ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 4 (431)

УДК 517.927.25

И.С. ЛОМОВ

О БАЗИСНОСТИ НА КОМПАКТАХ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим систему функций $\{u_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $u_k(x) \in \mathcal{L}^p(G)$, $G = (0,1)$, $p \geq 1$, имеющую биортогонально сопряженную в $\mathcal{L}^p(G)$ систему. Следуя В.А. Ильину [1], [2], будем говорить, что система функций $\{u_k\}$ обладает свойством базисности в $\mathcal{L}^p$, если для любой функции $f(x) \in \mathcal{L}^p(G)$ (биортогональный) ряд Фурье этой функции по системе $\{u_k\}$ сходится к $f(x)$ в метрике пространства $\mathcal{L}^p$ на любом компакте $K \subset G$.

В работе выделен класс линейных несамосопряженных дифференциальных операторов, порожденных дифференциальным выражением второго порядка

$$L_1 u = u'' + p_1(x)u' + q_1(x)u, \quad x \in G, \tag{1}$$

с негладким коэффициентом $p_1(x)$, корневые функции которых обладают свойством базисности в $\mathcal{L}^p$, $1 < p < s$, где s — степень суммируемости $p_1(x)$ (п. 2). На системы, биортогонально сопряженные с системами корневых функций операторов, налагаются минимальные требования. Допускается случай существенно несамосопряженных операторов, для которых система корневых функций содержит бесконечное число присоединенных функций. Доказана теорема о равносходимости в $\mathcal{L}^p(K)$, $K \subset G$, биортогональных разложений функций по корневым функциям этих операторов с разложением этой же функции в обычный тригонометрический ряд Фурье (п. 2). Получены оценки скорости равносходимости указанных разложений (п. 5). В качестве примера дифференциального выражения, удовлетворяющего условиям теоремы о базисности, будет рассмотрено выражение (п. 3)

$$u'' + x^{-\alpha}u' + q(x)u, \quad \alpha \in (0,1), \quad q(x) \in \mathcal{L}^1(G), \quad x \in G. \tag{2}$$

1. *Постановка задачи.* Рассмотрим произвольный дифференциальный оператор, порожденный дифференциальным выражением (1) на классе функций $\mathcal{D}$ — абсолютно непрерывных на $\overline{G} = [0,1]$ вместе со своей первой производной;

$$p_1(x) \in \mathcal{L}^s(G, \mathbb{C}), \quad s > 1, \quad q_1(x) \in \mathcal{L}(G, \mathbb{C}). \tag{3}$$

Корневые функции (т.е. собственные и присоединенные функции) оператора L_1 определим в обобщенном (по Ильину) смысле, рассматривая их как регулярные решения дифференциальных уравнений и освободив их от требования удовлетворения каким-либо конкретным краевым условиям [1]–[3]. Ограничения при этом налагаются на свойства спектра и корневых функций оператора. Это позволяет изучать как системы функций типа системы экспонент, не удовлетворяющие никаким краевым условиям без спектрального параметра, так и корневые функции конкретных краевых задач (в том числе и с интегральными краевыми условиями). Рассмотрены два встречающихся типа спектральных задач (отличающихся нормировкой присоединенных функций). Под собственной функцией оператора L_1, отвечающей собственному значению $\lambda^2 \in \mathbb{C}$ будем понимать любую не равную тождественному нулю функцию $\overset{0}{u}(x) \in \mathcal{D}$, удовлетворяющую почти всюду в G уравнению $L_1 \overset{0}{u} + \lambda^2 \overset{0}{u} = 0$. Под присоединенной функцией порядка m,

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 96-01-01158).

$m = 1, 2, \ldots$, отвечающей тому же λ^2 и собственной функции $\overset{0}{u}$, будем понимать любую функцию $\overset{m}{u}(x)$, которая почти всюду в G удовлетворяет уравнению $L_1\overset{m}{u} + \lambda^2\overset{m}{u} = \mu_m\overset{m-1}{u}$. Здесь либо $\mu_m = 1$ (спектральная задача 1), либо $\mu_m = \lambda$ ($\operatorname{Re}\lambda \ge 0$) при $|\lambda| \ge 1$, $\mu_m = 1$ при $|\lambda| < 1$ (спектральная задача 2).

Приведем основные ограничения на рассматриваемые системы корневых функций. Фиксируем произвольную систему собственных значений $\{\lambda_k^2\}_{k=1}^{\infty}$ и произвольную систему $\{u_k\}$ корневых функций оператора L_1, отвечающую этим собственным значениям, с тремя *условиями* A:

1) система $\{u_k\}$ замкнута и минимальна в $\mathcal{L}^r(G)$ при некотором $r \in [1, \infty)$;
2) $\exists c_1, c_2 = \mathrm{const} > 0$:

$$|\operatorname{Im}\lambda_k| \le c_1 \quad \forall k; \qquad \sum_{0 \le |\lambda_k| - \lambda \le 1} 1 \le c_2 \quad \forall \lambda \ge 0; \tag{4}$$

3) $\exists c_3 = \mathrm{const} > 0$:

$$\|u_k\|_r \, \|v_k\|_{r'} \le c_3 \quad \forall k, \tag{5}$$

где $\{v_k\}$ — биортогонально сопряженная с $\{u_k\}$ система функций: $v_k \in \mathcal{L}^{r'}(G)$, $(u_k, v_l) = \delta_{kl}$ $\forall k, l \in \mathbb{N}$, $r' = r/(r-1)$, $\|\cdot\|_r$ — обозначение нормы в $\mathcal{L}^r(G)$.

Не ограничивая общности, считаем, что $\{\lambda_k\}$ занумерованы в порядке неубывания их модулей. Для произвольной функции $f(x) \in \mathcal{L}^r(G)$ составим частичные суммы биортогонального разложения

$$\sigma_\lambda(x, f) = \sum_{|\lambda_k| \le \lambda} f_k u_k(x), \quad \lambda > 0, \quad f_k \equiv (f, v_k).$$

Равносходимость биортогональных разложений будем рассматривать в метрике пространств $\mathcal{L}^p$, $p \ge 1$.

Замечание 1. В случае абсолютно непрерывной функции $p_1(x)$ в выражении (1) (при этом известной подстановкой задача сводится к оператору Шредингера) условия A совпадают с условиями, при которых система $\{u_k\}$ обладает свойством базисности в $\mathcal{L}^r(G)$ при любом $r > 1$, и имеет место равномерная на любом отрезке $K \subset G$ равносходимость с тригонометрическим рядом Фурье разложений $\sigma_\lambda(x, f)$ (см. работы В.А.Ильина [1]–[4], где результаты получены и для операторов произвольного порядка). Необходимость условия (5) для базисности в $\mathcal{L}^r(G)$ следует из известной теоремы Банаха.

Обозначим через L_2 оператор, порожденный выражением $L_2 u = u''$ на множестве $\mathcal{D}$ и краевыми условиями $u^{(j)}(0) = u^{(j)}(1)$, $j = 0, 1$. Пусть $\{\widehat{\lambda}_k^2\}$ — собственные значения, $\{\widehat{u}_k\}$ — нормированные собственные функции этого оператора (тригонометрическая система функций), $\widehat{u}_k = \widehat{v}_k$, $\widehat{\sigma}_\lambda(x, f) \equiv S_\lambda(x, f)$ — разложение функции f в ряд по этой системе (тригонометрический ряд Фурье).

Основная задача состоит в том, чтобы установить факт равносходимости спектральных разложений $\sigma_\lambda(x, f)$ и $S_\lambda(x, f)$ функции $f(x)$ в метрике пространств $\mathcal{L}^p$ на любом отрезке $K \subset G$ (отсюда, как следствие, получаем теорему о свойстве базисности в $\mathcal{L}^p$) и оценить скорость равносходимости этих разложений, т.е. оценить погрешность аппроксимации одного разложения другим. Из факта равносходимости следует, в частности, что оба разложения сходятся или расходятся в метрике данного пространства $\mathcal{L}^p$ одновременно.

2. *Теорема о свойстве базисности.* Введем обозначение для рассматриваемой разности спектральных разложений

$$\Delta_\lambda = \|\sigma_\lambda(x, f) - S_\lambda(x, f)\|_{p,K}, \tag{6}$$

где $\|\cdot\|_{p,K}$ — обозначение нормы в $\mathcal{L}^p(K)$, $K \subset G$. Приведем оценку скорости стремления к нулю разности (6), полученную при единственном условии (3) на функцию $p_1(x)$ из (1). Фиксируем произвольные $p \in [1,\infty)$ и отрезок $K \subset G$. Параметры p и s свяжем соотношением

$$p^{-1} + s^{-1} \le 1, \quad \text{т. е.} \quad p \ge s' = s/(s-1), \quad s \ge q = p/(p-1). \tag{7}$$

Предположим, что $f(x)$ и $\{v_k(x)\}$ таковы, что

$$\exists \nu = \text{const} > 0 \;:\; \widetilde{f}_k \equiv f_k \alpha_k = O(\lambda_k^{-\nu}),\ |\lambda_k| \ge 1,\ \alpha_k = \|v_k\|_{r'}^{-1}. \tag{8}$$

Теорема 1 ([5]). *Пусть выполняются условия* (3), (7), (8) *и условия* A. *Тогда для всех достаточно больших чисел λ справедлива оценка*

$$\Delta_\lambda \le c \max(\lambda^{-1},\, \lambda^{-\nu} \ln^2 \lambda,\, \lambda^{-(\nu+1/p-1/s)} \ln \lambda), \tag{9}$$

постоянная c не зависит от λ.

Замечание 2. При $s \in (1,p)$ имеем $\nu + 1/p - 1/s \in (\nu - 1/q, \nu)$, поэтому при $s \ge p$ следует убрать третью дробь в правой части (9), оценка не зависит от s; при $s < p$ следует убрать вторую дробь в (9), оценка существенно зависит от степени суммируемости s.

Оценка (9) показывает, что свойства Δ_λ существенно ухудшаются при $s < p$. Рассматриваем далее случай $s > p$. Несколько сузив класс функций $p_1(x)$, получим теорему о свойстве базисности для системы $\{u_k\}$ оператора L_1.

Пусть $s > 1$, фиксируем любое $p \in [1,s)$. Будем предполагать, что $p_1(x)$ удовлетворяет одному из двух условий:

1) $\forall K \Subset G\ \exists C(K) = \text{const} > 0$,

$$p_{1s}^{\pm} \equiv \int_0^{R_0} \tau^{-1} \|p_1(x \pm \tau) - p_1(x)\|_{s,K} d\tau \le C(K) < \infty; \tag{10}$$

2) фиксируем некоторое число $\gamma \in [s,\infty]$, и пусть найдется такое число $\mu > 1/\gamma$, что

$$\forall K \Subset G : \left(\int_0^{R_0} |\tau^{-\mu}(p_1(x \pm \tau) - p_1(x))|^\gamma d\tau \right)^{1/\gamma} \in \mathcal{L}^s(K). \tag{11}$$

Здесь $R_0 \in (0, \operatorname{dist}(K, \partial G))$ — произвольно фиксированное число.

Замечание 3. Для выполнения условия (10) достаточно, чтобы выполнялось одно из условий: $p_1 \in \Lambda_\nu^s(G)\ \forall \nu \in (0,1]$ ([6], с. 79), $p_1 \in H_s^1(G)$ или $p_1 \in B_{s,1}^\nu(G)\ \forall \nu \in (0,1]$ ([8], с. 293). Условие (11) аналогично условию на разлагаемую в ряд функцию, которое гарантирует сходимость (почти всюду) ее тригонометрического ряда Фурье ([7], с. 244).

Теорема 2. *Пусть $p \in [1,s)$, выполняются условие* (3)*, условия* A *и хотя бы одно из условий* (10), (11)*. Тогда*

$$\forall f(x) \in \mathcal{L}^r(G) : \Delta_\lambda \to 0,\ \lambda \to \infty. \tag{12}$$

Если $r \in [1,p]$, $p \in (1,s)$, то

$$\forall f(x) \in \mathcal{L}^p(G) : \|f(x) - \sigma_\lambda(x,f)\|_{p,K} \to 0,\ \lambda \to \infty, \tag{13}$$

т. е. система $\{u_k\}$ обладает свойством базисности в $\mathcal{L}^p$. Если для $\widetilde{f}_k$ имеет место оценка (8) *и $p \in [1,s)$, то*

$$\Delta_\lambda = O(\max(\lambda^{-\nu},\, \lambda^{-1} \ln \lambda)), \quad \nu \le 1; \quad \Delta_\lambda = O(\lambda^{-1}), \quad \nu > 1. \tag{14}$$

Замечание 4. Пример применения теоремы Ильина о базисности на компактах можно найти в [9], где исследовался оператор Шредингера.

Для обоснования приведенных результатов работы на первом этапе применен известный метод Ильина [1]–[4]. Этот метод основан на использовании интегрального представления (формулы среднего) для решений дифференциальных уравнений со спектральным параметром и заключается в выделении спектральной функции оператора из ядра Дирихле и далее в эффективной оценке остатка. Для обоснования проводимых преобразований используется модификация метода, предложенного в [10].

3. *Пример.* Рассмотрим дифференциальное выражение (2) с негладкой функцией $p_1(x) = x^{-\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, для которой выполнены условия теоремы 2. Функция $p_1 \in \mathcal{L}^s(G)$ $\forall s < \alpha^{-1}$. Фиксируем любой отрезок $K = [a,b] \subset G$. Применяя формулу Лагранжа, получаем ($\xi \in [0, R_0/a]$, $R_0/a < 1$)

$$0 \le p_1(x) - p_1(x+\tau) = \frac{(1+\tau/x)^\alpha - 1}{(x+\tau)^\alpha} = \frac{\alpha\tau(1+\xi)^{\alpha-1}}{x^{\alpha+1}(1+\tau/x)^\alpha} \le \frac{\alpha\tau}{x^{\alpha+1}}. \tag{15}$$

Поскольку $x^{-\alpha-1} \in \mathcal{L}^s(K)$ $\forall s \ge 1$, то $\|p_1(x\pm\tau) - p_1(x)\|_{s,K} \le C(K,s,\alpha)\tau$, и условие (10) выполняется. Фиксировав любое число $\gamma \ge s$, заключаем, что имеет место и условие (11): достаточно взять любое число $\beta \in (\gamma^{-1},\, 1+\gamma^{-1})$, подставить в (11) оценку (15) и посчитать интеграл по τ от функции $\tau^{(1-\beta)\gamma}$. Таким образом, при выполнении условий А система корневых функций оператора L_1, порожденного дифференциальным выражением (2), обладает свойством базисности в любом пространстве $\mathcal{L}^p$, $1 < p < \alpha^{-1}$.

Замечание 5. В [11] для оператора n-го порядка с ненулевым коэффициентом p_1 при $(n-1)$-й производной и регулярными двухточечными краевыми условиями на концах $\overline{G}$ получены оценки в $C(K)$, $K \Subset G$, скорости равносходимости $\sigma_\lambda(x,f)$ и $S_\lambda(x,f)$. При этом условия на p_1 и f накладываются в терминах классов $H_r^\alpha(G)$, состоящих из функций $f \in \mathcal{L}^r(G)$, интегральный модуль непрерывности $\omega_r(f,\delta)$ которых есть величина $O(\ln^{-\alpha}(\delta^{-1}))$.

4. *Доказательство равносходимости спектральных разложений.* Установим справедливость соотношения (12) основной теоремы.

Лемма 1. *Пусть выполняется первое из условий* А. *Тогда для любой функции* $f \in \mathcal{L}^r(G)$ *коэффициенты Фурье* f_k *удовлетворяют соотношению* $\widetilde{f}_k \equiv f_k\alpha_k = o(1)$, $k \to \infty$. *Если при этом выполняется и условие* (5), *то* $f_k\|u_k\|_r = o(1)$.

Доказательство. Система $\{u_k\}$ замкнута в $\mathcal{L}^r(G)$, поэтому

$$\forall\varepsilon > 0,\ \ \forall f \in \mathcal{L}^r(G)\ \ \exists N \in \mathbb{N} : \left\| f - \sum_{k\le N} c_k u_k \right\|_r < \varepsilon,$$

где $c_1,\dots,c_N$ — некоторые постоянные. Для любого числа $j > N$, используя свойство биортогональности систем и применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$|\widetilde{f}_j| = \left|\alpha_j \int_G \Big[f - \sum_{k\le N} c_k u_k\Big]\overline{v}_j\,dx\right| \le \left\| f - \sum_{k\le N} c_k u_k \right\|_r < \varepsilon,$$

т. е. $\widetilde{f}_j = o(1)$. Из условия (5) получаем $|f_k|\,\|u_k\|_r \le c_3|\widetilde{f}_k|$. $\square$

Возьмем любой отрезок $K \subset G$ и произвольное число $R_0 \in (0,\, 2^{-1}\operatorname{dist}(K,\partial G))$. Фиксируем произвольно числа $R \in [R_0/2, R_0]$, $\tau \in [0,R]$, $\lambda > 0$ — достаточно большое число ($\lambda > \max(4, 2/R_0)$) и числа $\{\lambda_k\}$, $|\lambda_k| \ge 1$, удовлетворяющие первому условию (4). Рассмотрим интегралы

$$K_0 = \lambda_k^{-1}\int_\tau^R r^{-1}\sin\lambda r\sin\lambda_k(r-\tau)\,dr, \quad \psi_1 = \int_\tau^{1/\lambda} r^{-1}\sin\lambda r\sin\lambda_k(r-\tau)\,dr,$$
$$\psi_2 = \lambda_k K_0 - \psi_1, \quad \psi_3 = \lambda_k K_0,$$

где $\tau \in [0, 1/\lambda]$ для ψ_1, ψ_2 и $\tau \geq 1/\lambda$ для ψ_3. Используя интегрирование по частям, формулы Маклорена для синуса и косинуса и вторую формулу среднего значения для интегралов, нетрудно доказать следующие соотношения.

Лемма 2 ([12]). *Равномерно по τ, R, λ, λ_k из указанных выше множеств имеют место оценки*

а) $\psi_1 = O(\lambda_k\lambda^{-1})$, $\psi_2 = O(\lambda^{-1}\lambda_k \ln\lambda)$, $\psi_3 = O((\lambda\tau)^{-1})$ *при* $|\lambda_k| \leq \lambda/2$;
б) $\psi_1 = O(\lambda_k^{-1}\lambda)$, $\psi_2 = O(\lambda_k^{-1}\lambda\ln\lambda)$, $\psi_3 = O((\tau|\lambda - |\lambda_k||)^{-1})$ *при* $0 < c \leq |\lambda - |\lambda_k|| \leq \lambda/2$;
в) $\psi_1 = O(1)$, $\psi_2 = O(\ln\lambda)$, $\psi_3 = O(\ln\tau)$ *при* $|\lambda - |\lambda_k|| \leq c$;
г) $\psi_1 = O(\lambda_k^{-1}\lambda)$, $\psi_2 = O(\lambda_k^{-1}\lambda\ln\lambda)$, $\psi_3 = O((\tau\lambda_k)^{-1})$ *при* $|\lambda_k| \geq 3\lambda/2$.

Фиксируем произвольное число $\lambda > 1$. Обозначим через $\sum_1$ сумму по тем $\lambda_k \in \{\lambda_k\}$, для которых $|\lambda_k| \leq 1$, через $\sum_2$ — сумму по $\lambda_k : 1 \leq |\lambda_k| \leq \lambda/2$, через $\sum_3$ — сумму по $\lambda_k : |\lambda_k| \geq 3\lambda/2$, через $\sum_4$ — сумму по $\lambda_k : |\lambda - |\lambda_k|| \leq 2/R_0$, через $\sum_5$ — сумму по $\lambda_k : 2/R_0 \leq |\lambda - |\lambda_k|| \leq \lambda/2$.

Переходя к исследованию свойств разности Δ_λ, отметим, что при единственном условии $p_1 \in \mathcal{L}^1(G)$ имеет место следующее неравенство, фактически доказанное в [12].

Лемма 3. *Пусть $p_1, q_1 \in \mathcal{L}^1(G)$ и выполнены условия* А. *Тогда для разности* (6) *имеет место оценка*

$$\Delta_\lambda \leq c(I + \widehat{I}), \quad c = \mathrm{const} > 0, \tag{16}$$

где

$$I = \Big[\lambda^{-1}\sum\nolimits_1 |\widetilde{f}_k| + \lambda^{-2}\sum\nolimits_2 |\widetilde{f}_k| + \sum\nolimits_3 |\lambda_k^{-2}\widetilde{f}_k| + \sum\nolimits_4 |\widetilde{f}_k| + \sum\nolimits_5 |(\lambda - |\lambda_k|)^{-2}\widetilde{f}_k|\Big] +$$
$$+ \|q_1\|_1\Big[\lambda^{-1}\sum\nolimits_2 |\lambda_k^{-1/p}\widetilde{f}_k| + \lambda^{1/q}\sum\nolimits_3 |\lambda_k^{-2}\widetilde{f}_k| + \lambda^{-1/p}\sum\nolimits_4 |\widetilde{f}_k| + \lambda^{1/q}\sum\nolimits_5 |(\lambda_k(\lambda - |\lambda_k|))^{-1}\widetilde{f}_k|\Big] +$$
$$+ \Big\| \sum_{|\lambda_k|\geq 1} f_k \sum_{l=0}^{m} \mu_m^l S_0\Big[\int_0^R K_0(\lambda, \lambda_k, \tau, R) B_\tau^l (s_{t_l}(p_1(x) \overset{m-l}{u'_k}(x)))d\tau\Big]\Big\|_{p,K}, \tag{17}$$

а $\widehat{I}$ в (16) *получается из* (17) *заменой λ_k, u_k, v_k, p_1, q_1 на соответствующие величины оператора L_2. В* (17) *обозначено*

$$u_k(x) = \overset{m}{u}_k(x), \quad B_t^0(g(t_0)) = g(t), \quad B_t^1(g(t_1)) = \lambda_k^{-1}\int_0^t g(t_1)\sin\lambda_k(t - t_1)dt_1,$$
$$B_{t_0}^l(g(t_l)) = \lambda_k^{-l}\int_0^{t_0}\cdots\int_0^{t_{l-1}}\Big[g(t_l)\prod_{j=1}^{l}\sin\lambda_k(t_{j-1} - t_j)\Big]dt_l\ldots dt_1, \quad l = \overline{1,m},$$
$$s_t(u(x)) = u(x+t) + u(x-t);$$
$$S_0[\mathcal{S}(R)] = 8(3R_0^2)^{-1}\int_{R_0/2}^{R_0} R\mathcal{S}(R)dR, \quad S_0[1] = 1,$$

— операция усреднения функции $\mathcal{S}$ по R. При $p = 1$ в (17) *следует положить $1/q = 0$ в выражении, заключенном в квадратные скобки, с коэффициентом $\|q_1\|_1$; под знаком суммы $\sum_2$ добавить сомножитель $\ln\lambda_k$, а выражения $\sum_3$, $\sum_4$, $\sum_5$ умножить на $\ln\lambda$.*

Оценим последнюю часть ($\mathcal{L}^p$-норму ряда) в выражении (17), обозначим ее через I_0. Перейдем от нормы суммы к сумме норм по $l = 0, 1, \ldots, m$. Проведем преобразования для $l = 0$. Остальные слагаемые оцениваются по той же схеме. Всюду ниже для суммы по λ_k с $|\lambda_k| \geq 1$ используем обозначение $\sum\limits_k$.

В сумме s_{t_0} оставим одно слагаемое с аргументом $x + t_0$, оставшаяся часть рассматривается так же. Исследуем выражение

$$A_0 = \Big\|\sum_k f_k S_0\Big[\int_0^R K_0(\lambda, \lambda_k, \tau, R)p_1(x+\tau)u'_k(x+\tau)d\tau\Big]\Big\|_{p,K}.$$

Применим обобщенное неравенство Минковского ([8], с. 22), учитывая, что $p \geq 1$,

$$A_0 \leq S_0\Big[\int_0^R \Big\|p_1(x+\tau)\sum_k f_k K_0 u_k'(x+\tau)\Big\|_{p,K} d\tau\Big]. \tag{18}$$

Фиксируем любое число $\alpha \in (1, s/p)$ (т. е. $\alpha p < s$ и $s > p$) и к интегралу по x в (18) применим неравенство Гёльдера с параметрами α, $\alpha' = \alpha/(\alpha-1)$:

$$\begin{aligned} A_0 &\leq S_0\Big[\int_0^R \|p_1(x+\tau)\|_{\alpha p,K}\Big\|\sum_k f_k K_0 u_k'(x+\tau)\Big\|_{\alpha' p,K} d\tau\Big] \leq \\ &\leq \|p_1\|_{s,G} S_0\Big[\int_0^R \Big\|\sum_k f_k K_0(\lambda,\lambda_k,\tau,R) u_k'(\xi)\Big\|_{\alpha' p,G} d\tau\Big] \leq \\ &\leq \|p_1\|_s S_0\Big[\int_0^R \Big\|\sum_k f_k K_0 \lambda_k (u_k'(\xi)\lambda_k^{-1})\Big\|_\rho d\tau\Big], \end{aligned} \tag{19}$$

где введена новая переменная $\xi = x+\tau$; $\rho = \max(2, s', \alpha' p) < \infty$.

К $\mathcal{L}^\rho$-норме суммы в правой части (19) при фиксированных τ, R применим обобщение на биортогональные системы известной теоремы Рисса (Рисса-Фишера), установленное в [12]. При этом обобщении требуется, чтобы $\rho \geq \max(2, s')$, что для системы $\{u_k'(\xi)\lambda_k^{-1}\}$, $|\lambda_k| \geq 1$, выполнено. Справедливость остальных условий обобщенной теоремы в рассматриваемой ситуации установлена в [12]. Положим $\beta = \rho/(\rho-1) > 1$. Получаем (через c здесь и далее обозначены неотрицательные постоянные)

$$\begin{aligned} A_0\|p_1\|_s^{-1} &\leq cS_0\Big[\int_0^R \|\tilde f_k K_0\lambda_k\|_{l_\beta} d\tau\Big] = cS_0\Big[\int_0^{1/\lambda} \|\tilde f_k K_0\lambda_k\|_{l_\beta} d\tau + \int_{1/\lambda}^R \|\tilde f_k K_0\lambda_k\|_{l_\beta} d\tau\Big] \leq \\ &\leq c\Big\{\int_0^{1/\lambda} \|\tilde f_k\psi_1\|_{l_\beta} d\tau + S_0\Big[\int_0^{1/\lambda} \|\tilde f_k\psi_2\|_{l_\beta} d\tau\Big] + S_0\Big[\int_{1/\lambda}^R \|\tilde f_k\psi_3\|_{l_\beta} d\tau\Big]\Big\} \equiv c\{U_1+U_2+U_3\}, \end{aligned} \tag{20}$$

где $|\lambda_k| \geq 1$, интегралы по τ и r (в K_0) разбиты на части и использованы обозначения леммы 2. Применяя оценки этой леммы, получаем

$$\begin{aligned} U_1 &\leq c\lambda^{-1}\Big[\lambda^{-1}\Big(\sum\nolimits_2 |\tilde f_k\lambda_k|^\beta\Big)^{1/\beta} + \lambda\Big(\sum\nolimits_3 |\tilde f_k\lambda_k^{-1}|^\beta\Big)^{1/\beta} + \Big(\sum\nolimits_4 |\tilde f_k|^\beta\Big)^{1/\beta} + \\ &\quad + \lambda\Big(\sum\nolimits_5 |\tilde f_k\lambda_k^{-1}|^\beta\Big)^{1/\beta}\Big] \equiv B; \qquad U_2 \leq cB\ln\lambda; \\ U_3 &\leq c\Big[\lambda^{-1}\ln\lambda\Big(\sum\nolimits_2 |\tilde f_k|^\beta\Big)^{1/\beta} + \ln\lambda\Big(\sum\nolimits_3 |\tilde f_k\lambda_k^{-1}|^\beta\Big)^{1/\beta} + \\ &\quad + S_0\Big[\int_{1/\lambda}^R \ln\tau\, d\tau\Big]\Big(\sum\nolimits_4 |\tilde f_k|^\beta\Big)^{1/\beta} + \ln\lambda\Big(\sum\nolimits_5 |\tilde f_k(\lambda-|\lambda_k|)^{-1}|^\beta\Big)^{1/\beta}\Big] \equiv B_1. \end{aligned}$$

Поскольку $|\lambda_k| \leq \lambda/2$ в $\sum_2$ и $\big|\lambda-|\lambda_k|\big|^{-1} \geq |\lambda_k|^{-1}$ в $\sum_5$, то $U_i \leq cB_1$, $i = 1,2,3$. Подставим эти оценки в (20)

$$\begin{aligned} A_0 \leq c\|p_1\|_s\Big[\lambda^{-1}\ln\lambda\Big(\sum\nolimits_2 |\tilde f_k|^\beta\Big)^{1/\beta} + \ln\lambda\Big(\sum\nolimits_3 |\tilde f_k\lambda_k^{-1}|^\beta\Big)^{1/\beta} + \Big(\sum\nolimits_4 |\tilde f_k|^\beta\Big)^{1/\beta} + \\ + \ln\lambda\Big(\sum\nolimits_5 |\tilde f_k(\lambda-|\lambda_k|)^{-1}|^\beta\Big)^{1/\beta}\Big]. \end{aligned} \tag{21}$$

Заметим, что если в выражении A_0 отделим часть

$$\sum\nolimits_5 f_k S_0\Big[\int_{1/\lambda}^R K_0 p_1(x+\tau) u_k'(x+\tau) d\tau\Big], \tag{22}$$

а оставшуюся в A_0 часть (обозначим ее через $\widetilde{A}_0$) оценим по приведенной выше схеме, то результат будет лучше (ниже мы это используем). Именно,

$$\widetilde{A}_0 \le c\|p_1\|_s\Big[\lambda^{-1}\ln\lambda\Big(\sum\nolimits_2|\widetilde{f}_k|^\beta\Big)^{1/\beta}+\ln\lambda\Big(\sum\nolimits_3|\widetilde{f}_k\lambda_k^{-1}|^\beta\Big)^{1/\beta}+\Big(\sum\nolimits_4|\widetilde{f}_k|^\beta\Big)^{1/\beta}+$$
$$+\ln\lambda\Big(\sum\nolimits_5|\widetilde{f}_k\lambda_k^{-1}|^\beta\Big)^{1/\beta}\Big]. \quad (23)$$

Для слагаемых, отвечающих значениям $l\ne 0$ в выражении I_0, схема работы та же самая: все интегралы (по R, τ, $t_1,\dots,t_l$) выносим за знак нормы по x с помощью обобщенного неравенства Минковского, в интеграле по x применяем неравенство Гёльдера, выделяя $\|p_1\|_{\alpha p}\le\|p_1\|_s$. Разбиваем интеграл по τ и интеграл K_0 на части, как в (20), применяем обобщение теоремы Рисса к системе $\{\mu_m^l\lambda_k^{-l-1}\overset{m-l}{u'_k}(\xi)\}$ (при фиксированных R, τ, $t_1,\dots,t_l$) и оценки леммы 2. Ситуация в этом случае лучше, т.к. дополнительные интегралы дают множитель τ, что позволяет убрать особенность (при $\tau\to 0$) из оценок интеграла ψ_3 и улучшить оценки (в оценке U_3 все $\ln\lambda$ следует убрать). Так что наихудшей является оценка при $l=0$, которая получена выше. Итак, при $s>p$

$$I_0=\Big\|\sum_k f_k\sum_{l=0}^m\mu_m^l S_0\Big[\int_0^R K_0(\lambda,\lambda_k,\tau,R)B_\tau^l(s_{t_l}(p_1(x)\overset{m-l}{u'_k}(x)))d\tau\Big]\Big\|_{p,K}\le$$
$$\le c\|p_1\|_s\Big[\lambda^{-1}\ln\lambda\Big(\sum\nolimits_2|\widetilde{f}_k|^\beta\Big)^{1/\beta}+\ln\lambda\Big(\sum\nolimits_3|\widetilde{f}_k\lambda_k^{-1}|^\beta\Big)^{1/\beta}+$$
$$+\Big(\sum\nolimits_4|\widetilde{f}_k|^\beta\Big)^{1/\beta}+\ln\lambda\Big(\sum\nolimits_5|\widetilde{f}_k(\lambda-|\lambda_k|)^{-1}|^\beta\Big)^{1/\beta}\Big],\quad \beta>1. \quad (24)$$

Положив в (24) $\widetilde{f}_k=o(1)$, что имеет место по лемме 1, получим

$$I_0\le c\|p_1\|_s[\lambda^{-1/\rho}\ln\lambda+o(1)\lambda^{-1/\rho}\ln\lambda+o(1)+o(1)\ln\lambda],$$

т. е.

$$I_0=\|p_1\|_s[o(\ln\lambda)+O(\lambda^{-1/\rho}\ln\lambda)]. \quad (25)$$

Правая часть оценки (25) не является величиной $o(1)$ в общем случае, но эта оценка получена при единственном условии (3) на функцию $p_1(x)$ ($s>p\ge 1$).

Замечание 6. Учитывая сделанное выше указание о членах I_0 с $l\ne 0$ (в частности, отсутствие $\ln\lambda$ при $\sum_5$ в оценке U_3), заключаем, что для этих членов будет верна оценка (25) с заменой $o(\ln\lambda)$ на $o(1)$.

Подставляя в (24) различные асимптотики для $\widetilde{f}_k$, легко установить для I_0 оценки ($s>p$)

$$I_0=\|p_1\|_s[o(1)+O(\lambda^{-1/\rho}\ln\lambda)]\to 0,\quad \lambda\to\infty,\quad \text{при } \widetilde{f}_k=o(\ln^{-1}\lambda_k), \quad (26)$$
$$I_0=\|p_1\|_s O(\ln^{1-\alpha}\lambda)\quad \forall\alpha>0 \qquad \text{при } \widetilde{f}_k=O(\ln^{-\alpha}\lambda_k), \quad (27)$$
$$I_0=\|p_1\|_s O(\max(\lambda^{-\nu}\ln\lambda,\ \lambda^{-1}\ln\lambda)),\quad \nu>0,\quad \text{при } \widetilde{f}_k=O(\lambda_k^{-\nu}). \quad (28)$$

Если из I_0 удалить часть (22) и соответствующее выражение с $x-\tau$ вместо $x+\tau$, то для оставшейся части (обозначим ее $\widetilde{I}_0$) будет верна оценка (23). Из этой оценки получаем для $\widetilde{I}_0$ аналоги соотношений (25), (28):

$$\widetilde{I}_0=\|p_1\|_s[o(1)+O(\lambda^{-1/\rho}\ln\lambda)\qquad \text{при } \widetilde{f}_k=o(1), \quad (29)$$
$$\widetilde{I}_0=\|p_1\|_s\, O(\max(\lambda^{-\nu},\ \lambda^{-1}\ln\lambda))\quad \text{при } \widetilde{f}_k=O(\lambda_k^{-\nu}),\quad \nu>0. \quad (30)$$

Соотношения (25)–(28) для I_0 позволят нам ниже сформулировать соответствующее утверждение для Δ_λ (теорема 3 в п. 5).

Анализ оценок (24), (25), (29) и замечания 6 показывает, что для получения в правой части (25) величины $o(1)$ необходимо установить для выражения (22) и соответствующего выражения с аргументом $x-\tau$ оценку на $\ln\lambda$ лучше полученной выше (член с $\sum_5$ в (24)). Сузим класс функций $p_1(x)$. Исследуем выражение

$$J = \Big\|\sum\nolimits_5 f_k S_0\Big[\int_{1/\lambda}^{R} K_0(\lambda,\lambda_k,\tau,R) s_\tau(p_1 u_k'(x))d\tau\Big]\Big\|_{p,K} \tag{31}$$

при условии (10) на $p_1(x)$. Это условие (как и (11)) позволит убрать (или уменьшить) коэффициент τ^{-1} в оценках интеграла ψ_3 в лемме 2. Добавим и вычтем в (31) под знаком интеграла по τ сумму $p_1(x)s_\tau(u_k'(x))$. Применим в (31) обобщенное неравенство Минковского, вынося $S_0[\cdot]$ за знак нормы, и неравенство треугольника

$$\begin{aligned} J \le S_0\Big[\Big\|\int_{1/\lambda}^{R}|p_1(x+\tau)-p_1(x)|\Big|\sum\nolimits_5 f_k K_0 u_k'(x+\tau)\Big|d\tau\Big\|_{p,K}\Big] &+ \\ + S_0\Big[\Big\|\int_{1/\lambda}^{R}|p_1(x-\tau)-p_1(x)|\Big|\sum\nolimits_5 f_k K_0 u_k'(x-\tau)\Big|d\tau\Big\|_{p,K}\Big] &+ \\ + S_0\Big[\Big\|p_1(x)\sum\nolimits_5 f_k\int_{1/\lambda}^{R} K_0 s_\tau(u_k'(x))d\tau\Big\|_{p,K}\Big] &\equiv A_1+A_2+A_3. \end{aligned} \tag{32}$$

Для выражения A_1 применим обобщенное неравенство Минковского, вынося интеграл по τ за знак нормы, далее в точности повторяем всю схему преобразований (18)–(20), проведенную для A_0. Получаем

$$\begin{aligned} A_1 &\le S_0\Big[\int_{1/\lambda}^{R}\Big\|(p_1(x+\tau)-p_1(x))\sum\nolimits_5 f_k K_0 u_k'(x+\tau)\Big\|_{p,K}d\tau\Big] \le \\ &\le S_0\Big[\int_{0}^{R_0}\|p_1(x+\tau)-p_1(x)\|_{s,K}\Big(\sum\nolimits_5|\widetilde{f}_k\psi_3|^\beta\Big)^{1/\beta}d\tau\Big] \le \\ &\le c\int_{0}^{R_0}\tau^{-1}\|p_1(x+\tau)-p_1(x)\|_{s,K}d\tau\Big(\sum\nolimits_5|\widetilde{f}_k(\lambda-|\lambda_k|)^{-1}|^\beta\Big)^{1/\beta} = \\ &= cp_{1s}^{+}\Big(\sum\nolimits_5|\widetilde{f}_k(\lambda-|\lambda_k|)^{-1}|^\beta\Big)^{1/\beta}, \end{aligned} \tag{33}$$

что лучше оценки (24) на $\ln\lambda$. Аналогично получаем для A_2 из (32) оценку

$$A_2 \le cp_{1s}^{-}\Big(\sum\nolimits_5|\widetilde{f}_k(\lambda-|\lambda_k|)^{-1}|^\beta\Big)^{1/\beta}. \tag{34}$$

Рассмотрим третье выражение A_3 в (32). Обозначим

$$A_1u_k(x) = \overset{m-1}{u_k}(x) - p_1(x)u_k'(x) - q_1(x)u_k(x), \quad u_k \equiv \overset{m}{u}_k, \quad \Delta_t(f(x)) = f(x+t)-f(x-t).$$

Для производных корневых функций оператора L_1 имеет место формула среднего (ее легко проверить интегрированием по частям после замены $A_1u_k(x) = u_k''(x)+\lambda_k^2u_k(x)$)

$$s_\tau(u_k'(x)) = 2u_k'(x)\cos\lambda_k\tau + \int_0^\tau \Delta_\xi(A_1u_k(x))\cos\lambda_k(\tau-\xi)d\xi.$$

Используем эту формулу в A_3 и применим неравенство треугольника. Тогда

$$\begin{aligned} A_3 \le S_0\Big[\Big\|p_1(x)\sum\nolimits_5 f_k u_k'(x)\int_{1/\lambda}^{R}2\cos\lambda_k\tau K_0(\lambda,\lambda_k,\tau,R)d\tau\Big\|_{p,K}\Big] &+ \\ + S_0\Big[\Big\|p_1(x)\int_{1/\lambda}^{R}\sum\nolimits_5 f_k K_0(\lambda,\lambda_k,\tau,R)\int_0^\tau \Delta_\xi(A_1u_k(x))\cos\lambda_k(\tau-\xi)d\xi\, d\tau\Big\|_{p,K}\Big] &\equiv A_{31}+A_{32}. \end{aligned} \tag{35}$$

Для A_{31} применим неравенство Гёльдера и обобщение теоремы Рисса (для системы $\{u'_k(x)\lambda_k^{-1}\}$) по схеме оценки A_0

$$A_{31} \le \|p_1\|_s \Big(\sum\nolimits_5 \Big|\widetilde{f}_k \lambda_k \int_{1/\lambda}^{R} 2\cos\lambda_k\tau K_0(\lambda,\lambda_k,\tau,R)d\tau\Big|^{\beta}\Big)^{1/\beta}, \quad \beta>1, \tag{36}$$

где учтено, что по второму условию (4) сумма $\sum_5$ конечная. Оценим интеграл по τ в (36)

$$\lambda_k \int_{1/\lambda}^{R} 2\cos\lambda_k\tau K_0(\lambda,\lambda_k,\tau,R)d\tau = \int_{1/\lambda}^{R} 2\cos\lambda_k\tau \int_{\tau}^{R} \frac{\sin\lambda r \sin\lambda_k(r-\tau)}{r} dr\, d\tau =$$
$$= \int_{1/\lambda}^{R} 2\cos^2\lambda_k\tau \int_{\tau}^{R} r^{-1}\sin\lambda r\sin\lambda_k r\, dr\, d\tau - \int_{1/\lambda}^{R} \sin 2\lambda_k\tau \int_{\tau}^{R} r^{-1}\sin\lambda r\cos\lambda_k r\, dr\, d\tau \equiv I_1 - I_2. \tag{37}$$

В выражении I_1 проинтегрируем по частям внутренний интеграл и используем оценку $\sin(\lambda\pm\lambda_k)\tau = O((\lambda\pm\lambda_k)^{\varepsilon}\tau^{\varepsilon})$ $\forall\varepsilon\in(0,1)$, справедливую в силу первого условия (4),

$$I_1 = \int_{1/\lambda}^{R} \cos^2\lambda_k\tau \int_{\tau}^{R} r^{-1}(\cos(\lambda-\lambda_k)r - \cos(\lambda+\lambda_k)r)dr\, d\tau =$$
$$= \int_{1/\lambda}^{R} \cos^2\lambda_k\tau \Big[\frac{\sin(\lambda-\lambda_k)R}{(\lambda-\lambda_k)R} - \frac{\sin(\lambda+\lambda_k)R}{(\lambda+\lambda_k)R} - \frac{\sin(\lambda-\lambda_k)\tau}{(\lambda-\lambda_k)\tau} + \frac{\sin(\lambda+\lambda_k)\tau}{(\lambda+\lambda_k)\tau} +$$
$$+ \int_{\tau}^{R} \Big[\frac{\sin(\lambda-\lambda_k)r}{(\lambda-\lambda_k)r^2} - \frac{\sin(\lambda+\lambda_k)r}{(\lambda+\lambda_k)r^2}\Big]dr\Big]d\tau = O((\lambda-|\lambda_k|)^{-(1-\varepsilon)})$$

с использованием также неравенства $|\lambda\pm\lambda_k| \ge \big|\lambda-|\lambda_k|\big|$.

В выражении I_2 в (37) поменяем местами интегралы

$$I_2 = \int_{1/\lambda}^{R} r^{-1}\sin\lambda r\cos\lambda_k r \int_{1/\lambda}^{r} \sin 2\lambda_k\tau\, d\tau\, dr = O(\lambda_k^{-1}\ln\lambda) = O((\lambda-|\lambda_k|)^{-(1-\varepsilon)}),$$

т. к. $\lambda \le 2|\lambda_k|$, $|\lambda_k| \ge \big|\lambda-|\lambda_k|\big|$.

Подставив оценки для I_1, I_2 в (37) и (36), получим

$$A_{31} \le \|p_1\|_s \Big(\sum\nolimits_5 |\widetilde{f}_k O((\lambda-|\lambda_k|)^{-(1-\varepsilon)})|^{\beta}\Big)^{1/\beta}, \quad \varepsilon\in(0,\rho^{-1}), \tag{38}$$

где на $\varepsilon\in(0,1)$ наложено условие, гарантирующее ограниченность суммы $\sum_5$ в (38) равномерно по λ при $\widetilde{f}_k = O(1)$: $(1-\varepsilon)\beta>1$, $\varepsilon < 1-\beta^{-1} = \rho^{-1}$.

Рассмотрим выражение A_{32} из (35). Наличие в A_{32} интеграла по ξ по отрезку $[0,\tau]$ позволит получить множитель τ и улучшить оценку на $\ln\lambda$. Расщепляя разность Δ_ξ в A_{32} на две части и применяя неравенство треугольника, получим $A_{32} \le A_{32}^{+} + A_{32}^{-}$, где A_{32}^{+} и A_{32}^{-} отличаются аргументом $x+\xi$ и $x-\xi$ функции A_1u_k. Рассмотрим A_{32}^{+}; A_{32}^{-} исследуется аналогично. Подставим в A_{32}^{+} выражение для A_1u_k и применим неравенство треугольника

$$A_{32}^{+} \le S_0\Big[\int_{1/\lambda}^{R}\int_0^{\tau} \Big\|p_1(x)\sum\nolimits_5 f_k K_0 \overset{m-1}{u_k}(x+\xi)\cos\lambda_k(\tau-\xi)\Big\|_{p,K} d\xi\, d\tau\Big] +$$
$$+ S_0\Big[\Big\|p_1(x)\sum\nolimits_5 f_k \int_{1/\lambda}^{R} K_0 \int_0^{\tau} q_1(x+\xi)u_R(x+\xi)\cos\lambda_k(\tau-\xi)d\xi\, d\tau\Big\|_{p,K}\Big] +$$
$$+ S_0\Big[\Big\|p_1(x)\int_{1/\lambda}^{R}\int_0^{\tau} p_1(x+\xi)\sum\nolimits_5 f_k K_0 u'_k(x+\xi)\cos\lambda_k(\tau-\xi)d\xi\, d\tau\Big\|_{p,K}\Big] \equiv J_1+J_2+J_3. \tag{39}$$

Здесь применено обобщенное неравенство Минковского для первого слагаемого. Оцениваем J_1 по схеме оценки A_0: неравенство Гёльдера, обобщение теоремы Рисса для системы $\{\overset{m-1}{u_k}\lambda_k^{-1}\}$ и оценка ψ_3 из леммы 2. Получаем

$$J_1 \le c\|p_1\|_s S_0 \Big[\int_{1/\lambda}^{R}\int_0^{\tau}\Big(\sum\nolimits_5 |\widetilde{f}_k \psi_3 \cos\lambda_k(\tau-\xi)|^{\beta}\Big)^{1/\beta} d\xi\, d\tau\Big] \le$$

$$\le c\|p_1\|_s \int_{1/\lambda}^{R_0} \tau\Big(\sum\nolimits_5 |\tau^{-1}\widetilde{f}_k(\lambda-|\lambda_k|)^{-1}|^{\beta}\Big)^{1/\beta} d\tau \le c\|p_1\|_s \Big(\sum\nolimits_5 |\widetilde{f}_k(\lambda-|\lambda_k|)^{-1}|^{\beta}\Big)^{1/\beta}.$$

Применяя неравенства из [12]

$$\|u_k\|_{\infty}\alpha_k^{-1} \le c, \quad \int_0^{R_0} |K_0(\lambda,\lambda_k,\tau,R)| d\tau = O(((\lambda-|\lambda_k|)\lambda_k)^{-1}\ln\lambda),$$

оценим

$$J_2 \le cS_0\Big[\Big\|p_1(x)\sum\nolimits_5 |\widetilde{f}_k| \int_{1/\lambda}^{R} |K_0| d\tau \|q_1\|_1\Big\|_{p,K}\Big] \le$$

$$\le c\|p_1\|_p \|q_1\|_1 \sum\nolimits_5 |\widetilde{f}_k(\lambda_k(\lambda-|\lambda_k|))^{-1}| \ln\lambda \le c\|p_1\|_s \|q_1\|_1 \lambda^{-1}\ln\lambda \sum\nolimits_5 \big|\lambda-|\lambda_k|\big|^{-1}|\widetilde{f}_k|.$$

Рассмотрим последнее слагаемое J_3 из (39). В интеграле по x применим неравенство Гёльдера с теми же параметрами α, α', что и для A_0, а затем неравенство Гёльдера в интеграле по ξ с параметрами s, s'

$$J_3 \le \|p_1\|_s S_0 \Big[\Big\|\int_{1/\lambda}^{R}\int_0^{\tau} p_1(x+\xi)\sum\nolimits_5 f_k K_0 u_k'(x+\xi)\cos\lambda_k(\tau-\xi) d\xi\, d\tau\Big\|_{\rho,K}\Big] \le$$

$$\le \|p_1\|_s^2 S_0 \Big[\Big\|\int_{1/\lambda}^{R}\Big\|\sum\nolimits_5 f_k K_0 u_k'(x+\xi)\cos\lambda_k(\tau-\xi)\Big\|_{s',[0,\tau]} d\tau\Big\|_{\rho,K}\Big].$$

По условию $\rho = \max(2, s', \alpha' p) \ge s'$, поэтому можно применить в правой части обобщенное неравенство Минковского

$$J_3 \le \|p_1\|_s^2 S_0 \Big[\int_{1/\lambda}^{R}\Big\|\sum\nolimits_5 f_k K_0 u_k'(x+\xi)\cos\lambda_k(\tau-\xi)\Big\|_{(\rho,s'),\,K\times[0,\tau]} d\tau\Big] \le$$

$$\le \|p_1\|_s^2 S_0 \Big[\int_{1/\lambda}^{R}\Big\|\sum\nolimits_5 f_k K_0 u_k'(\eta)\cos\lambda_k(\tau-\xi)\Big\|_{(\rho,s'),\,G\times[0,\tau]} d\tau\Big] \le$$

$$\le c\|p_1\|_s^2 S_0 \Big[\int_{1/\lambda}^{R}\Big\|\Big(\sum\nolimits_5 |\widetilde{f}_k \cos\lambda_k(\tau-\xi)\psi_3|^{\beta}\Big)^{1/\beta}\Big\|_{s',\,[0,\tau]} d\tau\Big] \le$$

$$\le c\|p_1\|_s^2 S_0 \Big[\int_{1/\lambda}^{R} \tau\Big(\sum\nolimits_5 |\widetilde{f}_k \tau^{-1}(\lambda-|\lambda_k|)^{-1}|^{\beta}\Big)^{1/\beta} d\tau \le c\|p_1\|_s^2 \Big(\sum\nolimits_5 |\widetilde{f}_k(\lambda-|\lambda_k|)^{-1}|^{\beta}\Big)^{1/\beta},$$

где введена новая переменная $\eta = x+\xi$, применено обобщение теоремы Рисса для системы $\{u_k'(\eta)\lambda_k^{-1}\}$ и оценка ψ_3 из леммы 2.

Объединяя оценки для J_i, а также $A_{32}^{\pm}$, получим

$$A_{32} \le c\|p_1\|_s \Big[(1+\|p_1\|_s)\Big(\sum\nolimits_5 |\widetilde{f}_k(\lambda-|\lambda_k|)^{-1}|^{\beta}\Big)^{1/\beta} + \|q_1\|_1\lambda^{-1}\ln\lambda \sum\nolimits_5 |\widetilde{f}_k(\lambda-|\lambda_k|)^{-1}|\Big]. \quad (40)$$

Оценки (38), (40), (35) позволяют оценить последнее выражение A_3 в (32)

$$A_3 \le c\|p_1\|_s \Big[\Big(\sum\nolimits_5 |\widetilde{f}_k(\lambda-|\lambda_k|)^{-(1-\varepsilon)}|^{\beta}\Big)^{1/\beta} + \|q_1\|_1\lambda^{-1}\ln\lambda \sum\nolimits_5 |\widetilde{f}_k(\lambda-|\lambda_k|)^{-1}|\Big]. \quad (41)$$

Соотношения (32)–(34), (41) дают окончательную оценку для исследуемого выражения (31) ($P_{1s} = \max P_{1s}^{\pm}$)

$$J \le c(\|p_1\|_s + P_{1s})\Big[\Big(\sum\nolimits_5 |\widetilde{f}_k(\lambda-|\lambda_k|)^{-(1-\varepsilon)}|^{\beta}\Big)^{1/\beta} + \|q_1\|_1\lambda^{-1}\ln\lambda \sum\nolimits_5 |\widetilde{f}_k(\lambda-|\lambda_k|)^{-1}|\Big], \quad \varepsilon \in (0,\rho^{-1}). \quad (42)$$

Искомая оценка установлена. Объединяя ее с (24), имеем окончательное соотношение для исходного выражения

$$I_0 \leq c(\|p_1\|_s + P_{1s})\Big[\lambda^{-1}\ln\lambda\Big(\sum\nolimits_2 |\widetilde{f}_k|^\beta\Big)^{1/\beta} + \ln\lambda\Big(\sum\nolimits_3 |\widetilde{f}_k\lambda_k^{-1}|^\beta\Big)^{1/\beta} + \Big(\sum\nolimits_4 |\widetilde{f}_k|^\beta\Big)^{1/\beta} + $$
$$+ \Big(\sum\nolimits_5 |\widetilde{f}_k(\lambda-|\lambda_k|)^{-(1-\varepsilon)}|^\beta\Big)^{1/\beta} + \lambda^{-1}\ln\lambda\sum\nolimits_5 |\widetilde{f}_k(\lambda-|\lambda_k|)^{-1}|\Big], \quad \beta>1, \quad \varepsilon\in(0,\rho^{-1}). \quad (43)$$

Подставляя в (42) оценки для $\widetilde{f}_k$, получим

$$J = (\|p_1\|_s + P_{1s})o(1)(1+\lambda^{-1}\ln^2\lambda) \qquad \text{при } \widetilde{f}_k = o(1), \quad (44)$$
$$J = (\|p_1\|_s + P_{1s})O(\lambda^{-\nu})(1+\lambda^{-1}\ln^2\lambda) \quad \text{при } \widetilde{f}_k = O(\lambda_k^{-\nu}), \quad \nu>0. \quad (45)$$

Соединяя соотношения (29), (30) и (44), (45), получим оценки для I_0 при условии (10)

$$I_0 = (\|p_1\|_s + P_{1s})[o(1) + O(\lambda^{-1/\rho}\ln\lambda)] \qquad \text{при } \widetilde{f}_k = o(1), \quad (46)$$
$$I_0 = (\|p_1\|_s + P_{1s})O(\max(\lambda^{-\nu}, \lambda^{-1}\ln\lambda)) \quad \text{при } \widetilde{f}_k = O(\lambda_k^{-\nu}). \quad (47)$$

Пусть выполняется условие (11) для $p_1(x)$. Оценим выражения J из (31). Обозначим

$$P(\mu,\gamma,s) = \max\Big(\int_K \|\tau^{-\mu}(p_1(x\pm\tau)-p_1(x))\|^s_{\gamma,\,[0,R_0]}dx\Big)^{1/s} \equiv \max\|\tau^{-\mu}(p_1(x\pm\tau)-p_1(x))\|_{(\gamma,s),\,[0,R_0]\times K}.$$

Для оценки A_1 из (32) фиксируем любое число $\gamma\in[s,\infty]$ и $\mu>1/\gamma$ так, чтобы $P(\mu,\gamma,s) < c < \infty$ (т. е. имеет место (11)). Под знаком интеграла по τ в A_1 умножим и разделим на τ^μ и применим неравенство Гёльдера с параметрами γ, $\gamma' = \gamma/(\gamma-1)$, затем во внешнем интеграле по x применим неравенство Гёльдера с параметрами α, α' — теми же, что и для A_0 в (19). Получим

$$\begin{aligned}
A_1 &\leq S_0\Big[\Big\| \|\tau^{-\mu}(p_1(x+\tau)-p_1(x))\|_{\gamma,\,[0,R_0]}\Big\|\sum\nolimits_5 f_k\tau^\mu K_0 u_k'(x+\tau)\Big\|_{\gamma',\,[1/\lambda,R_0]}\Big\|_{p,K}\Big] \leq \\
&\leq P(\mu,\gamma,s)S_0\Big[\Big\|\sum\nolimits_5 f_k\tau^\mu K_0 u_k'(x+\tau)\Big\|_{(\gamma',\rho),\,[1/\lambda,R_0]\times K}\Big] \leq \\
&\leq P(\mu,\gamma,s)S_0\Big[\Big\|\sum\nolimits_5 f_k\tau^\mu K_0 u_k'(\xi)\Big\|_{(\rho,\gamma'),\,G\times[1/\lambda,R_0]}\Big] \leq \\
&\leq cP(\mu,\gamma,s)S_0\Big[\Big\|\tau^\mu\Big(\sum\nolimits_5 |\widetilde{f}_k\psi_3|^\beta\Big)^{1/\beta}\Big\|_{\gamma',\,[1/\lambda,R_0]}\Big] \leq \\
&\leq cP(\mu,\gamma,s)\|\tau^{\mu-1}\|_{\gamma',\,[1/\lambda,R_0]}\Big(\sum\nolimits_5 |\widetilde{f}_k(\lambda-|\lambda_k|)^{-1}|^\beta\Big)^{1/\beta}; \\
A_1 &\leq cP(\mu,\gamma,s)\Big(\sum\nolimits_5 |\widetilde{f}_k(\lambda-|\lambda_k|)^{-1}|^\beta\Big)^{1/\beta}. \qquad (48)
\end{aligned}$$

При выводе оценки (48) мы повторили схему (18)–(20) выкладок с A_0. Условие $\mu > 1/\gamma$ гарантирует справедливость соотношения $(\mu-1)\gamma' > -1$; поскольку $\gamma \geq s$, то $\gamma' \leq s' \leq \rho$, что обеспечивает условие применимости обобщенного неравенства Минковского. Такая же оценка (48) верна для A_2. По прежней схеме оценивается A_3. В итоге получаем оценки (43)–(47) с заменой P_{1s} на $P(\mu,\gamma,s)$.

Мы оценили часть I_0 выражения (17). Заменяя I_0 в (17) соотношением (43) и используя оценки (46), (47), устанавливаем для всего выражения I, а следовательно, и для Δ_λ окончательные оценки. Имеем $I - I_0 = o(1) + \lambda^{-1/p}$ при $\widetilde{f}_k = o(1)$, $I - I_0 = O(\max(\lambda^{-\nu}, \lambda^{-1}))$ при $\widetilde{f}_k = O(\lambda_k^{-\nu})$, поэтому

$$\Delta_\lambda = o(1) + O(\lambda^{-1/\rho}\ln\lambda) \qquad \text{при } \widetilde{f}_k = o(1), \quad \rho = \max(2, s', \alpha'p), \quad (49)$$
$$\Delta_\lambda = O(\max(\lambda^{-\nu}, \lambda^{-1}\ln\lambda)) \quad \text{при } \widetilde{f}_k = O(\lambda_k^{-\nu}). \quad (50)$$

Оценка (49) и лемма 1 приводят к соотношению (12). Поскольку тригонометрическая система функций образует базис в $\mathcal{L}^p(G)$ $\forall p > 1$, то из (12) и неравенства треугольника следует справедливость (13). Оценка (50) доказывает последнее соотношение (14) в теореме. Теорема 2 доказана.

Замечание 7. Уточним оценку (49). В нее входит параметр α'. Оценка остатка в (49) будет наилучшей при наименьшем ρ. Для α справедливо $1 < \alpha \le s/p$, поэтому $(1-p/s)^{-1} \le \alpha' < \infty$. Положим $\alpha = s/p$, $\alpha' = (1-p/s)^{-1}$, $\alpha' p = (1/p - 1/s)^{-1}$. Поскольку $p > 1$, то $(s')^{-1} > 1/p - 1/s$, т.е. $s' < (1/p-1/s)^{-1} = \alpha' p$. Таким образом, считаем в оценках

$$\rho = \max(2, (1/p - 1/s)^{-1}). \tag{51}$$

5. *Заключение.* Оценим разности Δ_λ для $p_1(x) \in \mathcal{L}^s(G)$. Доказывая теорему 2, мы фактически установили следующие оценки разности спектральных разложений, справедливые при единственном условии (3) на $p_1(x)$.

Теорема 3. *Пусть $p \in [1, s)$, выполняются условие* (3) *и условия* A. *Тогда $\forall f(x) \in \mathcal{L}^r(G)$: $\Delta_\lambda = o(1)(1 + \|p_1\|_s \ln\lambda)$, $\lambda \to \infty$;*

$$\begin{aligned}
&\Delta_\lambda = o(1)(\|p_1\|_s + \ln^{-1}\lambda) && \text{при } \widetilde{f}_k = o(\ln^{-1}\lambda_k),\\
&\Delta_\lambda = O(\ln^{-\alpha}\lambda)(1 + \|p_1\|_s \ln\lambda) && \text{при } \widetilde{f}_k = O(\ln^{-\alpha}\lambda_k),\\
&\Delta_\lambda = O(\max(\lambda^{-\nu}, \lambda^{-1}, \|p_1\|_s \lambda^{-\nu}\ln\lambda)) && \text{при } \widetilde{f}_k = O(\lambda_k^{-\nu}).
\end{aligned} \tag{52}$$

Для доказательства оценок теоремы 3 следует подставить соотношения для $\widetilde{f}_k$ в (17) и воспользоваться оценками (25)–(28). Оценка (52) при $\nu > 1$ должна была бы содержать выражение $\|p_1\|_s \lambda^{-1}\ln\lambda$ (согласно (28)), но в [5] установлена оценка $\Delta_\lambda = O(\lambda^{-1})$ при $\nu > 1$ $\forall s$ (без условий (10), (11) на $p_1(x)$). Эта оценка приведена в (52) и в (14).

Оценка (14) теоремы 2 при $\nu \in (0,1)$ совпадает с оценкой последнего члена суммы $\sigma_\lambda(x, f)$, что подтверждает точность полученных оценок.

В заключение отметим, что ранее, в основном, исследовался вопрос о равномерной равносходимости на компактах спектральных разложений по собственным и присоединенным функциям операторов n-го порядка и разложений в тригонометрический ряд Фурье — это работы Ж. Биркгофа, Я.Д. Тамаркина, М. Стоуна, В.А. Ильина, И. Йо, А.П. Хромова, В.С. Рыхлова, А.М. Минкина, Е.И. Никольской и др. Краткий обзор этих результатов можно найти в [12], [13]. Случай негладкого коэффициента при $(n-1)$-й производной подробно исследован В.С. Рыхловым для регулярной двухточечной краевой задачи (см. замечание 5). При этом рассматривался более общий, квазидифференциальный оператор; для обоснования результатов применен метод резольвент. Отметим также работы [14]–[17], связанные с вопросами равномерной равносходимости спектральных разложений и сходимости их в L_p для широкого класса двухточечных краевых задач.

Автор признателен В.А. Ильину и Е.И. Моисееву за плодотворные беседы по теме работы.

Литература

1. Ильин В.А. *Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений.* 1 // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т.16. – № 5. – С.771-794.
2. Ильин В.А. *Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений.* 2 // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т.16. – № 6. – С.980–1006.
3. Ильин В.А. *Необходимые и достаточные условия базисности в L_p и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений и разложений по системам экспонент* // ДАН СССР. – 1983. – Т.273. – № 4. – С.789–793.

4. Ильин В.А. *Равносходимость с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям одномерного оператора Шредингера с комплексным потенциалом из класса L_1* // Дифференц. уравнения. – 1991. – Т.27. – № 4. – С.577–597.
5. Ломов И.С. *О приближении функций на отрезке биортогональными рядами, связанными с дифференциальными операторами второго порядка* // Докл. РАН. – 1995. – Т.343. – № 5. – С.910–913.
6. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Т.1. – М.: Мир, 1965. – 615 с.
7. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Т.2. – М.: Мир, 1965. – 537 с.
8. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* – М.: Наука, 1975. – 480 с.
9. Ломов И.С. *Об аппроксимации функций на отрезке спектральными разложениями оператора Шредингера* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ. – 1995. – № 4. – С.43–54.
10. Ломов И.С. *О скорости равносходимости рядов Фурье по собственным функциям операторов Штурма-Лиувилля в интегральной метрике* // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т.18. – № 9. – С.1480–1493.
11. Рыхлов В.С. *О скорости равносходимости для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n-1)$-й производной* // ДАН СССР. – 1984. – Т.279. – № 5. – С.1053–1056.
12. Ломов И.С. *О скорости сходимости биортогональных рядов, связанных с дифференциальными операторами второго порядка* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т.32. – № 1. – С.71–82.
13. Рыхлов В.С. *Скорость равносходимости для дифференциальных операторов с ненулевым коэффициентом при $(n-1)$-й производной* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т.26. – № 6. – С.975–989.
14. Rykhlov V. *Equiconvergence rate in terms of general moduli of continuity for differential operators* // Results in Math. – 1996. – V.29. – P.153–168.
15. Касумов Т.Б. *Дробные степени квазидифференциальных операторов и теоремы о базисности* // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т.25. – № 4. – С.729–731.
16. Kaufmann F.J., Luther W.J. *Degree of convergence of Birkhoff series, direct and inverse theorems* // J. Math. Anal. and Appl. – 1994. – V.187. – № 1. – P.156–168.
17. Benzinger H.E. *The L_p behavior of eigenfunction expansions* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1972. – V.174. – № 447. – P.333–344.

Московский государственный университет

Поступила
19.09.1995