Известия вузов. Математика
2013, №11, с. 51–63

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.В. ЩЕННИКОВ, В.Н. ЩЕННИКОВ

КОННЕКТИВНЫЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ ЛИНЕАРИЗАЦИИ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Аннотация. Рассматривается многосвязная нелинейная динамическая система, у которой в процессе "функционирования" отдельные подсистемы могут отключаться-включаться, т. е. система претерпевает структурные изменения. Известно, что в таких системах "присутствует" свойство устойчивости к связыванию. Наиболее распространенный термин — коннективная устойчивость. В данной работе найдена верхняя оценка на решения исходной многосвязной нелинейной динамической системы и коннективная оценка погрешности ее линеаризации.

Ключевые слова: асимптотическая устойчивость, векторная функция Ляпунова, коннективная оценка погрешности линеаризации.

УДК: 517.929

Пусть дана управляемая система

$$\frac{d\xi}{dt} = F(t,\xi,\eta) + u(t,\chi), \tag{1}$$

где $\xi \in R^n$, $\eta \in R^m$, $\chi \in R^p$, $t \in R^+ = \{t : t \geq t_0 \geq 0\}$, $n \geq m$, $n \geq p$, $F \in \Omega = \{t,\xi,\eta,\chi : R^+ \times R^n \times R^m \times R^p \to R^n\}$, $u : R^+ \times R^p \to R^1$, $\xi = \xi(t)$ есть вектор фазового состояния системы, вектор $\eta = \eta(t)$ определяет помехи, действующие на систему, вектор $u = u(t,\chi(t))$ — управляющее воздействие, $\chi(t)$ — управляющая векторная функция.

Будем считать, что задан программный режим $\xi = \phi(t)$ при $t \in R^+$.

Известно ([1], с. 201), что в теории программного управления есть задача выбора такого управления $u = u(t,\chi(t))$, чтобы осуществлялся заданный программный режим $\xi = \phi(t)$. Однако заданный программный режим не удается точно реализовать из-за ограничений на управляющую векторную функцию и наличия помех. В случае разрешимости указанной задачи искомое управление определяется из системы

$$u(t,\chi(t)) = \dot{\phi}(t) - F(t,\xi(t),\eta(t)). \tag{2}$$

Однако, как уже указывалось выше, из-за различного рода ограничений данная система практически не является разрешимой. Следует отметить, что система (1) в общем случае является нелинейной. С целью упрощения исследования поведения решений системы (1) прибегают к использованию системы первого приближения по отношению к исходной системе (1). Во многих случаях система первого приближения также оказывается нелинейной [2]–[9]. В теории программного управления ([1], гл. 5) возникает задача определения максимального отклонения при одинаковых начальных условиях решений исходной системы и ее первого приближения. Аналогичная задача возникает не только в задачах программного управления, но и в задачах адаптивного управления техническими системами, а также в

Поступила 24.07.2012

медицине. Нельзя не отметить и то, что при моделировании биомедицинских систем ([10], с. 5–32; [11], гл. 2) приходится использовать много исходных данных (условий), поиск которых сильно затруднен. Отметим при этом, что неинвазивный способ определения исходных данных более предпочтителен. Поэтому использование упрощенных (линеаризованных) моделей является наиболее употребляемым методом исследования реальных процессов. Следовательно, поиск указанных оценок является актуальной задачей. Эффективным методом поиска искомых оценок являются методы теории устойчивости движения [12]–[19].

Чтобы получить указанные оценки, осуществим в системе (1) преобразование $x = \xi - \phi(t)$. В результате получим

$$\frac{dx}{dt} = f(t, \phi(t), x, \eta) + \Delta(t, \chi(t), \eta(t)), \tag{3}$$

где $f(t, x, \eta) = F(t, x + \phi(t), \eta(t)) - F(t, \phi(t), \eta(t))$, $\Delta(t, \phi(t), \chi(t), \eta(t)) = \Delta(t) = F(t, \phi(t), \eta(t)) - \dot{\phi}(t) + u(t, \chi(t))$. При этом $x(t)$ определяет отклонение решения $\xi = \xi(t)$ системы (1) от заданного программного режима $\xi = \phi(t)$. Выражаясь инженерным языком, $x(t)$ определяет переходный процесс.

Пусть (3) имеет вид многосвязной нелинейной системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(\mu)}(x_s) + X_{1s}^{(\mu)}(t, x_1, \ldots, x_q) + \sum_{j=1}^{q} X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, x_1, \ldots, x_q) + \Delta_s(t) \equiv M_s(t, x) + \Delta_s(t) \tag{4}$$

с начальными данными $(x_1^\top(t_0), \ldots, x_q^\top(t_0))^\top = x(t_0) = \xi(t_0) - \phi(t_0) = x_0$.

Здесь $X_s^{(\mu)}(x_s) : R^{n_s} \to R^{n_s}$ и $X_{1s}^{(\mu)}(t, x_1, \ldots, x_q) : R^+ \times R^{n_1} \times \cdots \times R^{n_q} \to R^{n_s}$ $(s = \overline{1, q})$, $x_s \in R^{n_s}$, $R^{n_1} \bigoplus \cdots \bigoplus R^{n_q} = R^n$, $x = (x_1^\top, \ldots, x_q^\top)^\top$. $X_s^{(\mu)}(x_s)$ и $X_{1s}^{(\mu)}(t, x_1, \ldots, x_q)$ являются непрерывными по совокупности переменных и, кроме того, непрерывно дифференцируемыми по переменным $x_1, \ldots, x_q$. Векторные функции $X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, x_1, \ldots, x_q) : R^+ \times R^{n_1} \times \cdots \times R^{n_q} \to R^{n_s}$ определяют взаимосвязи подсистем $X_s^{(\mu)}(x_s)$, $s, j = \overline{1, q}$, т.е. подсистемы, а функции $X_{1s}^{(\mu)}(t, x_1, \ldots, x_q)$ описывают внутренние взаимосвязи подсистем:

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(\mu)}(x_s) + X_{1s}^{(\mu)}(t, x_1, \ldots, x_q), \quad s = \overline{1, q}.$$

Векторные функции $X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, x_1, \ldots, x_q)$ обладают теми же свойствами, что и $X_{1s}^{(\mu)}(t, x_1, \ldots, x_q)$, $\Delta_s(t)$ — непрерывные ограниченные векторные функции, $\|\overline{\Delta}_s(t)\| < \widetilde{\Delta}_s$, $\widetilde{\Delta}_s > 0$, $M_s(t, 0) \equiv 0$, $s = \overline{1, q}$. Верхний индекс $^\top$ означает транспонирование, а индекс $\mu = \frac{p}{q} > 1$, p и q нечетные, указывает на порядок однородности $X_s^{(\mu)}(x_s)$ и $X_{1s}^{(\mu)}(t, x_1, \ldots, x_q)$, у векторных функций $X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, x_1, \ldots, x_q)$ верхний индекс $\mu+\alpha$, $0 < \alpha = \mathrm{const}$ также указывает на порядок однородности относительно $x_1, \ldots, x_q$. Всюду в дальнейшем будем считать, что норма вектора является евклидовой.

Будем считать, что структура многосвязной системы (4) может быть такой, что связи между подсистемами могут с течением времени отключаться, включаться или неопределенным образом изменяться. Следовательно, возникает проблема определения структуры многосвязной системы таким образом, чтобы изменения связей между подсистемами не нарушали устойчивости системы. В случае, когда устойчивость системы и ее частей сохраняется при всевозможных изменениях связей, то многосвязная система называется устойчивой к связыванию или коннективно устойчивой ([20], гл. 2). Очевидно, (4) является системой при полностью включенных связях. Режим функционирования ее в этом случае будет предельным. Чтобы отразить структурные изменения в (4), в систему вводится ([21], гл. 8; [20], гл. 2) так называемая фундаментальная матрица связей $\overline{E} = (\overline{e}_{sj})_{1,1}^{q,q}$, где $\overline{e}_{sj} = 1$, если возможна связь между подсистемами, и нулю, если связи отсутствуют. При этом матрица $\overline{E}$ отражает лишь ту структуру системы, при которой включены все связи. Следовательно, чтобы полнее отразить структурные изменения в исходную систему (4) вводится еще матрица текущих связей E. Из определения ([20], с. 88) матрицы текущих связей E следует, что ее элементы $e_{sj} \in [0; 1]$, $s, j = \overline{1, q}$. При этом элементы матрицы текущих связей могут быть одновременно кусочно-непрерывными по t и непрерывными по фазовым переменным и, кроме того, $e_{sj}(t, x) \in [0; 1]$, $s, j = \overline{1, q}$. Здесь x — вектор фазовых переменных системы (4). Однако для получения искомых оценок с помощью метода векторных функций Ляпунова не требуется выполнения вышеуказанных условий ([20], с. 89). Поэтому, не умаляя общности исследований, в дальнейшем будем предполагать, что элементы матрицы E принимают, также, как и элементы матрицы $\overline{E}$, значения 0 и 1 ([21], с. 279):

$$e_{sj} = \begin{cases} 0, & \text{если } \overline{e}_{sj} = 0; \\ 0, & \text{если } \overline{e}_{sj} = 1, \text{ но соответствующая связь отсутствует;} \\ 1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В дальнейшем матрицы текущих связей обозначаются через E. Очевидно, $E \leq \overline{E}$ (неравенство поэлементное). При этом будем говорить, что $E \in \overline{E}$. С целью сокращения числа варьируемых связей некоторые связи фиксируются, т. е. исследуемая система является семейством систем, каждая из которых имеет “свои” фиксируемые матрицы связей.

Подробное описание многосвязных систем при указанных структурных изменениях связей можно найти в ([20], гл. 2; [21], гл. 2).

При этом число всех возможных матриц E для данной системы может оказаться достаточно большим. Поэтому проверка условий устойчивости или синтез коннективной устойчивости путем перебора всех возможных матриц E и исследование устойчивости для каждой матрицы E в этом переборе возможно только при небольшом числе отключаемых связей. Следовательно, в теории коннективной устойчивости имеются только две возможности: максимально возможное сокращение числа варьируемых связей и поиск специальных условий коннективной устойчивости, с помощью которых удается сократить перебор отключаемых (включаемых) связей.

Приведем известное

Определение. Система

$$\frac{dx}{dt} = M(t, x), \quad M(t, 0) \equiv 0$$

называется *коннективно устойчивой* (*коннективно асимптотически устойчивой*), если она устойчива (асимптотически устойчива) по Ляпунову при всех $E \in \overline{E}$.

“Линейным” приближением (4) является система

$$\frac{dy_s}{dt} = X_s^{(\mu)}(y_s) + X_{1s}^{(\mu)}(t, y_1, \ldots, y_q) + \Delta_s(t), \tag{5}$$

для которой $(x_1^\top(t_0, \ldots, x_q^\top(t_0))^\top = x(t_0) = x_0 = y_0 = y(t_0) = (y_1^\top(t_0), \ldots, y_q^\top(t_0))^\top$, $s = \overline{1, q}$.

Далее опишем структуру (4). Для этого введем фундаментальные матрицы связей $\overline{L} = (\overline{l}_{sj})_{1,1}^{q,q}$ и $\overline{E} = (\overline{e}_{sj})_{1,1}^{q,q}$, а также матрицы текущих связей $L = (l_{sj})_{1,1}^{q,q}$ и $E = (e_{sj})_{1,1}^{q,q}$, $L \in \overline{L}$,

$E \in \overline{E}$. Здесь L и $\overline{L}$ есть соответственно матрица текущих связей и фундаментальная матрица на уровне подсистем. Тогда векторные функции взаимосвязей представим в виде

$$X_{1s}^{(\mu)}(t, x_1, \ldots, x_q) ::= X_{1s}^{(\mu)}(t, l_{s1}x_1, \ldots, l_{sq}x_q),$$
$$X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, x_1, \ldots, x_q) ::= X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, e_{s1}x_1, \ldots, e_{sq}x_q).$$

В этом случае системы (4), (5) соответственно будут иметь вид

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(\mu)}(x_s) + X_{1s}^{(\mu)}(t, l_{s1}x_1, \ldots, l_{sq}x_q) + \sum_{j=1}^{q} X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, e_{s1}x_1, \ldots, e_{sq}x_q) + \Delta_s(t), \tag{6}$$

$$\frac{dy_s}{dt} = X_s^{(\mu)}(y_s) + X_{1s}^{(\mu)}(t, l_{s1}y_1, \ldots, l_{sq}y_q) + \Delta_s(t), \quad s = \overline{1, q}. \tag{7}$$

Исходя из вида правых частей системы (4) и структуры матриц L, $\overline{L}$, E, $\overline{E}$, следует, что все условия теоремы Каратеодори о существовании и единственности решения задачи Коши для систем (6), (7) выполнены ([22], гл. 1). Таким образом, решениями систем (6), (7) являются абсолютно непрерывные векторные функции.

В отличие от [15] предположим, что справедливы неравенства

$$\left\|X_{1s}^{(\mu)}(t, l_{s1}x_1, \ldots, l_{sq}x_q)\right\| \le \sum_{j=1}^{q} l_{sj}a_{1sj}\|x_j\|^{\mu}, \tag{8}$$

$$\left\|X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, e_{s1}x_1, \ldots, e_{sq}x_q)\right\| \le \sum_{j=1}^{q} e_{sj}b_{sj}\|x_j\|^{\mu+\alpha} \tag{9}$$

при $\|x_j\| \le r_j$, $\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{q} r_j^2} = r$, $s = \overline{1, q}$. Здесь a_{1sj} и b_{sj} — положительные вещественные числа, $s, j = \overline{1, q}$.

Пусть нулевое решение систем

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(\mu)}(x_s), \quad s = \overline{1, q}, \tag{10}$$

асимптотически устойчиво. Следовательно, по теореме Зубова–Красовского ([2], с. 112–138; [4]; [7], § 22) для каждой системы (10) существует функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям

$$\begin{gathered} c_{1s}\|x_s\|^{m+1-\mu} \le V_s(x_s) \le c_{2s}\|x_s\|^{m+1-\mu}, \\ \|\operatorname{grad} V_s(x_s)\| \le c_{3s}\|x_s\|^{m-\mu}, \\ \left.\frac{dV_s}{dt}\right|_{(10)} \le -c_{4s}\|x_s\|^{m} \end{gathered} \tag{11}$$

при $\|x_s\| \le r_s$, $\sqrt{\sum\limits_{s=1}^{q} r_s^2} = r$, $s = \overline{1, q}$. Здесь m — достаточно большое четное вещественное положительное число, c_{1s}, c_{2s}, c_{3s}, c_{4s} — постоянные положительные вещественные числа, $s = \overline{1, q}$.

С целью получения искомых оценок воспользуемся функциями Ляпунова $V_s(x_s)$, $s=\overline{1,q}$, удовлетворяющими условиям (11). Для системы (6) выберем функцию Ляпунова в виде

$$V(x)=\sum_{s=1}^{q} d_s V_s(x_s), \tag{12}$$

где $d_s>0$ — вещественные числа.

Найдем полную производную функции (12) вдоль решений системы (6), т. е.

$$\frac{dV(x)}{dt}|_{(6)}=\sum_{s=1}^{q} d_s\frac{dV_s(x_s)}{dt}\le\sum_{s=1}^{q} d_s\Big(-c_{4s}\|x_s\|^m+$$
$$+\big(\operatorname{grad}V_s(x_s),X_{1s}^{(\mu)}(t,l_{s1}x_1,\dots,l_{sq}x_q)+\sum_{j=1}^{q}X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t,e_{s1}x_1,\dots,e_{sq}x_q)+\Delta_s(t)\big)\Big). \tag{13}$$

Тогда в силу ограничений на $\Delta_s(t)$ и оценок (8), (9) получим

$$\frac{dV(x)}{dt}\Big|_{(6)}\le\sum_{s=1}^{q} d_s\Bigg((-c_{4s}+l_{ss}c_{3s}a_{1ss})\|x_s\|^m+$$
$$+c_{3s}\|x_s\|^{m-\mu}\left(\sum_{j=1,j\neq s}^{q} l_{sj}a_{1sj}\|x_j\|^{\mu}+c_{3s}\|x_s\|^{m-\mu}\left(\sum_{j=1}^{q} e_{sj}b_{sj}\|x_j\|^{\mu+\alpha}+\widetilde{\Delta}_s\right)\right)\Bigg). \tag{14}$$

Сформируем матрицы $W_1(L)=\|w_{sj}^{(1)}\|_{1,1}^{q,q}$, где $w_{sj}^{(1)}=-c_{4s}+l_{sj}c_{3s}a_{1sj}$ при $s=j$, $w_{sj}^{(1)}=l_{sj}c_{3s}a_{1sj}$, где $s\neq j$, и $W_2=\|w_{sj}^{(2)}\|_{1,1}^{q,q}$, где $w_{sj}^{(2)}=e_{sj}c_{3s}b_{sj}$. Матрица $W_1(L)$ — метцлерова ([21], с. 199–207). Предположим, что величины a_{1sj} таковы, что $-c_{4s}+l_{sj}c_{3s}a_{1sj}<0$ при $s=j$ (это следует из задания $X_{1s}^{(\mu)}$, $s=\overline{1,q}$), и, кроме того, существуют такие значения постоянных d_s, для которых справедливы неравенства

$$\nu^{(1)}=d_1(-c_{11}+c_{31}l_{11}a_{111})+d_2l_{21}c_{32}a_{121}+\dots+d_ql_{q1}c_{3q}a_{1q1}<0,$$
$$\nu^{(2)}=d_1l_{12}c_{31}a_{112}+d_2(-c_{42}+l_{22}c_{32}a_{122})+\dots+d_ql_{q2}c_{3q}a_{1q2}<0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\nu^{(q)}=d_1l_{1q}c_{31}a_{11q}+d_2l_{2q}c_{32}a_{12q}+\dots+d_q(-c_{4q}+c_{3q}l_{qq}a_{1qq})<0.$$

Тогда будем иметь

$$-\nu(L)=\max\{\nu^{(1)},\dots,\nu^{(q)}\}<0. \tag{15}$$

Далее введем обозначение $\nu_j^{(1)}(E)=\sum\limits_{s=1}^{q} d_se_{sj}c_{ss}b_{sj}$, $j=\overline{1,q}$. Очевидно,

$$\nu_1(E)=\max\{\nu_1^{(1)},\dots,\nu_q^{(1)}\}>0. \tag{16}$$

Из (12) следует, что всегда можно найти положительные вещественные числа α_1, α_2, α_3, α_4 такие, что будут выполняться неравенства

$$\alpha_3\|x\|^{m+1-\mu}\le\alpha_1\sum_{s=1}^{q}\|x_s\|^{m+1-\mu}\le\sum_{s=1}^{q} d_sc_{1s}\|x_s\|^{m+1-\mu}\le$$
$$\le V(x)\le\sum_{s=1}^{q} d_sc_{2s}\|x_s\|^{m+1-\mu}\le\alpha_2\sum_{s=1}^{q}\|x_s\|^{m+1-\mu}\le\alpha_4\|x\|^{m+1-\mu}, \tag{17}$$

где $\alpha_1 = \min\limits_{1\le s\le q}\{d_s c_{1s}\}$, $\alpha_2 = \max\limits_{1\le s\le q}\{d_s c_{2s}\}$. Также необходимо отметить, что всегда найдутся такие положительные вещественные числа r, a_5, a_6, c_3, при которых выполняются неравенства

$$-\sum_{s=1}^{q}\|x_s\|^m \le -a_5\|x\|^m, \quad \sum_{j=1}^{q}\|x_j\|^{m+\alpha} \le a_6\|x\|^{m+\alpha}, \quad \sum_{s=1}^{q} c_{3s}\|x_j\|^{m-\alpha} \le c_3\|x\|^{m-\alpha}, \tag{17_1}$$

где $\|x\| \le r$.

Таким образом, с учетом (15)—(17), (17_1) неравенство (14) примет вид

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(6)} \le -a_5\nu(L)\|x\|^m + a_6\nu_1(E)\|x\|^{m+\alpha} + \tilde{\tilde{\Delta}}\|x\|^{m-\mu}, \tag{18}$$

где a_5, a_6, c_3 — некоторые вещественные положительные числа, $\tilde{\tilde{\Delta}} = \sum\limits_{s=1}^{q}\tilde{\Delta}_s$.

Далее введем преобразование $\rho = V^{1/(m+1-\mu)}$. Тогда

$$\frac{\rho}{\alpha_4^{\frac{1}{m+1-\mu}}} \le \|x\| \le \frac{\rho}{\alpha_3^{\frac{1}{m+1-\mu}}}. \tag{19}$$

С учетом (19) в неравенстве (18) перейдем к одной неизвестной функции $\rho = \rho(t)$. В результате получим

$$\frac{d\rho}{dt} \le \frac{1}{m+1-\mu}\left(-\frac{\nu(L)a_5}{\alpha_4^{\frac{m}{m+1-\mu}}}\rho^{\mu} + \frac{\nu_1(E)a_6}{\alpha_3^{\frac{m+\alpha}{m+1-\mu}}}\rho^{\mu+\alpha} + \frac{c_3\tilde{\tilde{\Delta}}}{\alpha_3^{\frac{m-\mu}{m+1-\mu}}}\right),$$

дифференциальное уравнение сравнения для которого имеет вид

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{m+1-\mu}\left(-\frac{\nu(L)a_5}{\alpha_4^{\frac{m}{m+1-\mu}}}u^{\mu} + \frac{\nu_1(E)a_6}{\alpha_3^{\frac{m+\alpha}{m+1-\mu}}}u^{\mu+\alpha} + \frac{c_3\tilde{\tilde{\Delta}}}{\alpha_3^{\frac{m-\mu}{m+1-\mu}}}\right) \equiv \Omega(u). \tag{20}$$

Здесь

$$\rho_0 = \rho(t_0) = V^{\frac{1}{m+1-\mu}}(x_1(t_0),\dots,x_q(t_0)) = V^{\frac{1}{m+1-\mu}}(t_0) \le \alpha_4^{\frac{1}{m+1-\mu}}\|x_0\|,$$
$$\rho_0 = \rho(t_0) = u_0 = u(t_0) = \overline{a}_4^{\frac{1}{m+1-\mu}}\|x_0\|.$$

Постоянная $\overline{a}_4$ определяется из уравнения $V^{\frac{1}{m+1-\mu}}(t_0) = \overline{a}_4^{\frac{1}{m+1-\mu}}\|x_0\|$.

Предположим, что алгебраическое уравнение $\Omega(u) = 0$ в области $u \ge 0$ имеет решения. Тогда их будет не более двух: $u_1^{1/\mu}(\nu(L),\nu_1(E),\alpha_3,\alpha_4,a_5,a_6,c_3)$ и $u_2^{1/\mu}(\nu(L),\nu_1(E),\alpha_3,\alpha_4,a_5,a_6,c_3)$. Для краткости записи обозначим их через $u_1^{1/\mu}(\cdot)$ и $u_2^{1/\mu}(\cdot)$. Пусть $0 \le u_1^{1/\mu}(\cdot) \le u_2^{1/\mu}(\cdot)$. Очевидно,

$$\Omega(u) = \begin{cases} \ge 0 & \text{при } \left(\left(0 \le u \le u_1^{\frac{1}{\mu}}(\cdot)\right) \wedge \left(u \ge u_2^{\frac{1}{\mu}}(\cdot)\right)\right), \\ < 0 & \text{при } u_1^{\frac{1}{\mu}}(\cdot) < u < u_2^{\frac{1}{\mu}}(\cdot). \end{cases}$$

Отсюда следует, что $u_1^{\frac{1}{\mu}}(\cdot)$ является асимптотически устойчивым положением равновесия уравнения (20), а $u_2^{\frac{1}{\mu}}(\cdot)$ — неустойчивым. Следовательно, решение $u(t, t_0, u_0)$ уравнения (20) монотонно стремится к $u_1^{\frac{1}{\mu}}(\cdot) < u_2^{\frac{1}{\mu}}(\cdot)$ при $t - t_0 \to \infty$.

Из теоремы сравнения ([21], гл. 5; [22], гл. 1) получим $\rho(t) \leq u(t)$, $t \geq t_0$. Здесь $\rho_0 = \rho(t_0) = u_0 = u(t_0)$. Тогда с учетом (17) и (19) верхняя оценка на решения системы (6) будет иметь вид

$$\sup_{t \geq t_0} \|x(t, t_0, x_0)\| \leq \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{m+1-\mu}}} \max\left\{\overline{a}_4^{\frac{1}{m+1-\mu}} \|x_0\|, u_1^{\frac{1}{\mu}}(\nu(L), \nu_1(E), \alpha_3, \alpha_4, a_5, a_6, c_3)\right\} \tag{21}$$

при $\overline{a}_4^{\frac{1}{m+1-\mu}} \|x_0\| \leq u_2^{1/\mu}(\nu(L), \nu_1(L), \alpha_3, \alpha_4, c)$.

Теперь приступим к построению оценки погрешности линеаризации, т. е. к построению оценки максимального отклонения решений системы (6) и ее линеаризованного варианта (7) при одинаковых начальных данных. Рассмотрим две интегральные кривые $x_s(t, t_0, x_0)$ и $y_s(t, t_0, y_0)$ соответственно систем (6) и (7) и векторную функцию $\varepsilon_s(t, t_0, \varepsilon_0) = x_s(t, t_0, x_0) - y_s(t, t_0, y_0)$, $\varepsilon_0 = x_{s0} - y_{s0}$, $s = \overline{1, q}$. Тогда

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon_s}{dt} = X_s^{(\mu)}\big(\varepsilon_s + y_s(t)\big) - X_s^{(\mu)}\big(y_s(t)\big) + X_{1s}^{(\mu)}\Big(t, l_{s1}\big(\varepsilon_1 + y_1(t)\big), \ldots, l_{sq}\big(\varepsilon_q + y_q(t)\big)\Big) - \\ - X_{1s}^{(\mu)}\Big(t, l_{s1}\big(y_1(t)\big), \ldots, l_{sq}\big(y_q(t)\big)\Big) + \sum_{j=1}^{q} X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, e_{s1}x_1, \ldots, e_{sq}x_q).\end{aligned} \tag{22}$$

Запишем систему (22) в упрощенном виде:

$$\frac{d\varepsilon_s}{dt} = \phi_s(y_s(t), \varepsilon_s) + \phi_{1s}(t, l_{s1}(y_1(t)), \ldots, l_{sq}(y_q(t))) + \sum_{j=1}^{q} X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, e_{s1}y_1, \ldots, e_{sq}y_q), \tag{23}$$

где

$$\phi_s(y_s(t), \varepsilon_s) = X_s^{(\mu)}(y_s(t) + \varepsilon_s) - X_s^{(\mu)}(y_s(t)),$$

$$\begin{aligned}\phi_{1s}(t, l_{s1}\varepsilon_1, \ldots, l_{sq}\varepsilon_q) = X_{1s}^{(\mu)}(t, l_{s1}(y_1(t) + \varepsilon_1), \ldots, l_{sq}(y_q(t) + \varepsilon_q)) - \\ - X_{1s}^{(\mu)}(t, l_{s1}(y_1(t)), \ldots, l_{sq}(y_q(t))), \quad s = \overline{1, q}.\end{aligned}$$

Допустим, что для каждой системы

$$\frac{\overline{\varepsilon}_s}{dt} = \phi_s(y_s(t), \overline{\varepsilon}_s), \quad s = \overline{1, q}, \tag{24}$$

существуют функции Ляпунова $V_{1s}(t, \overline{\varepsilon}_s)$, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_{1s}\Psi(\|\overline{\varepsilon}_s\|) \leq V_{1s}(t, \overline{\varepsilon}_s) \leq \alpha_{2s}\Psi(\|\overline{\varepsilon}_s\|), \quad \left\|\frac{\partial V_{1s}(t, \overline{\varepsilon}_s)}{\partial \overline{\varepsilon}_s}\right\| \leq M_{1s}, \tag{25}$$

$$\frac{dV_{1s}}{dt}\Big|_{(24)} \leq -c_{1s}\Psi(\|\overline{\varepsilon}_s\|) \ \text{ при } \ \|\overline{\varepsilon}_s\| \leq 2r_s,$$

где $\alpha_{1s}, \alpha_{2s}, c_{1s}, M_s$ — положительные вещественные числа, $\Psi(\|\cdot\|)$ — положительная неограниченно строго возрастающая функция, причем $\Psi(0) = 0$, $s = \overline{1, q}$. Будем считать, что при $y_s \in R^{n_s}$, $\varepsilon_s \in R^{n_s}$ и $t \geq t_0 > 0$ справедливы неравенства

1) $\|\phi_{1s}(t, l_{s1}\varepsilon_1, \ldots, l_{sq}\varepsilon_q)\| \leq \sum\limits_{j=1}^{q} l_{sj}\theta_{sj}\Psi(\|\varepsilon_j\|)$,

2) $\sum\limits_{j=1}^{q} \|X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, x_1(t), \dots, x_q(t))\| \le \sum\limits_{j=1}^{q} e_{sj}\gamma_{sj} \|x_j(t)\|^{\mu+\alpha}$,

где θ_{sj}, γ_{sj} — положительные вещественные числа, $\|y_j\| \le r_j$, $\|\varepsilon_j\| \le 2r_j$.

Таким образом, учитывая функции $V_{1s}(t, \overline{\varepsilon}_s)$, удовлетворяющие условиям (25), а также неравенства 1) и 2) для каждого $s = \overline{1, q}$ получим

$$\frac{dV_{1s}}{dt}\Big|_{(23)} \le -\overline{c}_{1s}\Psi(\|\varepsilon_s\|) + \big(\mathrm{grad}_{\varepsilon_s} V_{1s}(t, \varepsilon_s), \phi_{1s}(t, l_{1s}y_1(t), \dots, l_{sq}y_q(t), \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)\big) + \\ + \sum_{j=1}^{q} X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, e_{1s}x_1(t), \dots, e_{qs}x_q(t)) \le \\ \le -\overline{c}_{1s}\Psi(\|\varepsilon_s\|) + M_{1s}\sum_{j=1}^{q} l_{sj}\theta_{sj}\Psi(\|\varepsilon_j\|) + M_{1s}\sum_{j=1}^{q} e_{sj}\gamma_{sj} \|x_j(t)\|^{\mu+\alpha}. \quad (26)$$

Для системы (23) выберем функцию Ляпунова

$$V^{(1)}(t, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{q} d_s^{(1)} V_s(t, \varepsilon_s), \quad (27)$$

где $d_s^{(1)} > 0$, $s = \overline{1, q}$.

С учетом условий (25), неравенств 1) и 2), а также функции (27), из (26) получим

$$\frac{dV_1}{dt}\Big|_{(23)} \le \sum_{s=1}^{q} d_s^{(1)} \Big[-\overline{c}_{1s}\Psi(\|\varepsilon_s\|) + M_{1s}\sum_{j=1}^{q} l_{sj}\theta_{sj}\Psi(\|\varepsilon_j\|)\Big] + \\ + \sum_{s=1}^{q} d_s^{(1)} M_{1s} \sum_{j=1}^{q} e_{sj}\gamma_{sj} \|x_j(t)\|^{\mu+\alpha}. \quad (28)$$

Далее введем матрицу $\Theta(L) = \|\theta_{1sj}\|_{1,1}^{q,q}$, где

$$\theta_{1sj} = \begin{cases} -\overline{c}_{1s} + M_{1s}l_{sj}\theta_{sj} & \text{при } s = j, \\ M_{1s}l_{sj}\theta_{sj} & \text{при } s \ne j. \end{cases}$$

Матрица $\Theta(L)$ является матрицей Метцлера. Пусть $-\overline{c}_{1s} + M_{1s}l_{sj}\theta_{sj} < 0$ при $s = j$ и существуют такие $d_s^{(1)}$, $s = \overline{1, q}$, при которых выполняются неравенства

$$(-\overline{c}_{11} + M_{11}l_{11}\theta_{11})d_1^{(1)} + M_{12}l_{21}\theta_{21}d_2^{(1)} + \dots + M_{1q}l_{q1}\theta_{q1} < 0, \\ M_{11}l_{12}\theta_{12}d_1^{(1)} + (-\overline{c}_{12} + M_{12}l_{22}\theta_{22})d_2^{(1)} + \dots + M_{1q}l_{q2}\theta_{q2} < 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ M_{11}l_{1q}\theta_{1q}d_1^{(1)} + M_{12}l_{2q}\theta_{2q}d_2^{(1)} + \dots + (-\overline{c}_{1q} + M_{1q}l_{qq}\theta_{qq})d_q^{(1)} < 0.$$

Тогда $\nu_2(L) = \max\{\nu_2^{(1)}, \dots, \nu_2^{(q)}\} < 0$. Выберем положительные вещественные числа $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(1)}$, $\alpha_3^{(1)}$, $\alpha_4^{(1)}$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$\alpha_3^{(1)}\Psi(\|\varepsilon\|) \le \alpha_1^{(1)}\sum_{s=1}^{q} d_s^{(1)}\Psi(\|\varepsilon_s\|) \le \sum_{s=1}^{q} d_s^{(1)}a_{1s}\Psi(\|\varepsilon_s\|) \le$$
$$\le V^{(1)}(t,\varepsilon) \le \sum_{s=1}^{q} d_s^{(1)}a_{2s}\Psi(\|\varepsilon_s\|) \le \alpha_2^{(1)}\sum_{s=1}^{q} d_s^{(1)}\Psi(\|\varepsilon_s\|) \le \alpha_4^{(1)}\Psi(\|\varepsilon\|), \quad (29)$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)^\top$. С учетом (29) неравенство (28) примет вид

$$\frac{dV^{(1)}(t,\varepsilon)}{dt}\Big|_{(23)} \le -\frac{\nu_2(L)}{\alpha_4^{(1)}}V^{(1)}(t,\varepsilon) + \sum_{s=1}^{q} d_s^{(1)}M_{1s}\sum_{j=1}^{q} e_{sj}\gamma_{sj}\,\|x_j(t)\|^{\mu+\alpha}. \quad (30)$$

Неравенству (30) соответствует дифференциальное уравнение сравнения

$$\frac{d\widetilde{\rho}}{dt} = -\frac{\nu_2(L)}{\alpha_4^{(1)}}\widetilde{\rho} + \sum_{s,j=1}^{q} d_s^{(1)}M_{1s}e_{sj}\gamma_{sj}\,\|x_j(t)\|^{\mu+\alpha} \quad (31)$$

с начальными условиями $\widetilde{\rho}(t_0) = \widetilde{\rho}_0 = V_1(t_0,\varepsilon_0) = \sum\limits_{s=1}^{q} d_s^{(1)}V_s(t_0,\varepsilon_0) = V_{10}$. По теореме сравнения ([21], гл. 5; [18], гл. 1) имеем $V^{(1)}(t,\varepsilon(t)) \le \widetilde{\rho}(t)$ при $t \ge t_0 \ge 0$. Интегрируя уравнение (31), получим

$$\widetilde{\rho}(t) \le \frac{\alpha_4^{(1)}}{\nu_2(L)}\sum_{s,j=1}^{q} d_s^{(1)}M_{1s}e_{sj}\gamma_{sj}\,\|x_j(t)\|^{\mu+\alpha}.$$

Отсюда следует

$$V^{(1)}(t,\varepsilon(t)) \le \frac{\alpha_4^{(1)}}{\nu_2(L)}\sum_{s,j=1}^{q} d_s^{(1)}M_{1s}e_{sj}\gamma_{sj}\,\|x_j(t)\|^{\mu+\alpha} \quad \text{при} \quad t \ge t_0 \ge 0. \quad (32)$$

Введем величины $\nu_{sj}^{(3)} = d_s^{(q)}M_{1s}e_{sj}\gamma_{sj}$, $s,j = \overline{1,q}$. Пусть $\nu_3(E) = \max\limits_{1\le s,j\le q}\{\nu_{sj}^{(3)}\} > 0$. Тогда неравенство (32) будет иметь вид

$$V^{(1)}(t,\varepsilon(t)) \le \frac{\alpha_4^{(1)}\nu_3(E)}{\nu_2}\sum_{j=1}^{q}\|x_j(t)\|^{\mu+\alpha}. \quad (32_1)$$

С учетом (27), (29) и (32_1) получим искомую оценку

$$\sup_{t\ge t_0}\|\varepsilon(t)\| \le \frac{\alpha_2\alpha_6\nu_3}{\nu_2}\Psi^{-1}\left(-\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{m+1-\mu}}}\max\left\{\overline{a}_4^{-\frac{1}{m+1-\mu}}\|x_0\|,\, u_1^{\frac{1}{\mu}}(\nu(L),\nu_1(E,a_5,a_6,c_3))\right\}\right). \quad (33)$$

Следовательно, доказана

Теорема. *Предположим, что*

а) $x = 0$ *является положением равновесия системы* $\dot{x}_s = M_s(t,x)$ $(s = \overline{1,q})$;

б) *выполнены все условия на правые части системы* (6);

в) *для систем* (10), (24) *существуют функции Ляпунова* $V_s(t,x_s)$ *и* $V_{1s}(t,\varepsilon_s)$, *удовлетворяющие соответственно условиям* (11) *и* (25), $s = \overline{1,q}$;

г) *алгебраическое уравнение* $\Omega(u) = 0$ *в области* $u \ge 0$ *имеет решения* $0 \le u_1^{1/\mu}(\nu(L),\nu_1(E),\alpha_3,\alpha_4,c) \le u_2^{1/\mu}(\nu(L),\nu_1(E),\alpha_3,\alpha_4,c)$ *при всех* $L \in \overline{L}$, $E \in \overline{E}$;

д) $\overline{a}_4^{1/(\mu+1-m)}\|x_0\| \le u_2^{1/\mu}(\nu,\nu_1,\alpha_3,\alpha_4,c)$ *при всех* $L\in\overline{L}$, $E\in\overline{E}$.

Тогда решения системы (6) *существуют при всех* $t\ge t_0\ge 0$ *и справедливы оценки* (21) *и* (33).

Замечание 1. Оценки (21) и (33) позволяют получить более точные оценки по сравнению с аналогичными оценками, найденные в работе [15], так как здесь в условия (8), (9) "входят" только матрицы текущих связей L и E.

Замечание 2. Изучаемые здесь многосвязные динамические системы, в процессе "функционирования" могут отключаться–включаться, т. е. испытывают структурные изменения. Нетрудно заметить, что метод функций Ляпунова для построения указанных оценок применим и к многосвязным динамическим системам иной структуры возмущений (см., например, [23]–[26]).

Пример. Пусть дана нелинейная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt} = -2x_1^3 + b_1l_{11}x_1^3 + b_2e_{12}x_2^6 + \Delta_1(t), \tag{34_1}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -2x_2^3 + p_1l_{22}x_2^3 + p_2e_{21}x_1^6 + \Delta_2(t), \tag{34_2}$$

где b_1, b_2, p_1, p_2 — положительные вещественные постоянные, $|\Delta_1(t)| < \widetilde{\Delta}_1$, $|\Delta_2(t)| < \widetilde{\Delta}_2$, $0<\widetilde{\Delta}_i = \mathrm{const}$, $i=1,2$. Здесь l_{11}, l_{22} и e_{12}, e_{21} — элементы соответственно матриц текущих связей $L=\|l_{sj}\|_{1,1}^{2,2}$, $E=\|e_{sj}\|_{1,1}^{2,2}$. В этих матрицах в силу их задания $l_{12}=l_{21}=0$, $e_{11}=e_{22}=0$, а остальные значения элементов матриц L и E могут принимать значения 0 и 1. Будем считать, что система (34_1)–(34_2) является многосвязной, система первого приближения которой имеет вид

$$\frac{dy_1}{dt} = (-2+b_1l_{11})y_1^3 + \Delta_1(t), \tag{35_1}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = (-2+p_1l_{22})y_2^3 + \Delta_2(t). \tag{35_2}$$

Отметим, что $y_{10}=y_1(t_0)=x_1(t_0)=x_{10}=1$, $y_{20}=y_2(t_0)=x_2(t_0)=x_{20}=1$. В качестве подсистем системы (34_1)–(34_2) примем уравнения

$$\frac{d\overline{y}_1}{dt} = (-2+b_1l_{11})\overline{y}_1^3, \tag{36_1}$$

$$\frac{d\overline{y}_2}{dt} = (-2+p_1l_{22})\overline{y}_2^3. \tag{36_2}$$

Для дифференциального уравнения (36_1) выберем функцию Ляпунова вида $V_1(\overline{y}_1)=\overline{y}_1^4$, а для (36_2) — функцию $V_2(\overline{y})=\overline{y}_2^4$. Тогда в качестве функции Ляпунова для системы (34_1)–(34_2) выберем $V(x_1,x_2)=x_1^4+x_2^4$. Очевидно, $V(x_1,x_2)$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2}\|x\|^4 \le V(x_1,x_2) \le \|x\|^4, \tag{$*$}$$

где $x=(x_1,x_2)^T$. Вдоль решений системы (34_1)–(34_2) найдем полную производную функции $V(x_1,x_2)$ по времени:

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(34_1)-(34_2)} = 4[(-2+b_1l_{11})x_1^6 + b_2e_{12}x_1^3x_2^6 + x_1^3\Delta_1(t) + \\ + (-2+p_1l_{22})x_2^6 + p_2e_{12}x_2^3x_1^6\Delta_2(t) + x_2^3\Delta_2(t)]. \tag{37}$$

Далее введем величины $\nu^{(i)}$, ν, ν_1, $i=\overline{1,2}$, и допустим

$$-\nu^{(1)} = -2 + b_1 l_{11} < 0, \quad -\nu^{(2)} = -2 + p_1 l_{22} < 0,$$
$$\nu(L) = \max\{-2 + c_1 l_{11}, -2 + p_1 l_{22}\}, \quad \nu_1(E) = \max\{b_2 e_{12}, p_2 e_{21}\}.$$

Предположим, что $b_1 = p_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = p_2 = l_{11} = l_{22} = e_{12} = e_{21} = 1$, $\widetilde{\Delta}_1 = \widetilde{\Delta}_2 = 1$. Здесь возможны и другие комбинации. Тогда $\nu(L) = \max\{-2+\frac{1}{2}, -1+\frac{1}{2}\} = -\frac{1}{2}$, $\nu_1(E) = \max\{1,1\} = 1$. Таким образом, с учетом оценок на $\Delta_1(t)$ и $\Delta_2(t)$ и принятых значений коэффициентов в (37), получим

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(34_1)-(34_2)} = 4\left[-\frac{1}{2}(x_1^6 + x_2^6) + x_1^3 x_2^6 + x_1^6 x_2^3 + x_1^3 + x_2^3\right]. \tag{38}$$

Далее, учитывая, что $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, соотношение (38) преобразуется к виду

$$\frac{dV}{dt}\Big|_{(34_1)-(34_2)} \le 4\left(-\frac{1}{2}\|x\|^6 + \|x\|^9 + \|x\|^3\right), \tag{39}$$

где $\|x\| \le 1$. Тогда с использованием преобразования $\rho = V^{1/4}$, из неравенств (39) и $(*)$ получим

$$\frac{d\rho}{dt} \le -\frac{1}{2}\rho^3 + 2^{\frac{9}{4}}\rho^6 + 2^{\frac{3}{4}}, \tag{40}$$

где $\rho_0 = \rho(t_0) = V^{1/4}(x_1(t_0), x_2(t_0)) = V^{1/4}(t_0)$. Неравенству (40) соответствует дифференциальное уравнение сравнения $\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2}u^3 + 2^{\frac{9}{4}}u^6 + 2^{\frac{3}{4}}$ с начальным условием $u(t_0) = u_0 = \rho_0 = \rho(t_0) = \overline{a}^{\frac{1}{4}}\|x_0\|$. Следовательно, по теореме сравнения имеем $\rho(t) \le u(t)$ при $t \ge t_0 \ge 0$. Далее введем обозначение $u^3 = \overline{u}$. Тогда получим алгебраическое уравнение

$$2^{\frac{9}{4}}\overline{u}^2 - \frac{1}{2}\overline{u} + 2^{\frac{3}{4}}0.0008 = 0,$$

которое в области $\overline{u} \ge 0$ имеет два положительных решения $\overline{u}_1 = 0.002763525$ и $\overline{u}_2 = 0.10234852$. В этом случае окончательно будем иметь $u_1 = \overline{u}_1^{1/3}$, $u_2 = \overline{u}_2^{1/3}$. Таким образом, если $\overline{a}_4^{1/4} \le \frac{3}{2^{21/4}}$, то $\sup\limits_{t\ge t_0}\|x(t)\| \le \sqrt[4]{2}\max\left\{\overline{a}_4^{1/4}\|x_0\|, \frac{1}{2^{21/4}}\right\}$.

Перейдем теперь к отысканию оценки максимального отклонения решений системы (34_1)–(34_2) от решений системы (35_1)–(35_2) с одинаковыми начальными данными. Для этого введем векторную функцию $\varepsilon(t) = x(t) - y(t)$, где $x(t) = (x_1(t), x_2(t))^\top$ — решение системы (34_1)–(34_2), а $y(t) = (y_1(t), y_2(t))^\top$ — решение системы (35_1)–(35_2). Также следует отметить, что здесь $x(t_0) = y(t_0)$. Векторная функция $\varepsilon(t) = (\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t))^\top$ удовлетворяет системе

$$\frac{d\varepsilon_1}{dt} = -\frac{h(x_1,y_1)}{2}\varepsilon_1 + x_2^6(t), \quad \frac{d\varepsilon_2}{dt} = -\frac{h(x_2,y_2)}{2}\varepsilon_2 + x_1^6(t),$$

где $h(x_i,y_i) = x_i^2 + x_i y_i + y_i^2$, $i=1,2$. Функции $h(x_i,y_i)$ являются определенно-положительными. Известно ([16], с. 353), что для $h(x_i,y_i)$ справедлива оценка $h(x_i,y_i) \ge \gamma(x_i^2 + y_i^2)$, $i=1,2$. Начальные условия следующие: $\varepsilon_i(t_0) = 0$, $i=1,2$. Отметим, что вектор-функция $\varepsilon(t) = x(t) - y(t)$ в каждый момент времени определяет разность между решением исходной системы (34_1)–(34_2) и ее первым приближением (35_1)–(35_2) при $x(t_0) = y(t_0)$.

В ([16], с. 353–354) доказано, что дифференциальное уравнение

$$\dot z = gz\left(\sum_{j=0}^{1} x^{2k-j}y^j\right), \tag{41}$$

где $g < 0$, $z = x - y$, обладает свойством равномерной асимптотической устойчивости относительно $t_0 > 0$, x_0 и y_0. Дифференциальные уравнения

$$\dot{\varepsilon}_i = -\frac{h(x_i, y_i)}{z}\varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \tag{42}$$

относятся к классу уравнения (41), поэтому $-h(x_i, y_i) < -\nu^{(i)} < 0$ при $(\|x\| \wedge \|y\|) \leq 1$, $i = 1, 2$. Здесь $\nu^{(i)} > 0$, $i = 1, 2$, есть некоторая постоянная. Тогда, интегрируя уравнения (42), и учитывая при этом, что $\varepsilon_i(t_0) = 0$, $i = 1, 2$, получим искомые оценки

$$\sup_{t \geq t_0} \|\varepsilon_1(t)\| \leq \frac{2}{\nu^{(1)}} \|x_2(t)\|^6 \leq \frac{2}{\nu^{(1)}} \max\left\{\overline{a}_4^{1/4} \|x_0\|, \frac{1}{2^{21/4}}\right\}^6,$$

$$\sup_{t \geq t_0} \|\varepsilon_2(t)\| \leq \frac{4}{\nu^{(2)}} \|x_1(t)\|^6 \leq \frac{4}{\nu^{(2)}} \max\left\{\overline{a}_4^{1/4} \|x_0\|, \frac{1}{2^{21/4}}\right\}^6.$$

Подставив в эти оценки x_0 и $\overline{a}_4$, являющиеся решением уравнения $\overline{a}_4 \|x_0\| = \frac{3}{2^{21/4}}$, получим числовое значение оценки максимального отклонения решений системы (34_1)–(34_2) и (35_1)–(35_2).

Литература

[1] Барбашин Е.А. *Введение в теорию устойчивости* (Наука, М., 1967).

[2] Зубов В.И. *Устойчивость движения* (Высш. школа, М., 1973).

[3] Каменков Г.В. *Устойчивость движения. Колебания. Аэродинамика.* Избр. тр. – Т. 1 (Наука, М., 1967).

[4] Шестаков А.А. *О степенной асимптотике неавтономной однородной и квазиоднородной системы*, Дифференц. уравнения **11** (8), 1427–1436 (1975).

[5] Косов А.А. *Об устойчивости сложных систем по нелинейному приближению*, Дифференц. уравнения **33** (10), 1432–1434 (1997).

[6] Александров А.Ю. *Об устойчивости сложных систем в критических случаях*, Автоматика и телемеханика, № 9, 3–13 (2004).

[7] Красовский Н.Н. *Некоторые задачи теории устойчивости движения* (Физматгиз, М., 1959).

[8] Дружинина О.В. *Методы анализа устойчивости динамической прочности траектории нелинейных дифференциальных систем* (Вычисл. центр им. Дородницына РАН, М., 2008).

[9] Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. *Нелинейное адаптивное управление сложными динамическими системами* (Наука, С.-Петербург, 2000).

[10] *Математические модели в иммунологии и медицине*: Сб. статей 1982–1985 гг. Перевод с англ. / Сост. Г.И. Марчук, Л.Н. Белых (Мир, М., 1986).

[11] Беллман Р. *Математические методы в медицине* (Мир, М., 1987).

[12] Дарховский Б.С. *Оценка погрешности линеаризации*, Дифференц. уравнения **14** (7), 1313–1316 (1978).

[13] Щенников В.Н. *Об оценке погрешностей линеаризации нелинейной дифференциальной системы в критическом случае*, Дифференц. уравнения **17** (3), 568–571 (1981).

[14] Щенников В.Н., Щенникова Е.В. *Построение верхних оценок решений нелинейных систем дифференциальных уравнений и оценок погрешностей линеаризации*, Тр. СВМО **8** (1), 127–135 (2006).

[15] Щенникова Е.В. *Построение коннективных оценок погрешностей линеаризации многосвязных нелинейных систем*, Вестн. Санкт-Петербургск. ун-та, Сер. 10, Вып. 1, 76–83 (2007).

[16] Зубов В.И. *Колебания в нелинейных и управляемых системах* (Судпромгиз, Л., 1962).

[17] Щенников В.Н., Щенникова Е.В. *Оценка погрешности линеаризации относительно части и всех фазовых переменных*, Дифференц. уравнения **37** (1), 132–133 (2001).

[18] Емельянов С.В. *Избранные труды по теории управления* (Наука, М., 2006).

[19] *Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости* / Под ред А.А. Воронова, В.М. Матросова (Наука, М., 1987).

[20] Шильяк Д.Д. *Децентрализованное управление сложными системами* / Под ред. В.М. Матросова и С.В. Савастюка (Мир, М., 1994).

[21] Воронов А.А. *Введение в динамику сложных управляемых систем* (Наука, М., 1985).

[22] Филиппов А.Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью* (Наука, М., 1985).

[23] Маликов А.И. *Матричные системы сравнения в анализе динамики систем управления со структурными изменениями*, Изв. РАН. ТиСУ, № 3, 11–21 (1999).

[24] Григорьев В.В. *Синтез систем управления для систем с изменяющимися параметрами*, Автоматика и телемеханика, № 2, 64–70 (1983).

[25] Пятницкий Е.С. *О равномерной устойчивости при параметрических возмущениях*, Дифференц. уравнения **9** (7), 1262–1274 (1973).

[26] Груйич Л.Т., Мартынюк А.А., Риббенс-Павелла М. *Устойчивость крупномасштабных систем при структурных и сингулярных возмущениях* (Наук. думка, Киев, 1984).

А.Н. Щенников

соискатель, кафедра математики и теоретической механики,
Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева,
ул. Большевистская, д. 68, г. Саранск, 430005, Россия,

e-mail: du@math.mrsu.ru

В.Н. Щенников

профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений,
Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева,
ул. Большевистская, д. 68, г. Саранск, 430005, Россия,

e-mail: du@math.mrsu.ru

A.V. Shchennikov and V.N. Shchennikov

Connectivity estimations of errors of linearization of essentially nonlinear systems

Abstract. We consider a nonlinear dynamical system with several connectivity components. It includes subsystems which can be switched off or on in the operation process, i. e., the system undergoes structural changes. It is well-known that such systems are stable with respect to the connectivity. This property is known as the connectivity stability. In this paper we find an upper bound for the solution of the initial multiply-connected domain of a nonlinear dynamical system and obtain a connectivity estimation for its linearization error.

Keywords: asymptotic stability, Lyapunov vector function, connectivity estimation of the linearization error.

A.V. Shchennikov

Competitor, Chair of Mathematics and Theoretical Mechanics,
Ogarev Mordovia State University,
68 Bolshevistskaya str., Saransk, 430005 Russia,

e-mail: du@math.mrsu.ru

V.N. Shchennikov

Professor, Head of the Chair of Differential Equations,
Ogarev Mordovia State University,
68 Bolshevistskaya str., Saransk, 430005 Russia,

e-mail: du@math.mrsu.ru