ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 3 (526)

УДК 517.929

В.В. ВЛАСОВ, С.А. ИВАНОВ

ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

Несмотря на значительное число работ, посвященных изучению функционально-дифференциальных уравнений, получение оценок их решений по-прежнему остается актуальной задачей (напр., [1]–[7], а также указанную там библиографию).

В данной работе установлены неулучшаемые оценки сильных решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа. Отметим, что полученный результат существенно опирается на предшествующие результаты авторов, посвященные изучению традиционной начальной задачи для однородного уравнения (см. [8]–[10]). В свою очередь, при получении оценок решений однородного уравнения существенно используется базисность Рисса системы экспоненциальных решений упомянутых уравнений (подробнее см. [8]–[14]).

Рассмотрим начальную задачу для дифференциально-разностного уравнения вида

$$Du \equiv \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{kj}u^{(j)}(t-h_k) + \sum_{j=0}^{m}\int_0^h B_j(s)u^{(j)}(t-s)ds = f(t), \quad t>0, \tag{1}$$

с начальным условием

$$u(t) = g(t), \quad t\in[-h,0]. \tag{2}$$

Здесь $0=h_0<h_1<\dots<h_n=h$, a_{kj} — комплексные коэффициенты, функции $B_j(s)$ принадлежат пространству $L_2(0,h)$, функция $f(t)\in L_2(0,T)$ для любого $T>0$.

Обозначим через $H^m(a,b)$ $(-\infty<a<b\le+\infty)$ пространство Соболева $W_2^m(a,b)$. Будем предполагать, что $g(t)\in H^m(-h,0)$.

Определение. Под решением задачи (1), (2) понимаем такую функцию u, что для любого $T>0$ она принадлежит пространству $H^m(-h,T)$, удовлетворяет уравнению (1) в $L^2(0,T)$ и начальному условию (2) в пространстве $H^m(-h,0)$.

Введем характеристическую функцию уравнения (1)

$$L(\lambda) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{kj}\lambda^j e^{-\lambda h_k} + \sum_{j=0}^{m}\lambda^j\int_0^h e^{-\lambda s}B_j(s)ds,$$

через λ_q обозначим ее нули, упорядоченные в порядке возрастания модулей с учетом кратности, через ν_q — их кратности, через Λ — множество всех нулей функции $L(\lambda)$.

Дальнейшему изложению предпошлем

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 05-01-00989, 04-01-00618) и гранта № НШ-1927-2003.1.

Предложение 1. *Пусть $a_{0m} \neq 0$, $a_{mn} \neq 0$. Тогда множество Λ лежит в вертикальной полосе*

$$-\infty < \varkappa_- = \inf_{\lambda_q \in \Lambda} \operatorname{Re} \lambda_q \leq \operatorname{Re} \lambda_q \leq \sup_{\lambda_q \in \Lambda} \operatorname{Re} \lambda_q = \varkappa_+ < +\infty,$$

при этом величина $N = \max\limits_{\lambda_q \in \Lambda} \nu_q$ конечна.

Обозначим через $D_\lambda(r)$ круг радиуса r с центром в точке λ, а через $G^{(p)}$, $p = 1, 2, \ldots$, — связные компоненты объединения $\bigcup\limits_{\lambda_q \in \Lambda} D_\lambda(r)$. При этом множества $G^{(p)}$ занумерованы в порядке возрастания их удаленности от начала координат.

Введем следующие обозначения: $\Lambda^{(p)} = \Lambda \cap G^{(p)}$, M_p — число точек в $\Lambda^{(p)}$ с учетом кратности, $\varkappa_p = \sup\limits_{\lambda_q \in \Lambda^{(p)}} \operatorname{Re} \lambda_q$; $M = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \lim\limits_{r \to 0} \max\limits_p \{M_p \mid \varkappa_p > \varkappa_+ - \varepsilon\}$. Отметим, что в случае $a_{0m} \neq 0$, $a_{nm} \neq 0$ найдется такое натуральное N_0, что выполнено неравенство $\max\limits_p M_p \leq N_0$. При этом в случае отделимости множества Λ ($\inf\limits_{\lambda_p \neq \lambda_q} |\lambda_p - \lambda_q| > 0$), $M \leq \max\limits_{\lambda_q \in \Lambda} \nu_q = N$.

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть $a_{0m} \neq 0$, $a_{nm} \neq 0$. Тогда задача* (1), (2) *однозначно разрешима в пространстве $H^m(-h, T)$ при любом $T > 0$, и для ее решения $u(t)$ справедлива оценка*

$$\|u\|_{H^m(t-h,T)} \leq d_1 \sqrt{T} \left(\int_0^T (T - s + 1)^{2(M-1)} e^{2\varkappa_+(T-s)} |f(s)|^2 ds \right)^{1/2} + \\ + d_2 (T+1)^{M-1} e^{\varkappa_+ T} \|g\|_{H^m(-h,0)}, \quad T > h, \quad (3)$$

с постоянными d_1 и d_2, не зависящими от функций f, g и от T.

Отметим, что оценка (3) является неулучшаемой в том смысле, что величины $\varkappa_+$ и M нельзя взять меньшими во всем классе правых частей $f \in L_2(0, T)$, $T > 0$, и начальных функций $g \in H^m(-h, 0)$. Более того, величину $\sqrt{T}$, фигурирующую в оценке (3), нельзя опустить.

В случае, когда функция f имеет компактный носитель $\Omega \equiv \operatorname{supp} f$, множитель $\sqrt{T}$ можно опустить.

Теорема 2. *Пусть $a_{0m} \neq 0$, $a_{nm} \neq 0$ и функция f имеет компактный носитель Ω. Тогда для решения $u(t)$ задачи* (1), (2) *справедлива оценка*

$$\|u\|_{H^m(T-h,T)} \leq d_3 \left(\int_0^T (T - s + 1)^{2(M-1)} e^{2\varkappa_+(T-s)} |f(s)|^2 ds \right)^{1/2} + \\ + d_4 (T+1)^{M-1} e^{\varkappa_+ T} \|g\|_{H^m(-h,0)}, \quad T > h,$$

с постоянными d_3 и d_4, не зависящими от функций f, g и от T.

Доказательство теоремы 1 опирается на результат о базисности Рисса системы экспоненциальных решений однородного уравнения (1) ($f(t) \equiv 0$).

Пусть $y_{q,s}(t)$ — экспоненциальные решения уравнения (1): $y_{q,s}(t) = t^s e^{\lambda_q t}$, $s = 0, 1, \ldots, \nu_q - 1$, $\lambda_q \in \Lambda$; L_p — подпространства, являющиеся линейными оболочками всех экспоненциальных решений, отвечающих нулям $\lambda_q \in \Lambda^{(p)}$:

$$L_p = \operatorname{span} \{y_{q,s}(t),\ \lambda_q \in \Lambda^{(p)},\ s = 0, 1, \ldots, \nu_q - 1\}.$$

Предложение 2 (см. [9], [10]). *Пусть $a_{0m} \neq 0$, $a_{nm} \neq 0$. Тогда система подпространств $\{L_p\}$ образует базис Рисса из подпространств пространства $H^m(-h, 0)$.*

Отметим, что в [10] приведены доказательства предложения 2 и более общих утверждений о базисности системы экспоненциальных решений в шкале пространств Соболева $H^s(-h, 0)$ для не полуцелых s ($s \neq p + \frac{1}{2}$).

Вместо неравенств $cg(x) \leq f(x) \leq Cg(x)$, $x \in X$, с положительными постоянными c, C, не зависящими от x, будем далее писать $f(x) \asymp g(x)$, $x \in X$. Односторонние оценки такого рода будем обозначать знаками $\prec$ и $\succ$.

Приведем доказательства основных результатов.

Доказательство теоремы 1. Принимая во внимание то, что оценка решения задачи (1), (2) для однородного уравнения ($f(t) \equiv 0$) установлена в [9]–[10], получим оценку для решения неоднородного уравнения с нулевой начальной функцией ($g(t) \equiv 0$).

Рассмотрим задачу (1), (2) при такой функции $f(t)$, что $\operatorname{supp} f \in [0, h]$. Решение этой задачи обозначим через $u_h(t)$. В этом случае из результатов [15] вытекает оценка

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\gamma t}(|u_h^{(m)}(t)|^2 + |u_h(t)|^2)dt \leq c_\gamma \|f\|^2_{L_2[0,h]} \tag{4}$$

при некотором γ с постоянной c_γ, не зависящей от f.

В свою очередь из оценки (4) следует неравенство

$$\|u_h\|_{H^m[0,h]} \leq c_1 \|f\|_{L_2[0,h]} \tag{5}$$

с постоянной c_1, не зависящей от функции f.

Наряду с задачей (1), (2) рассмотрим следующую задачу:

$$Dv = 0, \quad t > h; \tag{6}$$

$$v|_{[0,h]} = u_h. \tag{7}$$

В соответствии с теоремой существования и единственности решения задачи (1), (2) очевидно, что при $t \geq h$ решение $u_h(t)$ исходной задачи (1), (2) совпадает с $v(t)$.

Оценки решения задачи для однородного уравнения (6) с условием (7) получены в [9], [10] и имеют вид

$$\|v\|_{H^m[T-h,T]} \prec (1+T)^{M-1} e^{\varkappa_+ T} \|u_h\|_{H^m[0,h]}, \quad T > h. \tag{8}$$

Из оценок (5), (8) вытекает

$$\|u_h\|_{H^m[T-h,T]} \prec (1+T)^{M-1} e^{\varkappa_+ T} \|f\|_{L_2[0,h]}, \quad T > h. \tag{9}$$

Получим теперь оценку решения задачи (1), (2) с функцией f такой, что $\operatorname{supp} f \in [jh-h, jh]$, $j \in \mathbf{N}$, $j > 1$.

Лемма 1. *Пусть $a_{0m} \neq 0$, $a_{nm} \neq 0$, $\operatorname{supp} f \in [jh-h, jh]$, $g(t) \equiv 0$. Тогда для решения $u(t)$ задачи (1), (2) справедливы соотношения*

(i) *$u(t) = 0$ при $t < jh - h$;*

(ii) *$\|u\|_{H^m[Rh-h,Rh]} \prec ((R-j+1)h)^{M-1} e^{\varkappa_+(R-j+1)h} \|f\|_{L_2[jR-h,jh]}$, где $R \in \mathbf{N}$ и $R > j$.*

Доказательство. Утверждение (i) справедливо в силу однозначной разрешимости задачи (1), (2) в пространстве $H^m[-h,T]$, а именно, в случае $u(t) = 0$ при $t \in [-h, 0]$ и правой части, обращающейся в нуль при $0 < t < T$, решение $u(t)$ обращается в нуль при $0 < t < T$.

Для доказательства утверждения (ii) сделаем замену переменной $t = (jh-h) + \tau$ и положим

$$\begin{aligned} \widetilde{u}(\tau) &= u(jh - h + \tau), \\ \widetilde{f}(\tau) &= f(jh - h + \tau). \end{aligned} \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что $\widetilde{u}(\tau)$ является решением задачи

$$\begin{aligned} (D\widetilde{u})(\tau) &= \widetilde{f}(\tau), \qquad \tau > 0; \\ \widetilde{u}(\tau) &= 0, \qquad -h \leq \tau \leq 0. \end{aligned}$$

Заметим, что $\operatorname{supp}\widetilde{f} \subseteq [0,h]$. Следовательно, $\|\widetilde{u}\|_{H^m[T-h,T]} \prec (1+T)^{M-1}e^{\varkappa_+ T}\|\widetilde{f}\|_{L^2[0,h]}$ в силу неравенства (9). Отсюда и из (10) заключаем

$$\|u\|_{H^m(jh-2h+T,jh-h+T)} \prec (1+T)^{M-1}e^{\varkappa_+ T}\|f\|_{L_2(jh-h,jh)}. \tag{11}$$

Полагая $T_1 = jh - h + T$, из (11) вытекает неравенство

$$\|u\|_{H^m[T_1-h,T_1]} \prec (1+T_1-(jh-h))^{M-1}e^{\varkappa_+(T_1-(jh-h))}\|f\|_{L_2(jh-h,jh)}.$$

При $T_1 = Rh$ получаем утверждение (ii) леммы.

Отметим, что из неравенства (ii) и того, что $Rh - jh + h \asymp Rh - t$ при $t \in [jh-h, jh]$ следует оценка

$$\|u\|_{H^m(Rh-h,Rh)} \prec \|(Rh-t+1)^{M-1}e^{\varkappa_+(Rh-t)}f(t)\|_{L^2(jh-h,jh)}. \tag{12}$$

Завершим доказательство теоремы 1. Представим функцию $f(t)$ в виде $f = \sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j(t)$, где $f_j(t) = \chi_j f(t)$, χ_j — характеристическая функция интервала $(jh-h, jh)$.

Положим $T = Rh$, $R \in \mathbf{N}$. Ясно, что слагаемые f_j при $j > R$ не дают вклада в решение на промежутке $[0, Rh]$. Обозначим через u_j решение задачи (1), (2) с правой частью $f = f_j$. Тогда при $t \le Rh$

$$u(t) = \sum_{j=1}^{R} u_j(t). \tag{13}$$

Из известного неравенства

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_R)^2 \le R(a_1^2 + \cdots + a_R^2), \quad a_j \in \mathbf{R},$$

получаем оценку

$$\|u\|^2_{H^m(Rh-h,Rh)} \le \left(\sum_{j=1}^{R}\|u\|_{H^m(Rh-h,Rh)}\right)^2 \le R\sum_{j=1}^{R}\|u_j\|^2_{H^m(Rh-h,Rh)}. \tag{14}$$

В свою очередь из неравенств (12), (14) при $T = Rh$ вытекает оценка

$$\|u\|^2_{H^m(Rh-h,Rh)} \prec R\sum_{j=1}^{R}\|(Rh-t+1)^{M-1}e^{\varkappa_+(Rh-t)}f_j(t)\|^2_{L_2[Rh-h,Rh]} =$$
$$= R\|(Rh-t+1)^{M-1}e^{\varkappa_+(Rh-t)}f(t)\|^2_{L_2[0,Rh]} = \frac{T}{h}\|(T-t+1)^{M-1}e^{\varkappa_+(T-t)}f(t)\|^2_{L_2[0,T]}. \tag{15}$$

Рассмотрим теперь случай произвольного $T \ge h$. Выберем минимальное натуральное R такое, что $Rh \ge T$. Заметим, что

$$\|u\|^2_{H^m[T-h,T]} \le \|u\|^2_{H^m(Rh-2h,Rh-h)} + \|u\|^2_{H^m(Rh-h,Rh)}.$$

Из неравенства (15) получаем следующую цепочку неравенств:

$$\|u\|^2_{H^m[T-h,T]} \prec (R-1)\|(Rh-h-t+1)^{M-1}e^{\varkappa_+(Rh-h-t)}f(t)\|^2_{L_2[0,Rh-h]} +$$
$$+ R\|(Rh-t+1)^{M-1}e^{\varkappa_+(Rh-t)}f(t)\|^2_{L_2[0,Rh]} \le$$
$$\le 2e^{|\varkappa_+|h}R\|(Rh-t+1)^{M-1}e^{\varkappa_+(Rh-t)}f(t)\|^2_{L_2[0,Rh]}. \tag{16}$$

Решение $u(t)$ на отрезке $[0,T]$ не зависит от значений $f(t)$ при $t > T$, что позволяет заменить в правой части неравенства (16) норму в $L_2[0,Rh]$ на норму в $L_2[0,T]$.

Поскольку при $T \asymp Rh$ справедливы соотношения $e^{\varkappa_+(Rh-t)} \asymp e^{\varkappa_+(T-t)}$, $(Rh-t+1)^{M-1} \asymp (T-t+1)^{M-1}$, из неравенства (16) получаем утверждение теоремы.

Отметим, что оценка (3) является неулучшаемой в том смысле, что величины M, $\varkappa_+$ нельзя взять меньшими во всем классе правых частей $f \in L_2[0,T]$, $T > 0$. Более того, $\sqrt{T}$, фигурирующий в оценке (3), нельзя опустить.

Пример 1. Рассмотрим задачу

$$u'(t) + u'(t-1) = 1, \quad t > 0, \tag{17}$$

$$u(t) = 0, \quad t \in [-1, 0]. \tag{18}$$

Строя решение задачи (17) и (18) по шагам, получаем

$$u(t) = \begin{cases} k, & t \in [2k-1, 2k]; \\ t-k, & t \in [2k, 2k+1]. \end{cases}$$

Легко видеть, что

$$\|u\|_{H^1[n-1,n]} \asymp n, \quad \|f\|_{L_2[0,n]} \asymp \sqrt{n}, \quad n \in N.$$

Характеристический квазимногочлен $L(\lambda) = \lambda(1+e^{-\lambda})$ имеет, очевидно, простые нули, лежащие на мнимой оси, и тогда выполняются соотношения

$$\varkappa_- = \varkappa_+ = 0, \quad M = N = 1.$$

При $T = n$ правая часть неравенства (3) ведет себя как n

$$\sqrt{T}\|(T-t+1)^{M-1}e^{\varkappa_+(T-t)}f(t)\|_{L_2(0,T)} \asymp n,$$

что доказывает точность оценки для данной задачи.

Пример 2. Рассмотрим задачу

$$u'(t) - u'(t-1) = 1, \quad t > 0, \tag{19}$$

$$u(t) = 0, \quad t \in [-1, 0]. \tag{20}$$

Строя решение задачи (19) и (20) по шагам, получаем

$$u(t) = nt - \frac{n(n-1)}{2}, \quad t \in [n-1, n].$$

Легко видеть, что $\|u\|_{H^1[n-1,n]} \asymp n^2$, $\|f\|_{L_2[0,n]} \asymp \sqrt{n}$, $n \in N$. Характеристический квазимногочлен $L(\lambda) = \lambda(1 - e^{-\lambda})$ имеет кратный нуль в нуле и поэтому очевидно выполняются соотношения

$$\varkappa_- = \varkappa_+ = 0, \quad M = N = 2.$$

При $T = n$ правая часть неравенства (4) ведет себя следующим образом:

$$\sqrt{T}\|(T-t+1)^{M-1}e^{\varkappa_+(T-t)}f(t)\|_{L_2(0,T)} \asymp n^2.$$

Примеры, показывающие неулучшаемость оценки (3) для однородного уравнения (1) ($f(t) \equiv 0$) приведены в [11], [12].

Доказательство предложения 1. Возьмем m произвольных нулей $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ функции L. Тогда из полученной выше асимптотики вытекает, что функция $L_0(\lambda) = L(\lambda)/\prod\limits_{j=1}^{m}(\lambda - \lambda_j)$ является функцией типа синуса (точнее говоря, становится ею после замены $\lambda \to i\lambda$). Искомый результат следует из [14].

Доказательство теоремы 2. При доказательстве теоремы в представлении решения (13) число слагаемых Q ограничено числом, не зависящим от R. Тем самым в неравенстве (14) (правая часть) множитель R перед суммой может быть заменен на Q.

Некоторые замечания и комментарии. Как отмечалось в начале данной статьи, в настоящее время имеется значительное число работ, в которых установлены различные оценки решений функционально-дифференциальных уравнений вида (1) (см. [1]–[7], а также указанную там библиографию).

В рассматриваемой ситуации, поскольку уравнение (1) содержит слагаемые типа свертки, было бы естественно использовать преобразование Лапласа и его обращение (см. [1]; [2]; [5], гл. 2; [6], гл. 2).

Однако на этом пути не удалось бы получить оценки вида (3). Это вполне объяснимо, т. к. при обращении преобразования Лапласа прямая, по которой проводится интегрирование, должна быть удалена на положительное расстояние ε от множества Λ (полюсов функции $L^{-1}(\lambda)$). Этим обстоятельством объясняется то, что в известных ранее оценках величина $\varkappa_+$ заменялась на $\varkappa_+ + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$.

Предложенный здесь подход отличается от указанного и носит в целом спектральный характер. В его основе лежит базисность Рисса системы экспоненциальных решений и получение оценок решений однородного уравнения.

Отметим, что в [8]–[10] приведены результаты о базисности экспоненциальных решений в шкале пространств Соболева с произвольным (неполуцелым) индексом, а также о базисности системы разделенных разностей, построенных по семейству экспоненциальных решений.

Кроме того, в [10] приведена библиография работ по вопросам полноты и минимальности систем экспоненциальных решений автономных функционально-дифференциальных уравнений.

В векторном случае для уравнений нейтрального типа с матричными коэффициентами результаты о базисности Рисса системы экспоненциальных решений, а также об оценках решений однородного уравнения, аналогичные (3), при $f(t) \equiv 0$ установлены в [12]–[14] (там же см. соответствующую библиографию).

При дополнительном условии отделимости множества Λ базисность Рисса системы экспоненциальных решений в пространстве $C^r \oplus L_2((-h, 0), C^r)$ для уравнения первого порядка $(m = 1)$ нейтрального типа рассматривалась в [16].

В заключение заметим, что результаты предлагаемой статьи анонсированы в [17].

Литература

1. Беллман Р., Кук К. *Дифференциально-разностные уравнения.* – М: Мир, 1967. – 548 с.
2. Мышкис Л.Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.* – М: Наука, 1972. – 351 с.
3. Diekman O., van Gils S.A., Lunel S.M, Walther H.O. *Delay equations: functional, complex and nonlinear analysis.* – New York: Springer-Verlag, 1995.
4. Wu J. *Theory and applications of partial functional differential equations.* – New York: Springer-Verlag. – 1996. – № 119. – 642 p.
5. Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1984. – 421 с.
6. Hale J., Verduyn Lunel S.M. *Introduction to Functional Differential Equations.* – Springer-Verlag, 1993. – 539 p.
7. Henry D. *Linear autonomous neutral functional differential equations* // J. Different. Equat. – 1974. – V. 15. – C. 106–128.
8. Власов В.В., Иванов С.А. *Базисность и оценки решений уравнений с последействием в шкале пространств Соболева* // УМН. – 2001. – Т. 56. – Вып. 3. – С. 151–152.
9. Власов В.В., Иванов С.А. *Оценки решений уравнений с последействием в пространствах Соболева и базис из разделенных разностей* // Матем. заметки. – 2002. – Т. 72. – № 2. – С. 303–306.
10. Власов В.В., Иванов С.А. *Оценки решений уравнений с последействием в шкале пространств Соболева и базис из разделенных разностей* // Алгебра и анализ. – 2003. – Т. 15. – Вып. 4. – С. 115–141.
11. Власов В.В. *Об одном классе дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 2. – С. 20–29.

12. Власов В.В. *Об оценках решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 4. – С. 14–22.
13. Власов В.В. *О некоторых спектральных вопросах, возникающих в теории дифференциально-разностных уравнений* // УМН. – 1998. – Т. 53. – № 4. – С. 217–218.
14. Власов В.В., Медведев Д.А. *Оценки решений дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа* // Докл. РАН. – 2003. – Т. 389. – № 2. – С. 156–158.
15. Власов В.В. *Корректная разрешимость одного класса дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом в гильбертовом пространстве* // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 1. – С. 22–35.
16. Lunel S.V., Yakubovich D.V. *A functional model approach to linear neutral functional differential equations* // Integral Equations and Operators Theory. – 1997. – V. 27. – P. 347–378.
17. Власов В.В., Иванов С.А. *Об оценках решений функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа в пространствах Соболева* // Докл. РАН. – 2004. – Т. 396. – № 3. – С. 3–5.

Московский государственный университет

Санкт-Петербургский государственный университет

Поступила
25.03.2004