ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 9 (424)

УДК 514.755

Т.Б. ЖОГОВА

ПРОЕКТИВНОЕ ИЗГИБАНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА СЕМЕЙСТВ L^m_{2n-1}

Условимся, что по индексам i, j суммирования нет, а по индексам p, q, r всегда проводится суммирование. Все различные индексы, по которым не проводится суммирование, находящиеся в одном и том же математическом выражении, не принимают равные значения. Все индексы, как правило, принимают значения от 1 до n включительно.

Будем рассматривать классическое изгибание Фубини-Картана ([1], с. 102) погруженного многообразия L^m_{2n-1} в проективное пространство P_{2n-1}.

Изгибание первого порядка семейств L^m_{2n-1} исследовано автором в работе [2]. При $n = 3$, $m = 2$ задача проективного изгибания 2-го порядка рассмотрена автором в работе [3].

В P_{2n-1} введем проективный репер, состоящий из $2n$ линейно независимых аналитических точек A_i, A_{n+j}, инфинитезимальные перемещения которого определим системой дифференциальных уравнений

$$dA_i = \omega_i^p A_p + \omega_i^{n+p} A_{n+p}, \quad dA_{n+i} = \omega_{n+i}^p A_p + \omega_{n+i}^{n+p} A_{n+p},$$

в которой формы Пфаффа удовлетворяют известным уравнениям структуры проективного пространства.

Пусть $(n-1)$-плоскость

$$L_{n-1} = (A_1, \dots, A_n)$$

описывает семейство L^m_{2n-1}. Отнесем семейство L^m_{2n-1} к реперу 1-го порядка: точки A_i поместим в фокусы $(n-1)$-плоскости L_{n-1}, фокальное направление фокуса A_i определим уравнением $\omega_i^{n+i} = 0$ и точку A_{n+i} поместим на прямую Лапласа фокуса A_i. Тогда семейство L^m_{2n-1} определится системой уравнений Пфаффа

$$\omega_i^{n+j} = 0. \tag{1}$$

Внешним дифференцированием уравнений (1) находим

$$\omega_i^j \wedge \omega_j - \omega_{n+i}^{n+j} \wedge \omega_i = 0, \tag{2}$$

где $\omega_i = \omega_i^{n+i}$. За независимые формы семейства L^m_{2n-1} принимаются формы ω_α ($\alpha = \overline{1,m}$, $2 \le m \le n$).

Рассмотрим семейство $\overline{L}^m_{2n-1}$, которое изгибанием k-го порядка наложимо на семейство L^m_{2n-1}. Отнесем семейство $\overline{L}^m_{2n-1}$ к проективному реперу $\{B_i, B_{n+j}\}$, инфинитезимальные перемещения которого определим системой дифференциальных уравнений

$$dB_i = \Omega_i^p B_p + \Omega_i^{n+p} B_{n+p}, \quad dB_{n+i} = \Omega_{n+i}^p B_p + \Omega_{n+i}^{n+p} B_{n+p}.$$

Из работы [2] следует, что без ограничения общности семейство $\overline{L}^m_{2n-1}$ так же, как и семейство L^m_{2n-1}, можно отнести к реперу 1-го порядка. Тогда будут иметь место уравнения

$$\Omega_i^{n+j} = 0. \tag{3}$$

Рассмотрим проективное преобразование Π, переводящее репер $\{B_i, B_{n+j}\}$ в $\{\widetilde{B}_i, \widetilde{B}_{n+j}\}$, совпадающий с $\{A_i, A_{n+j}\}$, так что $\widetilde{B}_i = A_i$, $\widetilde{B}_{n+j} = A_{n+j}$.

Условие касания семейств

$$\widetilde{L}_{2n-1}^m = \Pi(\overline{L}_{2n-1}^m) \quad \text{и} \quad L_{2n-1}^m$$

2-го порядка определяется уравнением

$$(\widetilde{B}_1, \ldots, \widetilde{B}_n) + d(\widetilde{B}_1, \ldots, \widetilde{B}_n) + \frac{1}{2} d^2(\widetilde{B}_1, \ldots, \widetilde{B}_n) =$$
$$= (\theta_0 + \theta_1 + \theta_2)\{(A_1, \ldots, A_n) + d(A_1, \ldots, A_n) + \frac{1}{2} d^2(A_1, \ldots, A_n)\}, \quad (4)$$

где θ_k — некоторые скалярные множители, и индекс k указывает на порядок малости такого множителя относительно независимых форм ω_α.

Введем обозначения

$$\Omega_i^{n+i} = \Omega_i, \quad \tilde{\omega}_\gamma^\delta = \Omega_\gamma^\delta - \omega_\gamma^\delta \quad (\delta, \gamma = \overline{1, 2n}).$$

Условие (4) в силу уравнений (1), (3) приводит к следующей системе уравнений:

$$\theta_0 = 1, \quad \theta_1 = \tilde{\omega}_r^r, \quad \theta_2 = d\tilde{\omega}_r^r + \tilde{\omega}_r^r \tilde{\omega}_p^p + \omega_q \tilde{\omega}_{n+q}^q,$$
$$\tilde{\omega}_i^j \omega_j - \tilde{\omega}_{n+i}^{n+j} \omega_i = 0, \quad (5)$$
$$\tilde{\omega}_i = 0, \quad \tilde{\omega}_i^i - \tilde{\omega}_{n+i}^{n+i} = 0. \quad (6)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (3), получим

$$\tilde{\omega}_i^j \wedge \omega_j - \tilde{\omega}_{n+i}^{n+j} \wedge \omega_i = 0. \quad (7)$$

Из уравнений (5) и (7) следует

$$\tilde{\omega}_i^j = 0, \quad \tilde{\omega}_{n+i}^{n+j} = 0. \quad (8)$$

Внешним дифференцированием уравнений (6), (8) находим

$$\tilde{\omega}_{n+i}^i \wedge \omega_i = 0, \quad (9)$$

$$\left.\begin{aligned} (\tilde{\omega}_i^i - \tilde{\omega}_j^j) \wedge \omega_i^j - \tilde{\omega}_{n+i}^j \wedge \omega_i = 0, \\ (\tilde{\omega}_i^i - \tilde{\omega}_j^j) \wedge \omega_{n+i}^{n+j} + \tilde{\omega}_{n+i}^j \wedge \omega_j = 0. \end{aligned}\right. \quad (10)$$

Замкнутая система уравнений (1), (2), (6), (8), (9), (10) определяет семейство L_{2n-1}^m вместе со своим изгибанием 2-го порядка. Исследование этой системы показывает, что при $m = 2$ она находится в инволюции с характерами $s_1 = 3n^2 - 2n$, $s_2 = 2n - 3$, т. е. справедлива

Теорема 1. *Семейство L_{2n-1}^2, допускающее проективное изгибание 2-го порядка, существует с произволом $2n - 3$ функций двух аргументов.*

Если же $m = n$, то рассматриваемая замкнутая система не находится в инволюции, и ее необходимо продолжать. Сделаем частичное продолжение этой системы.

Раскрывая по лемме Картана уравнения (2), получим

$$\omega_i^j = a_i^j \omega_j + c_i^j \omega_i, \quad \omega_{n+i}^{n+j} = b_i^j \omega_i - c_i^j \omega_j. \quad (11)$$

Из системы (10) в силу (11) следует, что форма $\tilde{\omega}_i^i - \tilde{\omega}_1^1$ разлагается только по формам ω_i и ω_1:

$$\tilde{\omega}_i^i - \tilde{\omega}_1^1 = a_i \omega_i + b_i \omega_1.$$

Отсюда находим

$$\tilde{\omega}_j^j - \tilde{\omega}_1^1 = a_j \omega_j + b_j \omega_1$$

и, следовательно,

$$\tilde{\omega}_i^i - \tilde{\omega}_j^j = a_i \omega_i - a_j \omega_j + (b_i - b_j)\omega_1.$$

Отсюда вытекает, что $b_i = b_j = a_1$, т. е.

$$\tilde{\omega}_i^i - \tilde{\omega}_1^1 = a_i\omega_i + a_1\omega_1. \tag{12}$$

Продифференцировав внешним образом эти уравнения, получим

$$\Delta a_i \wedge \omega_i + \Delta a_1 \wedge \omega_1 = 0,$$

где

$$\Delta a_j = da_j + a_j(\omega_j^j - \omega_{n+j}^{n+j}).$$

Наиболее общее алгебраическое решение этой системы квадратичных уравнений имеет вид

$$\Delta a_j = p_j\omega_j$$

и, следовательно,

$$\Delta a_j \wedge \omega_j = 0. \tag{13}$$

Заметим, что сделанное частичное продолжение рассматриваемой системы (при помощи уравнений (12)) в силу теоремы 2.2 [4] является корректным.

Система уравнений (10) с учетом (12) принимает вид

$$\begin{aligned} \omega_i^j \wedge (a_i\omega_i - a_j\omega_j) + \tilde{\omega}_{n+i}^j \wedge \omega_i = 0, \\ \omega_{n+i}^{n+j} \wedge (a_i\omega_i - a_j\omega_j) - \tilde{\omega}_{n+i}^j \wedge \omega_j = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Замкнутая система уравнений (1), (3), (6), (8), (12); (2), (9), (13), (14) определяет семейство L_{2n-1}^n вместе со своим изгибанием 2-го порядка. Эта система содержит $q = n(3n-1)$ искомых форм

$$\omega_i^j, \quad \omega_{n+i}^{n+j}, \quad \tilde{\omega}_{n+i}^j, \quad \tilde{\omega}_{n+i}^i, \quad \Delta a_j.$$

Матрица полного продолжения этой системы является m-блочной [5]. Не равные нулю характеры уравнений (9) и (13) при фиксированных i и j соответственно равны

$$s_1^i = 1, \quad s_1^j = 1 \quad \text{и} \quad N_i = N_j = 1.$$

Таких блоков $2n$. Остальные блоки матрицы полного продолжения соответствуют системе ковариантов (2), (14) для каждой пары фиксированных индексов i и j. Таких блоков $n(n-1)$.

Положим

$$\tilde{\omega}_{n+i}^j = p_i^j\omega_i + q_i^j\omega_j.$$

В силу (11) система уравнений (2), (14) приводит к конечным соотношениям

$$p_i^j = a_i c_i^j - a_j b_i^j, \quad q_i^j = -a_i a_i^j - a_j c_i^j,$$

т. е. $N_{ij} = 3$: a_i^j, b_i^j, c_i^j. Ранг полярной системы уравнений (2), (14) равен $s_1^{ij} = 3$, если

$$\omega_i\omega_j(a_i\omega_i - a_j\omega_j) \neq 0, \quad \text{т. е.} \quad N_{ij} = Q_{ij}.$$

Таким образом, исследуемая система уравнений находится в инволюции с характером

$$s_1 = ns_1^i + ns_1^j + n(n-1)s_1^{ij} = 2n + 3n(n-1) = 3n^2 - n,$$

т. е. справедлива

Теорема 2. *Семейство L_{2n-1}^n, допускающее проективное изгибание 2-го порядка, существует с произволом $3n^2 - n$ функций одного аргумента.*

Теперь следует остановиться на статье Л. М.Шепеленко [6], в которой автор рассматривает проективное изгибание семейств плоскостей Коровина-Гейдельмана, т. е. семейств L^n_{2n-1}. При исследовании системы, определяющей изгибание 2-го порядка, автором допущена ошибка при определении произвола наиболее общего интегрального элемента. В статье утверждается, что

$$N = 3p^2 - 2, \quad s_1 = 3p^2 - 2p, \quad s_2 = p - 1,$$

в то время как $N = 3p^2 - 2p$, т. е. система не в инволюции и, следовательно, теорема, сформулированная в статье ([6], с. 35), не справедлива.

Наконец, рассмотрим семейство L^m_{2n-1}, для которого $m \neq 2, n$. В этом случае формы ω_β $(\beta = \overline{m+1, n})$ будут являться искомыми и, следовательно,

$$\omega_\beta = \Lambda^\alpha_\beta \omega_\alpha \quad (\alpha = \overline{1, m}). \tag{15}$$

Продифференцировав внешним образом эти уравнения, получим

$$\Delta\Lambda^\alpha_\beta \wedge \omega_\alpha = 0, \tag{16}$$

где

$$\Delta\Lambda^\alpha_\beta = d\Lambda^\alpha_\beta + \Lambda^\alpha_\beta(\omega^\alpha_\alpha - \omega^\beta_\beta - \omega^{n+\alpha}_{n+\alpha} + \omega^{n+\beta}_{n+\beta}) \quad \text{(не суммировать).}$$

Замкнутая система уравнений (1), (2), (15), (16) определяет семейство L^m_{2n-1}. Присоединяя к замкнутой системе уравнений (1), (3), (6), (8), (12); (2), (9), (13), (14), (система 1), определяющей семейство L^n_{2n-1} вместе со своим изгибанием 2-го порядка, систему (15), (16), получим замкнутую систему уравнений, которая определяет семейство L^m_{2n-1} вместе со своим изгибанием 2-го порядка.

Присоединяемая система уравнений (15), (16) не нарушает инволютивности системы 1, а замкнутая система уравнений (15), (16) находится в инволюции с характерами $s_1 = \dots = s_m = n - m$, т. е. справедлива

Теорема 3. *При $m \neq 2, n$ существуют с произволом $n - m$ функций m аргументов семейства L^m_{2n-1}, допускающие проективное изгибание 2-го порядка.*

В заключение отметим, что проективное изгибание 3-го порядка семейств L^m_{2n-1} будет тривиальным, т. е. семейства L^m_{2n-1} и $\overline{L}^m_{2n-1}$ являются проективно эквивалентными.

Литература

1. Фиников С.П. *Теория пар конгруэнций.* – М.: Гостехиздат, 1956. – 443 с.
2. Жогова Т.Б. *О проективном изгибании семейств L^m_{2n-1}* // Учредит. конф. Российск. ассоц. “Женщины-математики”: Тез. докл. – Москва–Суздаль, 1993. – С. 20.
3. Жогова Т.Б. *К вопросу о проективном изгибании двупараметрических семейств двумерных плоскостей в P^5.* – Ред. журн. “ Изв. вузов. Математика”. – Казань, 1979. – 16 с. – Деп. в ВИНИТИ 23.07.79, № 2761–79.
4. Макеев Г.Н. *К вопросу об инволютивности систем уравнений Пфаффа* // Изв. вузов. Математика. – 1980. – № 1. – С. 39–44.
5. Макеев Г.Н. *О некоторых признаках инволютивности систем уравнений Пфаффа* // Изв. вузов. Математика. – 1982. – № 9. – С. 81–83.
6. Шепеленко Л.М. *Проективное изгибание расслояемых семейств плоскостей Коровина-Гейдельмана* // Геометрич. сб. – Томск, 1967. – Вып. 6. – С. 32–35.

Нижегородский государственный педагогический университет

Поступила
06.02.1995