И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2005 МАТЕМАТИКА № 4 (515)

УДК 517.956

В.Н. ПАВЛЕНКО, Д.К. ПОТАПОВ

АППРОКСИМАЦИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ И РАЗРЫВНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Введение. Разрывные нелинейности в интегральных и дифференциальных уравнениях часто возникают как идеализации непрерывных нелинейностей, имеющих участки быстрого роста по фазовой переменной. При этом удобно считать, что непрерывные нелинейности зависят от малого параметра ε и в пределе при $\varepsilon \to 0$ получается разрывная нелинейность. Естественным является вопрос о близости решений аппроксимирующего уравнения и предельной задачи. На необходимость исследований в этом направлении указано в [1]. Данная проблема для эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями изучалась в [2] в предположении, что нелинейность, входящая в уравнение, ограничена, а дифференциальная часть вместе с граничным условием порождает коэрцитивный оператор.

В данной работе рассматриваются резонансные эллиптические краевые задачи со спектральным параметром и ограниченной разрывной нелинейностью. Резонансность краевой задачи означает, что ядро дифференциального оператора с соответствующим краевым условием ненулевое. В [3] вариационным методом получены предложения о существовании луча положительных собственных значений для таких задач. Аппроксимирующая задача получается из исходной малыми возмущениями спектрального параметра и непрерывными по фазовой переменной аппроксимациями разрывной нелинейности. Цель данной работы – установить при определенных условиях сходимость решений аппроксимирующих задач к решениям исходной.

1. Постановка задачи. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с границей Γ класса $\mathbf{C}_{2,\alpha}$, $0 < \alpha \le 1$ ([4], с. 23), гиперповерхности

$$S_i = \{(x,u) \in \mathbf{R}^{n+1} : u = \varphi_i(x),\ x \in \overline{\Omega}\},$$

$\varphi_i \in \mathbf{W}_q^2(\Omega)$, $q > n$, $i = \overline{1,m}$, попарно не пересекаются. Для определенности считается, что $\varphi_i(x) < \varphi_{i+1}(x)$ для любого $x \in \overline{\Omega}$ и $i = \overline{1, m-1}$. Так как $q > n$, то $\varphi_i(x) \in \mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$ ([5], с. 74). Отсюда и из последнего неравенства следует существование $d > 0$ такого, что для любого $x \in \overline{\Omega}$ отрезки $[\varphi_i(x) - d,\ \varphi_i(x) + d]$, $i = \overline{1,m}$, попарно не пересекаются.

Поверхности S_i, $i = \overline{1,m}$, разбивают область $D = \Omega \times \mathbf{R}$ на непересекающиеся подобласти

$$\begin{aligned} D_0 &= \{(x,u) \in D : u < \varphi_1(x)\}, \\ D_i &= \{(x,u) \in D : \varphi_i(x) < u < \varphi_{i+1}(x)\},\ i = \overline{1,m-1}, \\ D_m &= \{(x,u) \in D : u > \varphi_m(x)\}. \end{aligned}$$

На $\overline{D_i}$ заданы каратеодориевы функции ([6], с. 148) $g_i(x,u)$ такие, что для почти всех $x \in \Omega$

$$|g_i(x,u)| \le a(x) \ \ \forall u, \ \ (x,u) \in \overline{D_i}, \tag{1}$$

где $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $q > n$, $i = \overline{0,m}$.

Функция $g : \overline{D} \to \mathbf{R}$ суперпозиционно измерима ([6], с. 149) и на D_i совпадает с $g_i(x,u)$, причем для почти всех $x \in \Omega$, если $(x,u) \in S_i$, то $g(x,u)$ принадлежит отрезку с концами $g_{i-1}(x,u)$ и $g_i(x,u)$. Будем предполагать, что для почти всех $x \in \Omega$ верно равенство

$$g(x,0) = 0 \tag{2}$$

и

$$g_i(x,u) \geq g_{i-1}(x,u), \tag{3}$$

если $(x,u) \in S_i$.

Фиксируем последовательность положительных чисел (δ_k), сходящуюся к нулю и ограниченную сверху определенным выше числом d.

Нелинейность $g(x,u)$ аппроксимируется последовательностью каратеодориевых функций $(g^k(x,u))$ таких, что для почти всех $x \in \Omega$

(i) $g^k(x,u) = g(x,u)$, если $|\varphi_i(x) - u| > \delta_k$ для любого $i = \overline{1,m}$;

(ii)

$$|g^k(x,u)| \leq a(x) \quad \forall u \in \mathbf{R}, \tag{4}$$

где функция a из оценки (1).

Исходная краевая задача с параметром λ имеет вид

$$Lu(x) = \lambda g(x,u(x)), \quad x \in \Omega, \tag{5}$$

$$Bu|_\Gamma = 0, \tag{6}$$

где $Lu(x) \equiv -\sum\limits_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + c(x)u(x)$ — равномерно эллиптический формально самосопряженный дифференциальный оператор в области Ω с коэффициентами $a_{ij} \in \mathbf{C}_{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $c \in \mathbf{C}_{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha \leq 1$ ([4], с. 21). При этом (6) — одно из следующих основных граничных условий: Дирихле, если $Bu \equiv u$; Неймана, если $Bu = \frac{\partial u}{\partial n_L} \equiv \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i}\cos(n,x_j)$, n — внешняя нормаль к границе Γ, $\cos(n,x_j)$ — направляющие косинусы нормали n; третье краевое, если $Bu = \frac{\partial u}{\partial n_L} + \sigma(x)u(x)$ с $\sigma \in \mathbf{C}_{1,\alpha}(\Gamma)$, неотрицательной и не равной тождественно нулю на Γ.

Определение 1.1. *Сильным решением* задачи (5)–(6) называется функция $u \in \mathbf{W}_s^2(\Omega)$, $s>1$, которая удовлетворяет для почти всех $x \in \Omega$ уравнению (5) и для которой след $Bu(x)$ на Γ равен нулю.

Определение 1.2 ([7]). Сильное решение $u(x)$ задачи (5)–(6) называется *полуправильным*, если для почти всех $x \in \Omega$ значение $u(x)$ является точкой непрерывности функции $g(x,\cdot)$.

Определение 1.3. Число λ называется *собственным значением* задачи (5)–(6), если существует ненулевое сильное решение $u(x)$ этой задачи. При этом $u(x)$ называют *собственной функцией*, соответствующей λ.

Определение 1.4. Пусть $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Назовем $u \in \mathbf{R}$ *прыгающим разрывом* функции f, если $f(u-) < f(u+)$, где $f(u\pm) = \lim\limits_{s \to u\pm} f(s)$.

В силу равенства (2) функция, почти всюду на Ω равная нулю, является сильным решением задачи (5)–(6).

Заметим, что из неравенства (3) следует, что для почти всех $x \in \Omega$ точки разрыва функции $g(x,\cdot)$ прыгающие.

Пусть $X = \mathbf{H}_0^1(\Omega)$, если (6) — граничное условие Дирихле, и $X = \mathbf{H}^1(\Omega)$, если (6) — граничное условие Неймана или третье краевое условие.

Сопоставим краевой задаче (5)–(6) функционал J^λ, определенный на X следующим образом:

$$J^\lambda(u) = J_1(u) - \lambda \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} g(x,s)ds,$$

где

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx + \frac{1}{2}\int_\Omega c(x)u^2(x)dx$$

в случае граничного условия Дирихле или Неймана;

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega a_{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}dx + \frac{1}{2}\int_\Omega c(x)u^2(x)dx + \frac{1}{2}\int_\Gamma \sigma(s)u^2(s)ds$$

в случае третьего краевого условия.

Предполагается, что

(iii) линейное пространство $N(L)$ решений задачи

$$Lu = 0, \quad x \in \Omega, \tag{7}$$

$$Bu|_\Gamma = 0 \tag{8}$$

одномерно и $\psi(x)$ — базисная функция этого подпространства.

В дальнейшем используется следующий результат, который является частным случаем теоремы 1.3 из [8].

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия*

1) $J_1(u) \geq 0 \ \forall u \in X$;
2) *функция* $g : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *борелева* (mod 0) ([6], с. 166), *для почти всех* $x \in \Omega$ *сечение* $g(x,\cdot)$ *имеет разрывы только первого рода,* $g(x,u) \in [g_-(x,u), g_+(x,u)]$, $g_-(x,u) = \varliminf\limits_{\eta\to u} g(x,\eta)$, $g_+(x,u) = \varlimsup\limits_{\eta\to u} g(x,\eta)$ *и верна оценка* $|g(x,u)| \leq a(x) \ \forall u \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $q > n$;
3) *линейное пространство* $N(L)$ *решений задачи* (7)–(8) *ненулевое,* $\lambda > 0$ *и*

$$\lim_{u\in N(L),\, \|u\|\to+\infty} \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} g(x,s)ds = -\infty.$$

Тогда существует $u_0 \in X$, *для которого*

$$J^\lambda(u_0) = \inf_{v\in X} J^\lambda(v) \equiv d_\lambda, \tag{9}$$

причем любое такое u_0 *принадлежит* $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ *и удовлетворяет граничному условию* (6). *Если дополнительно предположить, что для почти всех* $x \in \Omega$ *функция* $g(x,\cdot)$ *имеет только прыгающие разрывы, то любое* u_0, *удовлетворяющее* (9), *является полуправильным решением задачи* (5)–(6).

В [3] показано, что если дополнительно к условиям 1)–3) теоремы 1.1 $g(x,0) = 0$ для почти всех $x \in \Omega$

(iv) существует $\widehat{u} \in X$, для которого

$$\int_\Omega dx \int_0^{\widehat{u}(x)} g(x,s)ds > 0,$$

то найдется такое $\lambda_0 > 0$, что для любого $\lambda > \lambda_0$ число d_λ в (9) отрицательно, поэтому u_0 в равенстве (9) отлично от нулевого элемента X.

Будем предполагать, что условие (iv) выполнено. Кроме того, пусть для базисной функции ψ пространства $N(L)$ верны неравенства (условия Ландесмана–Лазера)

$$\int_{\psi<0} g_+(x)\psi(x)dx + \int_{\psi>0} g_-(x)\psi(x)dx > 0 > \int_{\psi>0} g_+(x)\psi(x)dx + \int_{\psi<0} g_-(x)\psi(x)dx, \tag{10}$$

где $g_+(x) = \lim\limits_{u\to+\infty} g(x,u)$, $g_-(x) = \lim\limits_{u\to-\infty} g(x,u)$ (предполагается, что для почти всех $x \in \Omega$ данные пределы существуют). Как показано в [8], условия Ландесмана–Лазера влекут равенство

$$\lim_{u\in N(L),\, \|u\|\to+\infty} \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} g(x,s)ds = -\infty. \tag{11}$$

Если дополнительно потребовать неотрицательность $J_1(u)$ на X, то из теоремы 1.1 и замечания к ней при сделанных предположениях относительно задачи (5)–(6) следует существование $\lambda_0 > 0$ такого, что при $\lambda > \lambda_0$ $\inf\limits_{v\in X} J^\lambda(v) = d_\lambda < 0$ и найдется $u \in X$, для которого $J^\lambda(u) = d_\lambda$, причем любое такое u принадлежит $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ и является ненулевым полуправильным решением задачи (5)–(6).

Зафиксируем $\lambda > \lambda_0$ и пусть числовая последовательность (λ_k), $\lambda_k > 0$, сходится к λ. Рассмотрим аппроксимирующую задачу

$$Lu(x) = \lambda_k g^k(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \tag{12}$$

$$Bu|_\Gamma = 0, \tag{13}$$

где аппроксимирующая последовательность каратеодориевых функций $(g^k(x,u))$ определена выше.

Положим

$$J_k(u) = J_1(u) - \lambda_k \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} g^k(x,s)ds, \quad \mathbf{N} \ni k \geq 2.$$

По построению $g^k(x,u)$ каратеодориева и для нее при почти всех $x \in \Omega$ верна оценка (4) с функцией a из оценки (1).

Покажем, что (11) для любого $k \geq 2$ влечет равенство

$$\lim_{u\in N(L),\ \|u\|\to+\infty} \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} g^k(x,s)ds = -\infty. \tag{14}$$

Действительно, для произвольного $u \in X$

$$\left| \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u(x)} g^k(x,s)ds - \int\limits_\Omega dx \int\limits_0^{u(x)} g(x,s)ds \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^m \int\limits_\Omega dx \int\limits_{\varphi_i(x)-\delta_k}^{\varphi_i(x)+\delta_k} |g^k(x,s) - g(x,s)|ds \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^m \int\limits_\Omega dx \int\limits_{\varphi_i(x)-\delta_k}^{\varphi_i(x)+\delta_k} 2a(x)ds = 4m\delta_k \int_\Omega a(x)dx.$$

Данная оценка верна для любого $u \in N(L)$. Поэтому из (11) следует (14), поскольку для любого $u \in N(L)$

$$\int_\Omega dx \int_0^{u(x)} g^k(x,s)ds = \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} g(x,s)ds + \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} (g^k(x,s) - g(x,s))ds \leq$$

$$\leq \int_\Omega dx \int_0^{u(x)} g(x,s)ds + 4m\delta_k \int_\Omega a(x)dx.$$

Из теоремы 1.1 следует, что для любого натурального $k \geq 2$ существует такое $u_k \in X$, что $J_k(u_k) = \inf\limits_{v\in X} J_k(v)$ и u_k является сильным решением задачи (12)–(13).

Рассматривается проблема о близости решений аппроксимирующей задачи u_k к решениям исходной задачи (5)–(6).

2. Формулировка и доказательство основного результата

Теорема 2.1. *Предположим, что*

1) $J_1(u) \geq 0\ \forall u \in X$;
2) *выполнены оценка* (1), *равенство* (2), *неравенство* (3), *оценка* (4), *условия* (iii), (iv) *и* (10).

Тогда последовательность (u_k) решений аппроксимирующих задач, построенная выше, содержит подпоследовательность (u_{k_l}), сходящуюся в $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$ к полуправильному решению u_0 задачи (5)–(6), для которого $J^\lambda(u_0) = \inf\limits_{v \in X} J^\lambda(v)$. Если последний инфимум достигается в единственной точке u_0, то $u_k \to u_0$ в $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$.

Доказательство. Покажем, что последовательность (u_k) ограничена в $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$. Допустим противное. Тогда существует такая подпоследовательность (u_{k_l}) последовательности (u_k), что $\|u_{k_l}\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})} \to +\infty$. Положим $v_l = u_{k_l}/\|u_{k_l}\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})}$. Так как u_{k_l} — сильное решение задачи (12)–(13), то

$$-\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)(v_l)_{x_i})_{x_j} = -c(x)v_l(x) + \frac{\lambda_{k_l} g^{k_l}(x, u_{k_l}(x))}{\|u_{k_l}\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})}}, \tag{15}$$

$$Bv_l|_\Gamma = 0. \tag{16}$$

Так как $\|v_l\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})} = 1$, то $\|v_l\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)} \le (\operatorname{mes}\Omega)^{1/q}$ $\forall l \in \mathbf{N}$, а

$$\frac{\|\lambda_{k_l} g^{k_l}(x, u_{k_l})\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}}{\|u_{k_l}\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})}} \le \frac{\lambda_{k_l}\|a\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}}{\|u_{k_l}\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})}}. \tag{17}$$

Отсюда следует существование такой постоянной $M > 0$, что норма правой части в $\mathbf{L}_q(\Omega)$ $(q > n)$ равенства (15) не превосходит M. Как показано в ([9], с. 133), последнее влечет ограниченность в $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ последовательности (v_l). Из рефлексивности $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ следует существование подпоследовательности последовательности (v_l), слабо сходящейся к некоторому v в $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$. Будем обозначать ее как саму последовательность (v_l). Так как $q > n$, то $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ компактно вкладывается в $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$ ([5], с. 103). Поэтому $v_l \to v$ в $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$, и, значит, $Bv|_\Gamma = 0$ (в силу (16)). Из слабой сходимости v_l к v в $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ и оценки (17) следует

$$\int_\Omega Lv(x)z(x)dx = 0 \;\; \forall z \in \mathbf{L}_p(\Omega), \quad p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

Отсюда вытекает равенство Lv нулю почти всюду на Ω. Таким образом, v — ненулевое решение задачи (7)–(8) ($\|v\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})} = 1$).

Умножим обе части (12) на v (при $k = k_l$ и $u = u_{k_l}$) и проинтегрируем по Ω. Получим

$$\begin{aligned} 0 = \int_\Omega Lu_{k_l} v(x)dx/\lambda_{k_l} = \int_\Omega g^{k_l}(x, u_{k_l}(x))v(x)dx = \\ = \int_\Omega (g^{k_l}(x, u_{k_l}(x)) - g(x, u_{k_l}(x)))v(x)dx + \int_\Omega g(x, u_{k_l}(x))v(x)dx = \\ = \int_{v(x)>0} A_{k_l}(x)v(x)dx + \int_{v(x)<0} A_{k_l}(x)v(x)dx + \\ + \int_{v(x)>0} g(x, \|u_{k_l}\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})} v_l(x))v(x)dx + \int_{v(x)<0} g(x, \|u_{k_l}\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})} v_l(x))v(x)dx, \end{aligned} \tag{18}$$

где $A_{k_l}|x| \le g^{k_l}(x, \|u_{k_l}\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})} v_l(x)) - g(x, \|u_{k_l}\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})} v_l(x))$.

В точке $x \in \Omega$, где $v(x) > 0$, $\|u_{k_l}\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})} v_l(x) \to +\infty$, т.к. $v_l(x) \to v(x)$ в $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$ и $\|u_{k_l}\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})} \to +\infty$. Поэтому $g^{k_l}(x, \|u_{k_l}\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})} v_l(x)) = g(x, \|u_{k_l}\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})} v_l(x))$ при достаточно больших k_l для такого x (по построению g^{k_l}). Следовательно,

$$\lim_{l \to \infty} A_{k_l}(x) = 0$$

на множестве $\{x \in \Omega : v(x) > 0\}$. Кроме того,

$$A_{k_l}(x) \le 2a(x).$$

Поэтому по теореме Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла получим

$$\lim_{l\to\infty}\int_{v(x)>0} A_{k_l}(x)v(x)dx = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{l\to\infty}\int_{v(x)<0} A_{k_l}(x)v(x)dx = 0.$$

Далее, если x такое, что $v(x) > 0$, то $g(x, \|u_{k_l}\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})}v_l(x)) \to g_+(x)$, т. к. $\|u_{k_l}\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})}v_l(x) \to +\infty$ (поскольку $v_l(x) \to v(x) > 0$ и $\|u_{k_l}\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})} \to +\infty$).

Аналогично, если $v(x) < 0$, то $g(x, \|u_{k_l}\|_{\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})}v_l(x)) \to g_-(x)$. Переходя к пределу в равенстве (18), получим

$$0 = \int_{v(x)>0} g_+(x)v(x)dx + \int_{v(x)<0} g_-(x)v(x)dx,$$

что противоречит условию (10).

Итак, ограниченность последовательности (u_k) в $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$ установлена.

Как отмечалось выше, u_k удовлетворяет равенствам

$$-\sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x)(u_k)_{x_i}\right)_{x_j} = -c(x)u_k(x) + \lambda_k g^k(x, u_k(x)), \quad x \in \Omega, \tag{19}$$

$$Bu_k|_\Gamma = 0.$$

Так как (u_k) ограничена в $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$, то найдется такое $M > 0$, что норма правой части равенства (19) в $\mathbf{L}_q(\Omega)$ $(q > n)$ не превосходит M при любом $k \in \mathbf{N}$. Отсюда следует ограниченность последовательности (u_k) в $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ ([9], с. 133). Таким образом, из последовательности (u_k) можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность в $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ к некоторому u_0. Будем ее обозначать так же, как саму последовательность (u_k). В силу компактности вложения $\mathbf{W}_q^2(\Omega)$ в $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$ (т. к. $q > n$) получаем сильную сходимость (u_k) к u_0 в $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$. Отсюда, в частности, следует равенство $Bu_0|_\Gamma = 0$.

Докажем, что $J^\lambda(u_0) = \inf\limits_{v\in X} J^\lambda(v) = d_\lambda$. В силу теоремы 1.1 существует $\widehat{u}_0 \in X$ такое, что $J^\lambda(\widehat{u}_0) = d_\lambda$.

Заметим, что для любого натурального l

$$|J_l(u_l) - J^\lambda(u_l)| = \left|\lambda_l\int\limits_\Omega dx\int\limits_0^{u_l(x)} g^l(x,s)ds - \lambda\int\limits_\Omega dx\int\limits_0^{u_l(x)} g(x,s)ds\right| \le$$

$$\le |\lambda_l - \lambda|\int\limits_\Omega |u_l(x)|a(x)dx + |\lambda|\left|\int\limits_\Omega dx\int\limits_0^{u_l(x)}(g^l(x,s) - g(x,s))ds\right| \le$$

$$\le |\lambda_l - \lambda|\,\|u_l\|_{\mathbf{L}_p(\Omega)}\|a\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)} + |\lambda|\sum_{i=1}^{m}\int\limits_\Omega dx\int\limits_{\varphi_i(x)-\delta_l}^{\varphi_i(x)+\delta_l}|g^l(x,s) - g(x,s)|ds \le$$

$$\le |\lambda_l - \lambda|\,\|u_l\|_{\mathbf{L}_p(\Omega)}\|a\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)} + 4|\lambda|m\delta_l\int\limits_\Omega a(x)dx = \widehat{\gamma}_l, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1.$$

Аналогично доказывается, что

$$|J_l(\widehat{u}_0) - J^\lambda(\widehat{u}_0)| \le |\lambda_l - \lambda|\,\|\widehat{u}_0\|_{\mathbf{L}_p(\Omega)}\|a\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)} + 4|\lambda|m\delta_l\int_\Omega a(x)dx = \widehat{\widehat{\gamma}}_l.$$

Положим $\gamma_l = \max\{\widehat{\gamma}_l, \widehat{\widehat{\gamma}}_l\}$. Так как (u_l) ограничена в $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$, то $\gamma_l \to 0+$.

Покажем, что $J_l(u_l) \to d_\lambda$. В силу оценок $|J_l(u_l) - J^\lambda(u_l)| \le \gamma_l$ и $|J_l(\widehat{u}_0) - J^\lambda(\widehat{u}_0)| \le \gamma_l$ имеем $d_\lambda - \gamma_l \le J^\lambda(u_l) - \gamma_l \le J_l(u_l) \le J_l(\widehat{u}_0) \le J^\lambda(\widehat{u}_0) + \gamma_l = d_\lambda + \gamma_l$. Таким образом, $d_\lambda - \gamma_l \le J_l(u_l) \le d_\lambda + \gamma_l$, что влечет сходимость $J_l(u_l)$ к d_λ.

Функционал J^λ непрерывен на X, поэтому $\lim\limits_{l\to\infty} J^\lambda(u_l) = J^\lambda(u_0)$, поскольку $u_l \to u_0$ в X. С другой стороны, $\lim\limits_{l\to\infty} J^\lambda(u_l) = \lim\limits_{l\to\infty} J_l(u_l) = d_\lambda$. Таким образом, $J^\lambda(u_0) = d_\lambda$.

Согласно теореме 1.1 u_0 является полуправильным решением задачи (5)–(6). Из приведенного выше доказательства видно, что из любой подпоследовательности последовательности (u_k) сильных решений аппроксимирующих задач (12)–(13) можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$ к некоторому $u_0 \in X$, для которого верно (9). Если элемент u_0, удовлетворяющий (9), единственный, то отсюда стандартным рассуждением получаем, что сама (u_k) сходится к u_0 в $\mathbf{C}_1(\overline{\Omega})$. $\square$

Литература

1. Красносельский М.А., Покровский А.В. *Уравнения с разрывными нелинейностями* // ДАН СССР. – 1979. – Т. 248. – № 5. – С. 1056–1059.
2. Павленко В.Н., Искаков Р.С. *Непрерывные аппроксимации разрывных нелинейностей полулинейных уравнений эллиптического типа* // Укр. матем. журн. – 1999. – Т. 51. – № 2. – С. 224–233.
3. Павленко В.Н., Потапов Д.К. *О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами* // Сиб. матем. журн. – 2001. – Т. 42. – № 4. – С. 911–919.
4. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* – М.: Наука, 1964. – 538 с.
5. Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* – М.: Наука, 1982. – 336 с.
6. Красносельский М.А., Покровский А.В. *Системы с гистерезисом.* – М.: Наука, 1983. – 272 с.
7. Красносельский М.А., Покровский А.В. *Правильные решения уравнений с разрывными нелинейностями* // ДАН СССР. – 1976. – Т. 226. – № 3. – С. 506–509.
8. Павленко В.Н., Винокур В.В. *Резонансные краевые задачи для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 5. – С. 43–58.
9. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. *Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы.* – М.: Ин. лит., 1962. – 208 с.

Челябинский государственный университет

Поступила
26.02.2003