\gamma}\widetilde{\overline{J}}$, $\widetilde{\overline{J}}\overline{\gamma} = \overline{\gamma}\widetilde{\overline{J}}$, поэтому преобразования (3.4) сохраняют постоянные матрицы (3.5). Таким образом, $\widetilde{\gamma}$ и $\overline{\gamma}$ задают на $\widetilde{\overline{M}}$ две совместно интегрируемые аффинорные структуры, а индуцированные на $\widetilde{\overline{M}}$ локальные координаты (3.1) играют роль канонических.

2. Очевидно, что $\widetilde{\gamma}^2 = \overline{\gamma}^2 = 0$, т.е. обе структуры являются полукасательными первого порядка и отвечают двум алгебрам дуальных чисел $R(\varepsilon) = \{a + \varepsilon b \mid a, b \in R,\ \varepsilon^2 = 0\}$.

3. Матрицы (3.5) коммутируют: $\widetilde{\gamma}\overline{\gamma} = \overline{\gamma}\widetilde{\gamma}$, поэтому на $\widetilde{\overline{M}}$ определяется структура тензорного произведения двух полукасательных структур, отвечающая тензорному произведению $R(\varepsilon) \otimes R(\varepsilon)$. Отметим, что тензорные произведения аффинорных структур изучены в [4].

4. Структуры $\widetilde{\gamma}$ и $\overline{\gamma}$, вообще говоря, нерегулярны, но в частном случае, когда слои над B_1 и B_2 относительно субмерсий π_1 и π_2 нульмерны, получаем, что M представляет собой дважды взятое многообразие B, и $\widetilde{\overline{M}}$ в этом случае является касательным расслоением от касательного расслоения $\widetilde{\overline{M}} = T(TM)$, в котором структура будет регулярной как для обоих аффиноров, так и для их тензорного произведения. Другой частный случай, где $\widetilde{\gamma}\overline{\gamma} = \overline{\gamma}\widetilde{\gamma} = 0$, разбирается в [5].

Таким образом, если на M определены две коммутативные субмерсии, то порождаемые ими полукасательные структуры образуют их тензорное произведение.

4. Продолжения проектируемых объектов в $\widetilde{\overline{M}}$

Тот факт, что $\widetilde{\overline{M}}$ является продолжением M, а его группа $\widetilde{\overline{G}}$ служит тем же для G, обусловливает возможность продолжений из M в $\widetilde{\overline{M}}$ полей дифференциально-геометрических объектов. Эти продолжения будем, как обычно, называть лифтами. В отличие от касательного расслоения TM, как впервые показано в [6], на полукасательном расслоении такие лифты допускают не все объекты, а только лишь проектируемые. Понятно, что это сохраняется и для нашего случая тензорного произведения пары полукасательных структур.

Чтобы построить лифт проектируемого векторного поля v, воспользуемся его координатами

(2.1), с помощью которых определим

$$
\begin{aligned}
&v^{\widetilde{\sigma}} = \frac{dv^\sigma}{dt_1}\bigg|_{t_1=0} = \frac{\partial v^\sigma}{\partial x^\tau} x^{\widetilde{\tau}} + \frac{\partial v^\sigma}{\partial x^B} x^{\widetilde{B}}, \quad v^{\widetilde{A}} = \frac{dv^A}{dt_1}\bigg|_{t_1=0} = \frac{\partial v^A}{\partial x^B} x^{\widetilde{B}},\\
&v^{\overline{i}} = \frac{dv^i}{dt_2}\bigg|_{t_2=0} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} x^{\overline{j}} + \frac{\partial v^i}{\partial x^B} x^{\overline{B}}, \quad v^{\overline{A}} = \frac{dv^A}{dt_2}\bigg|_{t_2=0} = \frac{\partial v^A}{\partial x^B} x^{\overline{B}},\\
&v^{\widetilde{\overline{A}}} = \frac{d^2 v^A}{dt_1 dt_2}\bigg|_{\substack{t_1=0\\ t_2=0}} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^B \partial x^C} x^{\overline{B}} x^{\widetilde{C}} + \frac{\partial v^A}{\partial x^B} x^{\widetilde{\overline{B}}} = v^{\overline{\widetilde{A}}}.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Образуем из компонент (2.1) и (4.1) следующую совокупность величин, которую назовем полным лифтом поля v в $\widetilde{\widetilde{M}}$:

$$
{}^C v = (v^\sigma, v^{\widetilde{\sigma}}, v^i, v^{\overline{i}}, v^A, v^{\widetilde{A}}, v^{\overline{A}}, v^{\widetilde{\overline{A}}}). \tag{4.2}
$$

Отметим его свойства.

1. Если из v', удовлетворяющего условиям $v = Jv'$, аналогичным образом с помощью (4.1) и (4.2) построить ${}^C v'$, то нетрудно проверить, что ${}^C v = \widetilde{\overline{J}}\, {}^C v'$, и, следовательно, полный лифт (4.2) является векторным полем на $\widetilde{\widetilde{M}}$, класс гладкости которого лишь на две единицы ниже, чем у поля (2.1).

2. Матрица, образованная частными производными поля (4.2) по координатам (3.1), имеет блочное строение, аналогичное (3.4), и поэтому коммутирует с матрицами (3.5). Такие матрицы принято называть чистыми относительно структурных аффиноров $\widetilde{\gamma}$ и $\overline{\gamma}$ ([7], с. 67).

3. Векторное поле w на M, вдоль которого производные Ли от аффиноров (3.5) удовлетворяют условиям

$$
L_w \widetilde{\gamma} = 0, \quad L_w \overline{\gamma} = 0, \tag{4.3}
$$

называется голоморфным. Поскольку $(L_w \gamma)^Q_S = w^T \partial_T \gamma^Q_S + \gamma^Q_T \partial_S w^T - \gamma^T_S \partial_T w^Q$, то в силу постоянства матриц (3.5) $\partial_T \widetilde{\gamma}^Q_S = \partial_T \overline{\gamma}^Q_S = 0$, и мы получаем, что условия голоморфности поля w (4.3) равносильны чистоте матрицы $(\partial_S w^T)$ относительно аффиноров (3.5). Таким образом, в силу свойства 2 полный лифт (4.2) является голоморфным векторным полем на $\widetilde{\widetilde{M}}$.

4. Для всякой пары проектируемых векторных полей u, v на M

$$
{}^C[u, v] = [{}^C u, {}^C v]. \tag{4.4}
$$

Действительно, рассматривая дифференцируемое отображение $\varphi : \widetilde{\widetilde{M}} \to M$, переводящее точку $\widetilde{\widetilde{x}}$ окрестности $\widetilde{\widetilde{U}} \subset \widetilde{\widetilde{M}}$ с локальными координатами (3.1) в точку x окрестности $U \subset M$ с координатами (x^σ, x^i, x^A), получаем, что поля ${}^C u$ и u (соответственно ${}^C v$ и v) φ-связаны ([2], с. 19), откуда следует (4.4).

Пусть теперь для проектируемых полей u, v на M имеет место $v = Fu$, где F — проектируемый аффинор, имеющий, следовательно, матрицу вида (1.3), не обязательно невырожденную. Тогда с помощью матрицы F можно построить матрицу вида (3.4), которая в $\widetilde{\widetilde{M}}$ определит аффинор ${}^C F$, называемый полным лифтом F. Будем иметь

$$
{}^C v = {}^C F\, {}^C u. \tag{4.5}
$$

Если $v = F(\underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{u})$ — векторно-значная проектируемая линейная функция от проектируемых векторных полей $\underset{1}{u}, \ldots, \underset{k}{u}$, то применяя индукцию по k с учетом (4.5), для лифтов этих полей в $\widetilde{\widetilde{M}}$ будем иметь

$$
{}^C v = {}^C F({}^C \underset{1}{u}, \ldots, {}^C \underset{k}{u}). \tag{4.6}
$$

Векторно-значная функция ${}^C F$ в (4.6) определяет полный лифт функции F. Поскольку здесь не используется тензорный характер преобразований, а речь идет лишь о соответствующей пространственной матрице, то все сказанное в полной мере относится к дифференциально-геометрическим объектам на M и их лифтам в $\widetilde{\overline{M}}$. Очевидно,

1. компоненты ${}^C F$ обладают свойством чистоты относительно аффиноров (3.5);
2. ${}^C F \equiv 0$ равносильно $F \equiv 0$.

5. Лифт проектируемой связности

Проектируемая линейная связность ∇ на M допускает полный лифт ${}^C\nabla$ в $\widetilde{\overline{M}}$, который определяется следующим образом: если u, v — произвольные проектируемые векторные поля на M, то

$$ {}^C(\nabla_v u) = {}^C\nabla_{{}^C v}{}^C u. \tag{5.1}$$

Укажем свойства связности ${}^C\nabla$.

1. В допустимых координатах из (2.3) следует $\Gamma^Q_{ST} v^S u^T = (\nabla_v u)^Q - v^S \partial_S u^Q$, поэтому, переходя в этом равенстве к полным лифтам, получим, что связность полного лифта имеет своим объектом полный лифт объекта исходной проектируемой связности на M (отсюда, в частности, следует существование связности ${}^C\nabla$).

2. Связность ${}^C\nabla$ голоморфна ([7], сс. 109, 187) относительно аффинорных структур (3.5), поскольку в (5.1) ${}^C u$, ${}^C v$, ${}^C(\nabla_v u)$ — голоморфные векторные поля.

3. Связность полного лифта сохраняет структуру, определяемую аффинорами (3.5). Действительно, в выражении ${}^C\nabla_Q \gamma^S_T = \partial_Q \gamma^S_T + {}^C\Gamma^S_{QR}\gamma^R_T - {}^C\Gamma^R_{QT}\gamma^S_R$ первый член правой части исчезает ввиду постоянства координат аффинорных полей (3.5), а два другие члена взаимно уничтожаются в силу чистоты объекта связности полного лифта, и, следовательно,

$$ {}^C\nabla\widetilde{\gamma} = {}^C\nabla\overline{\gamma} = 0. \tag{5.2}$$

Поэтому в связности ${}^C\nabla$ являются абсолютно параллельными распределения $\operatorname{Ker}\widetilde{\gamma}$, $\operatorname{Ker}\overline{\gamma}$, $\operatorname{Im}\widetilde{\gamma}$, $\operatorname{Im}\overline{\gamma}$.

4. Полный лифт тензора кривизны проектируемой связности ∇ совпадает с тензором кривизны связности ${}^C\nabla$. Для доказательства в (2.4) перейдем к полным лифтам и будем иметь

$$ {}^C(R(u,v)w) = {}^C\nabla_{{}^C u}{}^C\nabla_{{}^C v}{}^C w - {}^C\nabla_{{}^C v}{}^C\nabla_{{}^C u}{}^C w - {}^C\nabla_{[{}^C u, {}^C v]}{}^C w = {}^C R({}^C u, {}^C v)\,{}^C w. \tag{5.3}$$

В частности, из (5.3) следует, что связность ${}^C\nabla$ будет плоской тогда и только тогда, когда ∇ — плоская связность.

5. Полный лифт тензора кручения проектируемой связности ∇ является тензором кручения связности ${}^C\nabla$. Именно, из (2.5) находим

$$ {}^C(S(u,v)) = {}^C\nabla_{{}^C u}{}^C v - {}^C\nabla_{{}^C v}{}^C u - [{}^C u, {}^C v] = {}^C S({}^C u, {}^C v). \tag{5.4}$$

Согласно (5.4) связность ${}^C\nabla$ не имеет кручения тогда и только тогда, когда это имеет место для связности ∇.

Из условия (5.1) можно выразить все ненулевые компоненты связности ${}^C\nabla$ через компоненты связности ∇, однако ввиду их большого количества (512) ограничимся рассмотрением соответствующих форм этих связностей. В силу проектируемости связности ∇ ее форма связности ω имеет матрицу вида (1.3). Тогда ${}^C\omega$ будет формой связности ${}^C\nabla$ на $\widetilde{\overline{M}}$, и ее матрица будет иметь вид (3.4), поэтому

$$\begin{aligned}
&{}^C\omega^\sigma_\tau = {}^C\omega^{\widetilde\sigma}_{\widetilde\tau} = \omega^\sigma_\tau, \quad {}^C\omega^\sigma_B = {}^C\omega^{\widetilde\sigma}_{\widetilde B} = \omega^\sigma_B, \quad {}^C\omega^{\widetilde\sigma}_\tau = \partial_\nu\omega^\sigma_\tau x^{\widetilde\nu} + \partial_B\omega^\sigma_\tau x^{\widetilde B},\\
&{}^C\omega^{\widetilde\sigma}_B = \partial_\nu\omega^\sigma_B x^{\widetilde\nu} + \partial_A\omega^\sigma_B x^{\widetilde A}, \quad {}^C\omega^i_j = {}^C\omega^{\overline i}_{\overline j} = \omega^i_j, \quad {}^C\omega^i_B = {}^C\omega^{\overline i}_{\overline B} = \omega^i_B,\\
&{}^C\omega^{\overline i}_j = \partial_k\omega^i_j x^{\overline k} + \partial_B\omega^i_j x^{\overline B}, \quad {}^C\omega^{\overline i}_B = \partial_k\omega^i_B x^{\overline k} + \partial_A\omega^i_B x^{\overline A},\\
&{}^C\omega^A_B = {}^C\omega^{\widetilde A}_{\widetilde B} = {}^C\omega^{\overline A}_{\overline B} = {}^C\omega^{\widetilde{\overline A}}_{\widetilde{\overline B}} = \omega^A_B, \quad {}^C\omega^{\widetilde A}_B = {}^C\omega^{\widetilde{\overline A}}_{\overline B} = \partial_C\omega^A_B x^{\widetilde C},\\
&{}^C\omega^{\overline A}_B = {}^C\omega^{\widetilde{\overline A}}_{\widetilde B} = \partial_C\omega^A_B x^{\overline C}, \quad {}^C\omega^{\widetilde{\overline A}}_B = \partial_C\partial_D\omega^A_B x^{\widetilde C}x^{\overline D} + \partial_D\omega^A_B x^{\widetilde{\overline D}}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

В этих соотношениях задействованы все ненулевые формы связности ∇, а все формы связности ${}^C\nabla$, не определенные в (5.5), полагаем равными нулю, поскольку при преобразовании (3.4) индуцированных на $\widetilde{\overline{M}}$ локальных координат (3.1) эти формы преобразуются однородно, и обращение их в нуль инвариантно. Например, для ${}^C\omega^{i'}_{\tau'}$ будем иметь ${}^C\omega^{i'}_{\tau'} = {}^C\omega^P_Q A^{i'}_P A^Q_{\tau'} - A^P_{\tau'} dA^{i'}_P$, откуда с учетом (3.4) и (5.5) получаем

$${}^C\omega^{i'}_{\tau'} = {}^C\omega^j_\sigma A^{i'}_j A^\sigma_{\tau'} + {}^C\omega^B_\sigma A^{i'}_B A^\sigma_{\tau'} + {}^C\omega^j_{\widetilde\sigma} A^{i'}_j A^{\widetilde\sigma}_{\tau'} + {}^C\omega^B_{\widetilde\sigma} A^{i'}_B A^{\widetilde\sigma}_{\tau'} = 0,$$

т. к. ${}^C\omega^j_\sigma = {}^C\omega^B_\sigma = {}^C\omega^j_{\widetilde\sigma} = {}^C\omega^B_{\widetilde\sigma} = 0$, ибо эти величины не содержатся в числе определяемых в (5.5) ненулевых, вообще говоря, форм связности ${}^C\nabla$. Аналогичные выкладки показывают, что и все остальные компоненты форм ${}^C\omega^P_Q$, не входящие в (5.5), после допустимого преобразования (3.4) остаются нулевыми.

Таким образом, проектируемая связность ∇ на M и связность ${}^C\nabla$ на $\widetilde{\overline{M}}$ взаимнооднозначно определяют друг друга.

6. Вертикальные и горизонтальные лифты

Имея полный лифт (4.2) поля v из M в $\widetilde{\overline{M}}$, можно определить с помощью аффинорных полей (3.5) также и вертикальные лифты в $\widetilde{\overline{M}}$

$${}^{\widetilde V}v = \widetilde\gamma\,{}^C v, \quad {}^{\overline V}v = \overline\gamma\,{}^C v, \quad {}^{\widetilde{\overline V}}v = \widetilde\gamma\overline\gamma\,{}^C v. \tag{6.1}$$

В силу (5.1), (5.2) и (6.1)

$${}^C\nabla_{{}^C v}{}^{\widetilde V}u = {}^C\nabla_{{}^{\widetilde V}v}{}^C u = {}^{\widetilde V}(\nabla_v u), \quad {}^C\nabla_{{}^C v}{}^{\overline V}u = {}^C\nabla_{{}^{\overline V}v}{}^C u = {}^{\overline V}(\nabla_v u), \quad {}^C\nabla_{{}^C v}{}^{\widetilde{\overline V}}u = {}^C\nabla_{{}^{\widetilde{\overline V}}v}{}^C u = {}^{\widetilde{\overline V}}(\nabla_v u).$$

В координатах (3.1) будем иметь

$${}^{\widetilde V}v = (0, v^\sigma, 0, 0, 0, v^A, 0, v^{\overline A}), \quad {}^{\overline V}v = (0, 0, 0, v^i, 0, 0, v^A, v^{\widetilde A}), \quad {}^{\widetilde{\overline V}}v = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, v^A). \tag{6.2}$$

Поскольку ${}^C v$ и ${}^V v$ определены инвариантно, то инвариантно определяются и горизонтальные лифты трех типов, удовлетворяющие условиям

$${}^C v = {}^{\widetilde V}v + {}^{\widetilde H}v = {}^{\overline V}v + {}^{\overline H}v = {}^{\widetilde{\overline V}}v + {}^{\widetilde{\overline H}}v, \tag{6.3}$$

из которых в координатах (3.1) получим

$$\begin{aligned}
&{}^{\widetilde H}v = (v^\alpha, v^{\widetilde\alpha} - v^\alpha, v^i, v^{\overline i}, v^A, v^{\widetilde A} - v^A, v^{\overline A}, v^{\widetilde{\overline A}} - v^{\overline A}),\\
&{}^{\overline H}v = (v^\alpha, v^{\widetilde\alpha}, v^i, v^{\overline i} - v^i, v^A, v^{\widetilde A}, v^{\overline A} - v^A, v^{\widetilde{\overline A}} - v^{\widetilde A}),\\
&{}^{\widetilde{\overline H}}v = (v^\alpha, v^{\widetilde\alpha}, v^i, v^{\overline i}, v^A, v^{\widetilde A}, v^{\overline A}, v^{\widetilde{\overline A}} - v^A).
\end{aligned} \tag{6.4}$$

В этих соотношениях остается вычислить разности $v^{\widetilde{\alpha}} - v^{\alpha}$, $v^{\widetilde{A}} - v^{A}$, $v^{\bar{i}} - v^{i}$ и т. д., что можно сделать с помощью следующих соображений.

Рассмотрим лифт $\overset{\widetilde{V}}{}v$, который в силу $\widetilde{\gamma}^2 = 0$ и (6.1) удовлетворяет условию $\widetilde{\gamma}\,\overset{\widetilde{V}}{}v = 0$, а следовательно, и $\widetilde{\gamma}\frac{\delta \overset{\widetilde{V}}{}v}{dt_1} = 0$, поэтому $\frac{\delta \overset{\widetilde{V}}{}v}{dt_1} = \lambda\,\overset{\widetilde{V}}{}v$. Преобразуя параметр t_1, можно достичь $\lambda = 1$, и последнее соотношение будет иметь вид $\frac{d\overset{\widetilde{V}}{}v}{dt_1} + \frac{\omega}{dt_1} = \overset{\widetilde{V}}{}v$. Используя (6.2), с учетом (5.5) при $t_1 = 0$

$$\begin{aligned} &v^{\widetilde{\alpha}} - v^{\alpha} = -\Gamma^{\alpha}_{\beta\sigma} x^{\widetilde{\beta}} v^{\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{B\sigma} x^{\widetilde{B}} v^{\sigma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta A} x^{\widetilde{\beta}} v^{A} - \Gamma^{\alpha}_{BA} x^{\widetilde{B}} v^{A}, \\ &v^{\widetilde{A}} - v^{A} = -\Gamma^{A}_{BC} x^{\widetilde{B}} v^{C}, \quad v^{\widetilde{\overline{A}}} - v^{\overline{A}} = -{}^{C}\Gamma^{\overline{A}}_{BC} x^{\widetilde{B}} v^{C}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Аналогично преобразуются два другие лифта (6.4), для которых будем иметь

$$\begin{aligned} &v^{\bar{i}} - v^{i} = -\Gamma^{i}_{jk} x^{\bar{j}} v^{k} - \Gamma^{i}_{Bk} x^{\overline{B}} v^{k} - \Gamma^{i}_{jA} x^{\bar{j}} v^{A} - \Gamma^{i}_{BA} x^{\overline{B}} v^{A}, \\ &v^{\overline{A}} - v^{A} = -\Gamma^{A}_{BC} x^{\overline{B}} v^{C}, \quad v^{\overline{\widetilde{A}}} - v^{\widetilde{A}} = -{}^{C}\Gamma^{\widetilde{A}}_{BC} x^{\overline{B}} v^{C}, \\ &v^{\widetilde{\overline{A}}} - v^{A} = -\Gamma^{A}_{BC} x^{\widetilde{\overline{B}}} v^{C}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Соотношениями (6.4), (6.5) и (6.6) горизонтальные лифты вполне определены и хорошо согласуются с результатами [6], а непосредственная проверка их инвариантности при преобразовании с матрицей (3.4) дает положительный результат, что, впрочем, легко вытекает и из (6.3) и (6.1).

Что касается направления возможных приложений, то рассмотренный выше случай пары коммутативных полукасательных структур первого порядка может служить хорошим примером в теории расслоений струй [8], а также источником обобщений на случай коммутативных пар структур более высоких порядков.

Литература

1. Шапуков Б.Н. *Связности на дифференцируемых расслоениях* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1983. – Т. 15. – С. 61–93.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 1. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
3. Вишневский В.В. *Многообразия над плюральными числами и полукасательные структуры* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1988. – Т. 20. – С. 35–74.
4. Мазанова Г.А. *Пространства над тензорными произведениями алгебр*: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1979. – 126 с.
5. Вишневский В.В. *Полукасательные расслоения и локальные алгебры* // В сб. "Памяти Лобачевского посвящается". – Казань, 1992. – Вып. 2. – С. 3–8.
6. Кирсанова Т.В. *Обобщенно-касательные структуры на многообразиях*: Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1984. – 118 с.
7. Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В. *Пространства над алгебрами.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1985. – 262 с.
8. Шурыгин В.В. *Расслоения струй как многообразия над алгебрами* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1987. – Т. 19. – С. 3–22.

Казанский государственный университет

Поступила 19.02.1997