ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 4 (443)

УДК 517.927

*А.Л. ТЕПТИН*

# К ВОПРОСУ ОБ ОСЦИЛЛЯЦИОННОСТИ СПЕКТРА МНОГОТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$Ly \equiv y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(\cdot) y^{(k)} = \lambda q(\cdot) y, \tag{1}$$

$$l_{jc_j} y \equiv \sum_{k=1}^{n} b_{jk} y^{(n-k)}(c_j) = 0, \quad j = \overline{1,r}, \tag{2}$$

$$y^{(\nu_i)}(a_i) = 0, \quad \nu_i = \overline{0, k_i - 1}, \quad i = \overline{1,m}, \tag{3}$$

где $1 < r \le n$, $1 \le m \le n - r$, $k_1 + \dots + k_m = n - r$, $b_{jk} \in \mathcal{R}$, $k = \overline{1,n}$, $b_{j1} = 1$, $j = \overline{1,r}$, $a \le c_1 \le \dots \le c_r \le b$, $a \le a_1 < \dots < a_m \le b$,

$$\min\{c_1, a_1\} = a, \quad \max\{c_r, a_m\} = b. \tag{4}$$

Следуя [1], спектр задачи (1)–(3) будем называть осцилляционным, если он состоит из собственных значений, положительных простых и образующих неограниченную последовательность $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots$, причем для каждого $k$, $k = 0, 1, \dots$, собственная функция $y_k(x)$ задачи (1)–(3), соответствующая собственному значению $\lambda_k$, такова, что функция $\psi_k(x) = y_k(x)/w(x)$, где $w(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - a_i)^{k_i}$ при $r < n$ и $w(x) \equiv 1$ при $r = n$, непрерывна в $[a, b]$, имеет в $[a, b]$ ровно $k$ нулей, которые все изолированные, узловые, нули $\psi_k(x)$ и $\psi_{k+1}(x)$ перемежаются, а последовательность $\{\psi_k(x)\}_0^\infty$ образует в $[a, b]$ ряд Маркова ([2]–[4]).

Условия осцилляционности спектра задачи (1)–(3) при $r = 0$ рассмотрены, например, в ([1], [5], [6]), при $r = 1$ — в [7], при совпадении каждой из точек $c_j$ либо с $a$, либо с $b$ — в [3], [8]–[10], при $b_{jk} = 0$, $k = \overline{1, j-1}$, $j = \overline{1,r}$ — в [6], [11], при $b_{j1} \ne 0$, $j = \overline{1,r}$, произвольном $r$, $0 < r < n$, $m \ge 2$, $a = a_1 < a_2 < \dots < a_m = b$, $a < c_1 < c_2 < \dots < c_r < b$ либо $a = c_1 \le c_2 \le \dots \le c_r = b$ — в [12]–[14].

В данной статье результаты работ [12]–[14] распространяются на любые случаи расположения точек $a_i$, $i = \overline{1,m}$, $c_j$, $j = \overline{1,r}$, в $[a, b]$ при соблюдении условия (4), любых $r$, $0 < r \le n$, и $m$, $m \ge 1$, а также обсуждаются свойства, которыми будет обладать спектр задачи (1)–(3), если для миноров матрицы $\mathcal{B} = (b_{jk})$, $j = \overline{1,r}$, $k = \overline{1,m}$, требуемые в [10], [12]–[14] неравенства

$$\mathcal{B}\begin{pmatrix} \nu \cdots \nu + \mu \\ 1 \cdots \mu + 1 \end{pmatrix} > 0, \quad \nu = \overline{1, r - \mu}, \quad \mu = \overline{1, r - 1}, \tag{5}$$

гарантирующие при прочих условиях этих работ для функции Грина $\mathcal{G}(x, s)$ уравнения

$$Ly = 0 \tag{6}$$

с краевыми условиями (2), (3) знакопостоянство функции $\mathcal{G}(x, s) w(x)$ [15] в каждой из непустых полос

$$a \le x \le b, \quad c_j < s < c_{j+1}, \quad j = \overline{0,r}, \quad c_0 = a, \quad c_{r+1} = b, \tag{7}$$

заменить существованием перестановки $(j_1, j_2, \dots, j_r)$ множества $\{1, 2, \dots, r\}$, для которой

$$j_\nu < j_{\nu+k}, \quad k = \overline{2, r-\nu}, \quad \nu = \overline{1, r-2}, \tag{8}$$

$$\mathcal{B}\begin{pmatrix} j_\nu \cdots j_{\nu+\mu} \\ 1 \cdots \mu+1 \end{pmatrix} > 0, \quad \nu = \overline{1, r-\mu}, \quad \mu = \overline{1, r-1}, \tag{9}$$

что при сохранении прочих условий работ [10], [12]–[14] также обеспечивает сохранение знака $\mathcal{G}(x,s)w(x)$ в каждой из полос (7) [16], но, возможно, иного, нежели при условии (5).

**1.** Как известно, нулевым местом или отдельным нулем непрерывной функции $u(x)$ называется всякая компонента связности множества ее нулевых точек. Нулевое место $[c,d] \subset (a,b)$ называется узлом (пучностью), если $u(c-\varepsilon)u(d+\varepsilon) < 0$ $(> 0)$ для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ ([2]–[4]). Следуя [1], $k$-кратностью изолированного нуля $x_0$ функции $u(x)$ назовем число $r_k(u, x_0) = \max\{i \le k : u(x) = o(|x - x_0|^{i-1})\}$, а для нулевого места $\Omega$ другого типа положим $r_k(u, \Omega) = k$. Пусть $r_k(u, \mathcal{J})$ — сумма $k$-кратностей нулевых мест $u(x)$ в промежутке $\mathcal{J}$, $r_k(u) = r_k(u, [a,b])$, так что $r_1(u)$ — число отдельных нулей $u(x)$ в $[a,b]$; $\varphi(u, \mathcal{J})$ — число нулей $u(x)$ на $\mathcal{J}$ с учетом их обычной кратности [17], $\varphi(u) = \varphi(u, [a,b])$; $S(u, \mathcal{J})$ — число перемен знака $u(x)$ на $\mathcal{J}$, т. е. такое число $l$, что $\exists C = \mathrm{const} \ne 0$, $\exists x_i \in \mathcal{J}$, $i = \overline{1,l}$, $\inf \mathcal{J} = x_0 < x_1 \le \cdots < x_{l+1} = \sup \mathcal{J} : (-1)^i C u(x) \ge 0$ почти всюду в $(x_i, x_{i+1})$, $u(x) \not\sim 0$ в $(x_i, x_{i+1})$, $i = \overline{0,l}$, при этом в случае $\mathcal{J} = [a,b]$ положим $\operatorname{sign}_1 u = \operatorname{sign} C$ ([3], [4], [8]), $\operatorname{sign}_2 u = (-1)^l \operatorname{sign} C$, $S(u) = S(u, [a,b])$ [3], [4]; $C^k\mathcal{J}$ $(\widetilde{C}^k\mathcal{J})$ — множество вещественных функций, имеющих в $\mathcal{J}$ непрерывную (абсолютно непрерывную) $k$-ю производную, $\widetilde{C}^{-1}\mathcal{J}$ — множество суммируемых в $\mathcal{J}$ функций; $C_*[a,b]$ — множество непрерывных на $[a,b]$ функций, обладающих только изолированными нулями; $\delta[a,b]$ — множество обобщенных функций вида $u(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} A_i \delta(x - s_i)$, $a < s_1 < \cdots < s_k < b$, $k = 1, 2, \dots$ ($\delta(x)$ — дельта-функция), для которых будем полагать $S(u) = S(U)$, $\operatorname{sign}_1 u = \operatorname{sign}_1 U$, $\operatorname{sign}_2 u = \operatorname{sign}_2 U$, где $U = (A_1, \dots, A_k)$ [3], [4], а $S(U)$ для ненулевого вектора $U$ будет означать число перемен знака в ряду его координат с выброшенными нулями, при этом $\operatorname{sign}_1 U = \operatorname{sign} A^*$, $\operatorname{sign}_2 U = \operatorname{sign} A^{**}$, где $A^*$ — первая, а $A^{**}$ — последняя ненулевые координаты $U$ [3], [4]; $\mathcal{B}(j_1 \cdots j_\mu) = \mathcal{B}\binom{j_1 \cdots j_\mu}{1 \cdots \mu}$ — минор матрицы $\mathcal{B}$; $\mathcal{D}(j_1 \cdots j_{\mu+1}) = \mathcal{B}(j_1 \cdots j_{\mu-1})\mathcal{B}(j_1 \cdots j_{\mu+1})/(\mathcal{B}(j_1 \cdots j_\mu)\mathcal{B}(j_1 \cdots j_{\mu-1} j_{\mu+1}))$, $\mu = \overline{2, r-1}$, $\mathcal{D}(j_1 j_2) = \mathcal{B}(j_1 j_2)$; $c = (c_1, \dots, c_r)$ — вектор, $c_0 = a$, $c_{r+1} = b$; $\sigma_c(s) = (-1)^{r-j}$ для $s \in (c_j, c_{j+1})$, $j = \overline{0,r}$, $\sigma_c(c_j)$, $j = \overline{1,r}$, будем определять произвольно; $I$ — единичный оператор; $\mathcal{L}_k^p$ — множество дифференциальных операторов вида $\frac{d^k}{dx^k} + \sum\limits_{i=0}^{k-1} p_i(\cdot) \frac{d^i}{dx^i}$, $p_i(\cdot) \in \widetilde{C}^{p-1}[a,b]$, $i = \overline{0, k-1}$, $\mathcal{L}_0^p = \{I\}$; $T_k^p(a,b)$ — класс таких операторов $\mathcal{V} \in \mathcal{L}_k^p$, что $\varphi(y) \le k-1$ для любого решения $y(x) \not\equiv 0$ уравнения $\mathcal{V}y = 0$, $T_0^p(a,b) = \mathcal{L}_0^p$; $\widetilde{T}_n^p(\mathcal{B}; a, b; c_1, \dots, c_r)$ при данных $\mathcal{B}$ и $c_j$, $j = \overline{1,r}$, — класс таких операторов $L \in \mathcal{L}_n^p$, что $\varphi(y) \le n - \mu - 1$ для любого решения $y(x) \not\equiv 0$ уравнения (6), удовлетворяющего любым $\mu$ из условий (2) $\forall \mu$, $\mu = \overline{1,r}$; $T_{n1}^p(\mathcal{B}; a, b; c_1, c_r)$ — пересечение классов $\widetilde{T}_n^p(\mathcal{B}; a, b; c_1', \dots, c_r')$ для всевозможных $c_j'$, $j = \overline{1,r}$, $c_1 \le c_1' \le \cdots \le c_r' \le c_r$; $Q = [a,b] \times ([a,b] \setminus \{c_j\}_1^r)$.

Очевидно, для данного вектора $c = (c_1, \dots, c_r)$ при условии $L \in \widetilde{T}_n^0(\mathcal{B}; a, b; c_1, \dots, c_r)$ существует функция Грина $\mathcal{G}_c(x,s)$ задачи (6), (2), (3). Пусть

$$\Gamma_c(x,s) = \begin{cases} \mathcal{G}_c(x,s)\sigma_c(s)/w(x) & \text{при } x \ne a_i, \\ (\partial^{k_i}\mathcal{G}_c(a_i,s)/\partial x^{k_i})\sigma_c(s)/w^{(k_i)}(a_i) & \text{при } x = a_i, \quad i = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{10}$$

Непрерывность $\Gamma_c(x,s)$ в $Q$ и существование равномерных конечных пределов $\Gamma_c(x, c_j \pm 0)$, $j = \overline{1,r}$, можно доказать, дословно повторяя рассуждения из [13], [14], которые применимы здесь, т. к. $k_i \le n - r \le n - 2$ при $r > 1$, и справедливы при любом расположении точек $a_i$, $i = \overline{1,m}$, и $c_j$, $j = \overline{1,r}$, на $[a,b]$. Поэтому $\Gamma_c(x,\cdot)$ и $\mathcal{G}_c(x,\cdot)$ при $s = c_j$, $j = \overline{0, r+1}$, можно доопределить по непрерывности с любой из сторон либо следующим образом: $\Gamma_c(x, c_j) = 0.5(\Gamma_c(x, c_j + 0) +$

$\Gamma_c(x, c_j - 0))$, $\mathcal{G}_c(x, c_j) = 0.5(\mathcal{G}_c(x, c_j + 0) + \mathcal{G}_c(x, c_j - 0)\sigma_c(c_j - 0)\sigma_c(c_j + 0))$, $a \le x \le b$, $c_j \in (a, b)$, $1 \le j \le r$.

В силу (10), теоремы [15], леммы 1 [13] (справедливость которой не зависит от строгости или нестрогости неравенств $c_j \le c_{j+1}$, $j = \overline{0, r}$) и замечания к ней из [14] при условии (5) и

$$L \in T^0_{n1}(\mathcal{B}; a, b; c_1, c_r) \tag{11}$$

выполняется неравенство

$$\Gamma_c(x, s) > 0 \quad \text{в} \quad [a, b] \times (a, b). \tag{12}$$

**2.** В силу теорем 1 и 2 [18] при условии (11) для каждого вектора $c = (c_1, \dots, c_r)$, $a \le c_1 \le \dots \le c_r \le b$ и каждой перестановки $(j_1, \dots, j_r)$ множества $\{1, \dots, r\}$ оператор $L$ допускает в $[a, b]$ разложение

$$L^{j_1 \cdots j_\mu c}_{n-\mu} = \left(\frac{d}{dx} - \alpha^c_{j_1 \cdots j_{\mu+1}}(x) I\right) L^{j_1 \cdots j_{\mu+1} c}_{n-\mu-1}, \quad \mu = \overline{0, r-1}, \tag{13}$$

где $L^{j_1 \cdots j_\mu c}_{n-\mu} = L$ при $\mu = 0$, $L^{j_1 \cdots j_\mu c}_{n-\mu}$ не зависят от $c_{j_{\mu+1}}, \dots, c_{j_r}$ и от порядка индексов $j_1, \dots, j_\mu$, $\mu = \overline{1, r}$,

$$L^{j_1 \cdots j_r c}_{n-r} = L^c_{n-r} \in T^r_{n-r}(a, b), \tag{14}$$

$$(L^{jc}_{n-1} y)(c_j) = l_{jc_j} y \quad \forall y \in C^{n-1}[a, b], \quad j = \overline{1, r}, \tag{15}$$

$\alpha^c_{j_1 \cdots j_\mu}(x)$ не зависят от $c_{j_{\mu+1}}, \dots, c_{j_r}$ и от порядка индексов $j_1, \dots, j_{\mu-1}$, $\mu = \overline{2, r}$, $\alpha^c_{j_1 \cdots j_\mu}(x) \in \widetilde{C}^{\mu-2}[a, b]$, $\mu = \overline{1, r}$,

$$(\alpha^c_{j_1 \cdots j_{\mu+1}}(x) - \alpha^c_{j_1 \cdots j_{\mu-1} j_{\mu+1} j_\mu}(x)) \mathcal{D}(j_1, \dots, j_{\mu+1}) > 0 \quad \forall x \in [a, b], \quad \mu = \overline{1, r-1}. \tag{16}$$

Кроме того, из (14) (см., напр., [17]) следует факторизация

$$L^c_k = \left(\frac{d}{dx} - \beta_k(x) I\right) L^c_{k-1}, \quad \beta_k(\cdot) \in \widetilde{C}^{n-k-1}[a, b], \quad k = \overline{1, n-r}, \quad L^c_0 = I. \tag{17}$$

Пусть

$$\Gamma_c z = \int_a^b \Gamma_c(\cdot, s) z(s) ds, \tag{18}$$

$$y_c(x) = (\Gamma_c u)(x), \tag{19}$$

$$v_c(x) = y_c(x) w(x), \tag{20}$$

$$v^c_0(x) = v^{0c}_{j_1 \cdots j_r}(x) = (L^c_{n-r} v_c)(x), \tag{21}$$

$$v^{r-\mu c}_{j_1 \cdots j_\mu}(x) = \left(\frac{d}{dx} - \alpha^c_{j_1 \cdots j_{\mu+1}}(x) I\right) v^{r-\mu-1 c}_{j_1 \cdots j_{\mu+1}}(x) = (L^{j_1 \cdots j_\mu c}_{n-\mu} v_c)(x), \quad \mu = \overline{0, r-1}, \tag{22}$$

так что в силу (10), (13), (18)–(22) при $\mu = 0$ $v^{r-\mu c}_{j_1 \cdots j_\mu}(x) = v^{rc}(x) = (L v_c)(x) = \sigma_c(x) u(x)$.

В силу (22) и свойств операторов $L^{j_1 \cdots j_\mu c}_{n-\mu}$ функции $v^{r-\mu c}_{j_1 \cdots j_\mu}(x)$ не зависят от порядка индексов $j_1, \dots, j_\mu$, $\mu = \overline{1, r}$. Поэтому из (22) следует

$$v^{r-\mu c}_{\nu \cdots \nu+\mu-1}(x) - v^{r-\mu c}_{\nu+1 \cdots \nu+\mu}(x) = (\alpha^c_{\nu+1 \cdots \nu+\mu \nu}(x) - \alpha^c_{\nu \cdots \nu+\mu}(x)) v^{r-\mu-1 c}_{\nu \cdots \nu+\mu}(x),$$

где при условиях (5), (11) в силу (16)

$$\alpha^c_{\nu+1 \cdots \nu+\mu \nu}(x) - \alpha^c_{\nu \cdots \nu+\mu}(x) < 0 \quad \forall x \in [a, b], \quad \nu = \overline{1, r-\mu}, \quad \mu = \overline{1, r-1}. \tag{23}$$

Согласно лемме 3 [14] при условии (11) все функции $v^{r-\mu c}_{j_1 \cdots j_\mu}(x)$, $\mu = \overline{1, r}$, непрерывны по $(x, c)$ в области $\mathcal{H} = \{(x, c_1, \dots, c_r) : a \le x \le b,\ a \le c_1 \le \dots \le c_r \le b\}$.

**3. Лемма 1.** *Если $S(u)=p$,*

$$u(\cdot)\in C_*[a,b] \tag{24}$$

*и все узлы $u(x)$ отличны от $c_j$, $j=\overline{1,r}$, то при условиях (5), (11) либо*

$$S(v_0^c)\le r_1(v_0^c)\le S(u)=p, \tag{25}$$

*либо*

$$r_1(v_0^c)=p+1,\quad v_0^c(a)=0,\quad v_0^c(b)=0,\quad S(v_0^c)\le r_1(v_0^c,(a,b))<p. \tag{26}$$

*Если при этом*

$$S(v_0^c)=S(u), \tag{27}$$

*то*

$$\operatorname{sign}_1 v_0^c=\operatorname{sign}_1 u. \tag{28}$$

**Доказательство.** При $a<c_1<\dots<c_r<b$ и $a=c_1\le\dots\le c_r=b$ справедливость леммы доказана в [12]–[14], причем установлено выполнение (25).

Пусть $a\le c_1\le\dots\le c_r\le b$, причем выполняется одно из неравенств $a<c_1$ или $c_r<b$.

Как в [14], выберем $\varepsilon_0>0$ меньше каждого из следующих чисел: 1) $k$-й доли расстояния от каждой из точек, в которой совпадают $k$ последовательных значений $c_j$, до ближайшего к ней узла функции $u(x)$; 2) расстояния от $a$ до первого и от $b$ до последнего узла каждой из функций $u(x)$ и $v^{r-\mu c}_{\nu\cdots\nu+\mu-1}(x)$, $\nu=\overline{1,r-\mu+1}$, $\mu=\overline{1,r}$; 3) $\frac{c_{j+1}-c_j}{m_1+m_2}$ для всех $j$, $0\le j\le r$, при которых $c_{j-m_1+1}=\dots=c_j<c_{j+1}=\dots=c_{j+m_2}$.

Пусть $c'_j=a+j\varepsilon$, $j=\overline{0,k}$, если $c_j=a$, $j=\overline{0,k}$, $c_{k+1}\ne a$; $c'_j=b-(r-j+1)\varepsilon$, $j=\overline{r-k+1,r+1}$, если $c_j=b$, $j=\overline{r-k+1,r+1}$, $c_{r-k}\ne b$; $c'_{j+i}=c_j-([k/2]-i)\varepsilon$, $i=\overline{0,k-1}$, если $c_{j-1}<c_j=\dots=c_{j+k-1}<c_{j+k}$, $1\le j\le r-k+1$, где $0<\varepsilon<\varepsilon_0$; $c'=(c'_1,\dots,c'_r)$.

В силу теоремы 1 [13] или леммы 1 [12] $S(v^{r-\mu c'}_{\nu\cdots\nu+\mu-1})\le p+r-\mu$, $\nu=\overline{1,r-\mu+1}$, $\mu=\overline{1,r}$, откуда в силу непрерывности $v^{r-\mu c'}_{\nu\cdots\nu+\mu-1}(x)$ в $\mathcal{H}$ при достаточно малом $\varepsilon$ $S(v^{r-\mu c}_{\nu\cdots\nu+\mu-1})\le S(v^{r-\mu c'}_{\nu\cdots\nu+\mu-1})\le p+r-\mu$, $\nu=\overline{1,r-\mu+1}$, $\mu=\overline{1,r}$, так что

$$S(v_0^c)\le S(v_0^{c'})\le p,\quad S(v^{1c}_{1\cdots r-1})\le S(v^{1c'}_{1\cdots r-1})\le p+1,\quad S(v^{1c}_{2\cdots r})\le S(v^{1c'}_{2\cdots r})\le p+1. \tag{29}$$

Так как при условии (24) все нули всех $v^{r-\mu c}_{j_1\cdots j_\mu}(x)$, $\mu=\overline{1,r}$, изолированные [10], то в силу (29) и леммы 2 [13] $r_1(v_0^c)\le p+2$.

Пусть для фиксированного вектора $c=(c_1,\dots,c_r)$

$$\widetilde{L}^{j_1c}_{r-1}:=\left(\frac{d}{dx}-\alpha^c_{j_1j_2}(x)I\right)\cdots\left(\frac{d}{dx}-\alpha^c_{j_1\cdots j_r}(x)I\right), \tag{30}$$

$$\widetilde{L}^c_r:=\left(\frac{d}{dx}-\alpha^c_{j_1}(x)I\right)\widetilde{L}^{j_1c}_{r-1}, \tag{31}$$

$$\widetilde{l}_{jc_j}y:=(\widetilde{L}^{jc}_{r-1}y)(c_j),\quad j=\overline{1,r}, \tag{32}$$

$$\mathcal{G}_{rc}(\cdot,s)=L^c_{n-r}\mathcal{G}_c(\cdot,s),\quad \Gamma_{rc}(x,s)=\mathcal{G}_{rc}(x,s)\sigma_c(s), \tag{33}$$

так что в силу (13) $L=\widetilde{L}^c_rL^c_{n-r}$.

Для любой $u(\cdot)\in C_*[a,b]$, узлы которой отличны от $c_j$, $j=\overline{1,r}$, всегда можно построить такую функцию $u_1(\cdot)\in C_*[a,b]$, что $|u_1(x)|\le 1$ $\forall x\in[a,b]$, $u_1(x)>0$ почти всюду в $[a,b]$ и при

$$u_{\pm\delta}(x)=u(x)\pm\delta u_1(x) \tag{34}$$

будет

$$u_{\pm\delta}(\cdot) \in C_*[a,b], \quad S(u) = S(u_{\pm\delta}) \tag{35}$$

для любого достаточно малого $\delta > 0$, причем все узлы $u_{\pm\delta}(x)$ отличны от $c_j$, $j = \overline{1,r}$.

Пусть $v_{01}^c(x)$ — функция, построенная по формулам (18)–(21) для $u(x) := u_1(x)$, непрерывная в $[a,b]$ $\forall c$. Ввиду (10), (33)

$$v_{01}^c(x) = L_{n-r}^c\left(w(\cdot)\int_a^b \Gamma_c(\cdot,s)u_1(s)ds\right) = \int_a^b L_{n-r}^c \mathcal{G}_c(\cdot,s)\sigma_c(s)u_1(s)ds =$$

$$= \int_a^b \mathcal{G}_{rc}(\cdot,s)\sigma_c(s)u_1(s)ds. \tag{36}$$

В [13] показано, что $\mathcal{G}_r(x,s)$ есть функция Грина задачи

$$\widetilde{L}_r^c y = 0, \quad \widetilde{l}_{jc_j} y = 0, \quad j = \overline{1,r}.$$

Как видно из доказательства теоремы [15], справедливость ее заключения обеспечивается в конечном итоге факторизацией (13)–(15) и неравенствами (23). Так как факторизация (30)–(32) того же типа, что и (13)–(15), а коэффициенты $\alpha_{j_1\cdots j_\mu}^c(x)$, $\mu = \overline{1,r}$, в (13) и (30), (31) одни и те же, то заключение теоремы [15] верно и для $\mathcal{G}_{rc}(x,s)$, т. е.

$$\mathcal{G}_{rc}(x,s)\sigma_c(s) > 0, \;\; x \in [a,b], \;\; s \in \bigcup_{j=1}^{r-1}(c_j, c_{j+1}),$$
$$\mathcal{G}_{rc}(x,s) = 0, \;\; a \le x \le s, \;\; \mathcal{G}_{rc}(x,s)\sigma_c(s) > 0, \;\; s < x \le b, \;\; c_r < s \le b,$$
$$\mathcal{G}_{rc}(x,s)\sigma_c(s) > 0, \;\; a \le x < s, \;\; \mathcal{G}_{rc}(x,s) = 0, \;\; s \le x \le b, \;\; a \le s < c_1.$$

Отсюда в силу (36)

$$v_{01}^c(x) > 0 \;\; \forall x \in [a,b]. \tag{37}$$

Если для данного $u(x)$

$$r_1(v_0^c) > p, \tag{38}$$

то в силу (29) $v_0^c(x)$ имеет нуль хотя бы в одной из точек $x = a$, $x = b$ или (и) имеет в $(a,b)$ хотя бы один нуль-пучность. Но если $x_i$, $i = \overline{1,p_0}$, — все узлы $v_{1\cdots r-1}^{1c_1}(x)$ на $[a,b]$, $x_i < x_{i+1}$, $i = \overline{1,p_0-1}$, $x_0 = a$, $x_{p_0+1} = b$, то ввиду изолированности всех нулей $v_0^c(x)$ и леммы 2 [13] эта функция имеет не более одного нуля в каждом из сегментов $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0,p_0}$, причем нуль в $(x_i, x_{i+1})$, $0 \le i \le p_0$, может быть только узлом. Значит, если $v_0^c(x)$ имеет нуль-пучность, то он совпадает с одной из точек $x_i$ $\exists i = i_0$, $1 \le i_0 \le p_0$, поэтому в силу (22) и леммы 2 [13] $\exists \mathcal{D} : \mathcal{D}v_0^c(x) > 0$ $\forall x \in [x_{i_0-1}, x_{i_0+1}] \setminus \{x_{i_0}\}$. Таким образом, в силу (29) в случае (38) $v_0^c(x)$ может иметь не более одного нуля-пучности, причем при наличии последнего

$$r_1(v_0^c) = p + 1. \tag{39}$$

Если

$$r_1(v_0^c) = p + 2, \tag{40}$$

то $v_0^c(x)$ не имеет нуля-пучности в $[a,b]$ и при достаточно малом $\delta > 0$ хотя бы для одной из функций $v_{0,\pm\delta}^c(x)$, построенной по формулам (18)–(21) для $u(x) := u_{\pm\delta}(x)$ (см. (34)), т. е. для

$$v_{0,\pm\delta}^c(x) = v_0^c(x) \pm \delta v_{01}^c(x) \tag{41}$$

в силу (35), (37) и непрерывности $v_0^c(x)$ и $v_{01}^c(x)$ на $[a,b]$ $S(v_{0,\pm\delta}^c) \ge r(v_0^c) - 1 = p + 1 = S(u_{\pm\delta}) + 1$, что противоречит (29). Значит, случай (40) невозможен.

Аналогичным образом при достаточно малом $\delta > 0$ хотя бы для одной из функций $v^c_{0,\pm\delta}(x)$ в случае (39) при $v^c_0(a) \neq 0$ или $v^c_0(b) \neq 0$, в том числе и при наличии нуля-пучности $v^c_0(x)$ в $[a, b]$ $S(v^c_{0,\pm\delta}) \geq r_1(v^c_0) = p + 1 = S(u_{\pm\delta}) + 1$. Значит, этот случай тоже невозможен.

Таким образом, (38) может быть только в случае (39) при $v^c_0(a) = 0$ и $v^c_0(b) = 0$. Но тогда $S(v^c_0) \leq r_1(v^c_0, (a, b)) = r_1(v^c_0) - 2 \leq p - 1$.

Итак, выполняется либо (25), либо (26).

В случае (27) в силу (29), непрерывности $v^c_0(x)$ в $\mathcal{H}$ и выбора $\varepsilon_0$ при достаточно малом $\varepsilon$ $p \geq S(v^{c'}_0, [a + \varepsilon_0, b]) \geq S(v^c_0, [a + \varepsilon_0, b]) = S(v^c_0) = S(u) = p$, значит,

$$S(v^{c'}_0) = p \tag{42}$$

и $v^{c'}_0(x)$ не имеет узлов в $(a, a + \varepsilon_0)$, так что в силу (24) и непрерывности $v^c_0(x)$ в $\mathcal{H}$

$$\operatorname{sign}_1 v^{c'}_0 = \operatorname{sign}_1 v^c_0. \tag{43}$$

Но в силу леммы 1 [12] или теоремы 1 [13] при условии (42) $\operatorname{sign}_1 v^{c'}_0 = \operatorname{sign}_1 u$, откуда в силу (43) и следует (28). $\square$

**Лемма 2.** *Если* $m = 1$, $y(\cdot) \in C[a, b]$,

$$y(a_1) = 0, \quad v(\cdot) = y(\cdot)w(\cdot) \in C^{n-r}[a, b] \tag{44}$$

*и выполняются условия* (5), (11), *то при* $a < a_1 < b$

$$r_1(y) \leq S(L^c_{n-r}v, (a, a_1)) + S(L^c_{n-r}v, (a_1, b)) + 1 \leq r_1(L^c_{n-r}v, (a, b)), \tag{45}$$

*а при* $a_1 = a$ $(a_1 = b)$

$$r_1(y) \leq S(L^c_{n-r}v) + 1 \leq r_1(L^c_{n-r}v, [a, b)) \ (\leq r_1(L^c_{n-r}v, (a, b])). \tag{46}$$

*Если при этом* $y = \Gamma_c u$, $u(\cdot) \in C_*[a, b]$ *и все узлы* $u(x)$ *отличны от* $c_j$, $j = \overline{1, r}$, *то при* $a < a_1 < b$

$$S(L^c_{n-r}v, (a, a_1)) + S(L^c_{n-r}v, (a_1, b)) + 1 \leq S(u), \tag{47}$$

*а при* $a_1 = a$ *или* $a_1 = b$

$$S(L^c_{n-r}v) + 1 \leq S(u). \tag{48}$$

**Доказательство.** Так как в силу (17) и обобщенной теоремы Ролля (см., напр., лемму 1 [19]) между двумя соседними нулями $L^c_{k-1}v$ лежит хотя бы один узел $L^c_k v$, $k = \overline{1, n-r}$, а в силу (44) $(L^c_k v)(a_1) = 0$, $k = \overline{0, n-r}$, то при $a < a_1 < b$

$$r_1(y) = r_1(v) \leq S(L^c_1 v, (a, a_1)) + S(L^c_1 v, (a_1, b)) + 1 \leq r_1(L^c_1 v, (a, b)),$$
$$r_1(L^c_{k-1}v, (a, b)) \leq S(L^c_k v, (a, a_1)) + S(L^c_k v, (a_1, b)) + 1 \leq r_1(L^c_k v, (a, b)), \quad k = \overline{1, n-r},$$

откуда следует (45). А при $a_1 = a$ $(a_1 = b)$

$$r_1(y) = r_1(v) \leq S(L^c_1 v) + 1 \leq r_1(L^c_1 v, [a, b)),$$
$$r_1(L^c_{k-1}v, [a, b)) \leq S(L^c_k v) + 1 \leq r_1(L^c_k v, [a, b)), \quad k = \overline{1, n-r},$$
$$\Big(r_1(y) = r_1(v) \leq S(L^c_1 v) + 1 \leq r_1(L^c_1 v, (a, b]),$$
$$r_1(L^c_{k-1}v, (a, b]) \leq S(L^c_k v) + 1 \leq r_1(L^c_k v, (a, b]), \quad k = \overline{1, n-r}\Big),$$

откуда следует (46).

При $y = \Gamma_c u$, $u(\cdot) \in C_*[a, b]$ и отличии всех узлов $u(x)$ от $c_j$, $j = \overline{1, r}$, (47) и (48) следуют из (18)–(21), (45), (46) и леммы 1. $\square$

**Замечание.** Если $y(\cdot) \in C[a,b]$, $v(\cdot) = y(\cdot)w(\cdot) \in C^{n-r}[a,b]$, $y(a_1) \neq 0$, $m = 1$, то $r_{n-r}(v) \geq n - r + r_1(y)$ и, повторяя рассуждения из доказательства леммы 8 [10], ввиду (17) получим $r_1(y) \leq S(L^c_{n-r}v)$.

**Лемма 3.** *Если все узлы $u(x)$ отличны от $c_j$, $j = \overline{1,r}$, то при условиях* (5), (11), (24) *в случае $m \geq 1$*

$$r_1(\Gamma_c u) \leq S(u) = p, \tag{49}$$

*а в случае $m = 0$ либо выполняется* (49), *либо*

$$r_1(\Gamma_c u, (a,b)) < p. \tag{50}$$

*Если при этом*

$$S(\Gamma_c u) = S(u), \tag{51}$$

*то*

$$\operatorname{sign}_1 \Gamma_c u = \operatorname{sign}_1 u. \tag{52}$$

**Доказательство.** При $m \geq 2$ для функций (19)–(21) в силу леммы 8 [10] и леммы 1

$$S(y_c) = S(\Gamma_c u) \leq r_1(\Gamma_c u) = r_1(y_c) \leq S(L^c_{n-r}v_c) = S(v^c_0) \leq r_1(v^c_0, (a,b)) \leq S(u) = p, \tag{53}$$

т. е. выполняется (49). При $m = 1$ в случае $y_c(a_1) \neq 0$ (53) и (49) остаются верны в силу замечания к лемме 2, а в случае $y_c(a_1) = 0$ в силу лемм 1, 2

$$S(y_c) = S(\Gamma_c u) \leq r_1(y_c) = r_1(\Gamma_c u) \leq \max\{r_1(L^c_{n-r}v_c, (a,b]), r_1(L^c_{n-r}v_c, [a,b))\} \leq S(u) = p, \tag{54}$$

т. е. (49) тоже выполняется.

При $m \geq 1$ и условии (51) в силу (53) или (54)

$$S(y_c) = r_1(y_c) = S(u) = p, \tag{55}$$

так что $y_c(a) \neq 0$, $y_c(b) \neq 0$, причем для $m \geq 2$ или $m = 1$, $y_c(a_1) \neq 0$

$$S(y_c) = r_1(y_c) = S(v^c_0) = r_1(v^c_0, (a,b)) = S(u) = p. \tag{56}$$

Если же $m = 1$, $y_c(a_1) = 0$, то $a < a_1 < b$ и $x = a_1$ — узловой нуль $y_c(x)$. Поэтому в силу (45), (55) и леммы 1

$$S(y_c) = r_1(y_c) = S(L^c_{n-r}v_c, (a,a_1)) + S(L^c_{n-r}v_c, (a_1,b)) + 1 = r_1(L^c_{n-r}v_c, (a,b)) = S(u) = p. \tag{57}$$

Кроме того, в силу (20) $r_{n-r}(v_c, a_1) = n - r$, $v^c_0(a_1) = 0$. Если $x = a_1$ — пучность $v^c_0(x)$, то в силу (21), (35), (37), (41), (57) при достаточно малом $\delta$ хотя бы для одной из функций $v^c_{0,\pm\delta}(x)$

$$S(v^c_{0,\pm\delta}) \geq p + 1 > S(u) = S(u_{\pm\delta}), \tag{58}$$

где все узлы $u_{\pm\delta}(x)$ отличны от $c_j$, $j = \overline{1,r}$. (58) противоречит лемме 1. Значит, $x = a_1$ может быть только узлом $v^c_0(x)$. Но тогда в силу (57) снова выполняется (56).

При $m \geq 1$ дальнейшее доказательство дословно повторяет доказательство леммы 6 [13] и леммы 9 [10].

Наконец, при $m = 0$, т. е. $r = n$, имеем $w(x) \equiv 1$, $L^c_{n-r} = I$, $v_c(x) \equiv y_c(x) \equiv v^c_0(x) \equiv (\Gamma_c u)(x)$ и (49) ((50)) следует из (25) ((26)), а (51) равносильно (27), так что (52) следует из (28). $\square$

**Лемма 4.** *При условиях* (5), (11) *для функций* (19)–(21)

$$S(y_c) \le S(u), \quad S(v_0^c) \le S(u), \tag{59}$$

*в случае же* $m = 1$, $y_c(a_1) = 0$ *при* $a < a_1 < b$

$$S(v_0^c, (a, a_1)) + S(v_0^c, (a_1, b)) + 1 \le S(u), \tag{60}$$

*а при* $a_1 = a$ *или* $a_1 = b$

$$S(v_0^c) + 1 \le S(u) \tag{61}$$

$\forall u \in C[a, b]$ *и* $u \in \delta[a, b]$.

**Доказательство.** В силу (10), (18)–(21), (33)

$$v_0^c(\cdot) = (L_{n-r}^c v_c)(\cdot) = L_{n-r}^c \left( w(\cdot) \int_a^b \Gamma_c(\cdot, s) u(s) ds \right) =$$

$$= \int_a^b L_{n-r}^c \mathcal{G}_c(\cdot, s) \sigma_c(s) u(s) ds = \int_a^b \mathcal{G}_{rc}(\cdot, s) \sigma_c(s) u(s) ds. \tag{62}$$

Ввиду (18), (19), (62) и непрерывности и ограниченности $\Gamma_c(x, s)$ и $\mathcal{G}_{rc}(x, s)$ в $Q$ любая функция $u(\cdot) \in C[a, b]$ или $u(\cdot) \in \delta[a, b]$ может быть аппроксимирована такими функциями $u_n(\cdot) \in C_*[a, b]$ с отличными от $c_j$, $j = \overline{1, r}$, узлами, что

$$S(u_n) = S(u) \ \ \forall n \in N, \tag{63}$$

и соответствующие функции $y_{cn}(x)$ $(v_{0n}^c(x))$ сходятся к $y_c(x)$ $(v_0^c(x))$ равномерно, так что $\exists n_0 :$ $S(y_{cn}) \ge S(y_c)$, $S(v_{0n}^c) \ge S(v_0^c)$ $\forall n > n_0$. Отсюда в силу (63), лемм 1–3 и неравенства $S(y, (\alpha, \beta)) \le r_1(y, (\alpha, \beta))$ $\forall y \in C[\alpha, \beta]$ и следуют (59)–(61). □

**Лемма 5.** *При условиях* (5), (11)

$$r_1(\Gamma_c u) \le S(u) \ \ \forall u \in C[a, b] \ \ и \ \ \forall u \in \delta[a, b].$$

**Доказательство.** Если $m \ge 2$, то в силу (18)–(21), леммы 8 [10] и леммы 4

$$r_1(\Gamma_c u) = r_1(y_c) \le S(L_{n-r}^c v_c) = S(v_0^c) \le S(u). \tag{64}$$

При $m = 1$, $y_c(a_1) \ne 0$ (64) сохраняется в силу замечания к лемме 2.

Если $m = 1$, $y_c(a_1) = 0$, то в силу (21) и лемм 2, 4 при $a < a_1 < b$

$$r_1(\Gamma_c u) = r_1(y_c) \le S(L_{n-r}^c v_c, (a, a_1)) + S(L_{n-r}^c v_c, (a_1, b)) + 1 \le S(u),$$

а при $a_1 = a$ или $a_1 = b$ $r_1(\Gamma_c u) = r_1(y_c) \le S(L_{n-r}^c v_c) + 1 \le S(u)$ $\forall u \in C[a, b]$ и $\forall u \in \delta[a, b]$. □

**4.** Пусть

$$\Gamma_c \begin{pmatrix} x_1 \cdots x_k \\ s_1 \cdots s_k \end{pmatrix} = \det(\Gamma_c(x_i, s_j))_{i,j=1}^k. \tag{65}$$

Ввиду справедливости леммы 5 далее можно дословно повторить рассуждения работ [13], [14] и таким образом доказать следующие утверждения.

**Лемма 6.** *При условиях* (5), (11) *для функции* (10)

$$\Gamma_c \begin{pmatrix} s_1 \cdots s_k \\ s_1 \cdots s_k \end{pmatrix} \ne 0 \ \ \forall s_i, \ \ i = \overline{1, k}, \ \ a < s_1 < \cdots < s_k < b, \ \ k = 1, 2, \ldots$$

**Лемма 7.** *При условиях* (5), (11) *функция* (10) *есть знакорегулярное ядро, т. е. знак каждого ненулевого из определителей* (65) *зависит только от* $k$ $\forall x_i$, $s_i$, $i = \overline{1, k}$, $a \le x_1 < \cdots < x_k \le b$, $a < s_1 < \cdots < s_k < b$ $\forall k$, $k = 1, 2, \ldots$

**Лемма 8.** *При условиях* (5), (11) *для функции* (10) *все определители* (65) *неотрицательны* $\forall x_i,\ s_i,\ i=\overline{1,k},\ a\le x_1<\dots<x_k\le b,\ a<s_1<\dots<s_k<b\ \forall k,\ k=1,2,\dots$

Леммы 6, 8 в соединении с (12) означают, что при условиях (5), (11) $\Gamma_c(x,s)$ есть ядро Келлога на $[\Omega]$ [20], где $[\Omega]$ — "покомпонентное замыкание" [20] множества $\Omega=\bigcup\limits_{j=0}^{r}(c_j,c_{j+1})$. Можно показать также, что $\Gamma_c(x,s)$ — осцилляционное ядро по терминологии [21].

**Теорема.** *Пусть* $q(x)$ *суммируема на* $[a,b]$, *а* $\widetilde{q}(x)=q(x)\sigma_c(x)w(x)>0$ *почти всюду в* $[a,b]$. *При* $m\ge 1$ *и условиях* (5), (11) *спектр задачи* (1)–(3) *осцилляционный, причем для собственной функции* $y_i(x)$ *этой задачи, соответствующей собственному значению* $\lambda_i$, *все нули функции* $\psi_i(x)=y_i(x)/w(x)$ *в* $[a,b]$ *лежат в* $(a,b)$ $\forall i,\ i=0,1,\dots$ ; *любая нетривиальная линейная комбинация* $\psi_{pk}(x)=\sum\limits_{i=p}^{k}\alpha_i\psi_i(x)$ *имеет в* $[a,b]$ *не менее* $p$ *узлов и не более* $k$ *нулей, считая пучность за два нуля, а при* $m\ge 2$ *все нули* $\psi_i(x)$ *простые* $\forall i,\ i=0,1,\dots$, *и* $r_l(\psi_{pk})\le k$, *где* $l=\min\limits_{i=\overline{1,m}}(n-r-k_i)$.

**5.** В случае, когда вместо (5) для некоторой перестановки $(j_1,j_2,\dots,j_r)$ множества $\{1,2,\dots,r\}$, удовлетворяющей условиям (8), выполняются неравенства (9), положим $\sigma_c(s)=(-1)^{r-j}\ \forall s\in(c_j,c_{j+1})$, если в перестановке $(j_1,j_2,\dots,j_r)$ $j$ предшествует $j+1$, и $\sigma_c(s)=(-1)^{r-j-1}\ \forall s\in(c_j,c_{j+1})$ в противном случае. При таком определении $\sigma_c(s)$ и условиях (9), (11) в силу теоремы [16] для функции (10) сохраняются неравенства (12). Этот факт наводит на предположение, что при замене (5) неравенствами (8), (9) предыдущие результаты данной работы сохраняются. При некоторых специальных расположениях точек $c_j,\ j=\overline{1,r}$, например, при

$$c_j=a,\quad j=\overline{1,q},\quad c_i=b,\quad i=\overline{q+1,r},\quad 0<q<r, \tag{66}$$

может быть, это и так. По крайней мере, при $r\le 5$ в случае (66) это предположение оправдывается. Однако при произвольном расположении точек $c_j\in[a,b],\ j=\overline{1,r}$, и условии (9) вместо (5) с $(j_1,j_2,\dots,j_r)\ne(1,2,\dots,r)$ леммы 4, 5, 7, вообще говоря, неверны, о чем свидетельствует следующий пример.

Для краевой задачи

$$y'''-y''=f(x),\quad y''(0)=0,\quad y''(1)-y'(1)=0,\quad y(2)=0 \tag{67}$$

оператор $L=\frac{d^3}{dx^3}-\frac{d^2}{dx^2}$ допускает разложения $L=\Big(\frac{d}{dx}-I\Big)L^{1c}_{n-1}=\frac{d}{dx}L^{2c}_{n-1}$, $L^{1c}_{n-1}=\frac{d}{dx}L^{c}_{n-r}$, $L^{2c}_{n-1}=\Big(\frac{d}{dx}-I\Big)L^{c}_{n-r}$, $L^{c}_{n-r}=L^{c}_{1}=\frac{d}{dx}$, где $n=3,\ r=2,\ c_1=0,\ c_2=1$, так что $\alpha^c_1(x)\equiv 1$, $\alpha^c_2(x)\equiv 0$, $\alpha^c_{12}(x)\equiv 0$, $\alpha^c_{21}(x)\equiv 1$. При этом $w(x)=x-2$, $l_{1c_1}y=y''(c_1)=(L^{1c}_{n-1})(c_1)$, $l_{2c_2}y=y''(c_2)-y'(c_2)=(L^{2c}_{n-1}y)(c_2)$, $L^{1c}_{n-1}$ и $\alpha^c_1(x)$ не зависят от $c_2$ и от $l_{2c_2}$, $L^{2c}_{n-1}$ и $\alpha^c_2(x)$ не зависят от $c_1$ и от $l_{1c_1}$, $L^{c}_{n-r}=\frac{d}{dx}$ не зависит от порядка индексов 1, 2 и $L^c_{n-r}=L^c_1\in T^1_1(a,b)\ \forall a,b$, $a<b$, а $\alpha^c_{12}(x)-\alpha^c_{21}(x)\equiv -1\ne 0\ \forall x$, так что в силу теоремы 1 [18] $L\in\widetilde{T}^0_3(\mathcal{B};0,2;c_1,c_1)\ \forall c_1,c_2$, $0\le c_1\le c_2\le 1$, т. е. $L\in T^0_{31}(\mathcal{B};0,2;0,1)$, где $\mathcal{B}=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&-1\end{smallmatrix}\right)$. Кроме того, $\mathcal{B}\left(\begin{smallmatrix}2&1\\1&2\end{smallmatrix}\right)=\left|\begin{smallmatrix}1&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right|=1>0$, значит, условия (8), (9), (11) выполняются, причем можно положить $\sigma_c(s)\equiv 1$ в $[0,2]$.

Однако для $u(x)=180x^2-564x+204$ функция $v_c(x)=y_c(x)w(x)$, где $y_c(x)=(\Gamma_c u)(x)=\int\limits_0^2\Gamma_c(x,s)u(s)ds$, есть решение задачи (67) при $f(x)\equiv\sigma(x)u(x)$, т. е. $v_c(x)=-15x^4+34x^3-18x+4$, так что $y_c(x)=-15x^3+4x^2+8x-2$, а $v^c_0(x)=L^c_{n-r}v_c=\frac{d}{dx}v_c=-60x^3+102x^2-18$. Таким образом, $u(x)$ имеет в $[0,2]$ единственный, причем простой, нуль $x\approx 0.417$, тогда как $v^c_0(x)$ имеет в $[0,2]$ простые нули $x_1=0.5$, $x_2=0.6+\sqrt{0.96}$, а $y_c(0)<0$, $y_c(0.5)>0$, $y_c(1)<0$, так что $r_1(\Gamma_c u)\ge S(\Gamma_c u)=S(y_c)\ge 2>S(u)=1$ и $S(v^c_0)=2>S(u)=1$. Так как теорема 2 [3] может быть доказана для кусочно-непрерывных ядер типа (10), то последние неравенства означают, что ядро $\Gamma_c(x,s)$ для задачи (67) не является знакорегулярным. Итак, для задачи (67) заключения лемм 4, 5, 7 не имеют места.

## Литература


1. Покорный Ю.В., Лазарев К.П. *Некоторые осцилляционные теоремы для многоточечных задач* // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23. – № 4. – С. 658–670.
2. Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. *Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем.* – 2-е изд. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 359 с.
3. Левин А.Ю., Степанов Г.Д. *Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака.* I // Сиб. матем. журн. – 1976. – Т. 17. – № 3. – С. 606–626.
4. Левин А.Ю., Степанов Г.Д. *Одномерные краевые задачи с операторами, не понижающими числа перемен знака.* II // Сиб. матем. журн. – 1976. – Т. 17. – № 4. – С. 813–830.
5. Покорный Ю.В. *О функции Грина многоточечной краевой задачи* // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14. – № 4. – С. 760–761.
6. Дерр В.Я. *О спектре некоторых многоточечных задач.* – Удм. гос. ун-т, Устинов. мех. ин-т. – Устинов, 1987. – 46 с. – Деп. в ВИНИТИ 23.01.87, № 533-В87.
7. Покорный Ю.В., Шурупова И.Ю. *Об осцилляционных свойствах спектра краевой задачи с функцией Грина, меняющей знак* // Укр. матем. журн. – 1989. – Т. 41. – № 11. – С. 1521–1526.
8. Степанов Г.Д. *Многоточечные краевые задачи с функциями Грина, приводимыми к знакорегулярному виду.* – Ярослав. ун-т. – Ярославль, 1988. – 25 с. – Деп. в ВИНИТИ 20.04.88, № 3044-В88.
9. Тептин А.Л. *Об осцилляционных свойствах спектра одной краевой задачи* // Функц.-дифференц. уравнения. – Пермь, 1987. – С. 112–124.
10. Тептин А.Л. *Об осцилляционности ядра, связанного с функцией Грина одной многоточечной задачи.* – Ред. журн. “Дифференц. уравнения”. – Минск, 1989. – 30 с. – Деп. в ВИНИТИ 11.08.89, № 5417-В89.
11. Дерр В.Я. *О спектре задачи с комбинированными краевыми условиями* // Функц.-дифференц. уравнения. – Пермь, 1987. – С. 105–112.
12. Тептин А.Л. *Об осцилляционности (с точностью до множителя) функции Грина одной многоточечной задачи* // Функц.-дифференц. уравнения. – Пермь, 1992. – С. 159–172.
13. Тептин А.Л. *Об осцилляционности спектра краевой задачи с функцией Грина, меняющей знак по обоим аргументам.* – Ижевск. механ. ин-т. – Ижевск, 1993. – 49 с. – Деп. в ВИНИТИ 12.03.93, № 596-В93.
14. Тептин А.Л. *Об осцилляционности спектра одной многоточечной краевой задачи* // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31. – № 8. – С. 1370–1380.
15. Тептин А.Л. *О многоточечной краевой задаче, функция Грина которой меняет знак в “шахматном” порядке* // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т.20. – № 11. – С. 1910–1914.
16. Тептин А.Л. *Новый признак знакопостоянства функции Грина* // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 6. – С. 1066–1069.
17. Левин А.Ю. *Неосцилляция решений уравнения* $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_n(t)x = 0$ // УМН. – 1969. – Т. 24. – Вып. 2. – С. 43–96.
18. Тептин А.Л. *О неосцилляции решений и знаке функции Грина* // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20. – № 6. – С. 995–1005.
19. Чичкин Е.С. *Теорема о дифференциальном неравенстве для многоточечных краевых задач* // Изв. вузов. Математика. – 1962. – № 2. – С. 170–179.
20. Покорный Ю.В., Боровских А.В. *О теореме Келлога для разрывных функций Грина* // Матем. заметки. – 1993. – Т. 53. – № 1. – С. 151–153.
21. Боровских А.В. *О спектре интегральных операторов с разрывными ядрами.* – Воронеж. ун-т. – Воронеж, 1989. – 27 с. – Деп. в ВИНИТИ 15.03.89, № 1684-В89.



*Ижевский государственный технический университет*



*Поступила* 11.07.1996