

Посвящается Анатолию Дмитриевичу Ляшко

УДК 519.6

В.Г. КОРНЕЕВ, Я. ФИШ

ДВУХУРОВНЕВЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ, ОСНОВАННЫЕ НА АГРЕГАЦИИ

1. Введение

Во многих случаях многосеточные и многоуровневые методы обладают оптимальной скоростью сходимости, и объем вычислительной работы, необходимый для получения любой заданной точности, пропорционален количеству неизвестных. Принципиальная идея многоуровневых методов, оставшаяся в существенном неизменной со времени пионерских работ Федоренко [1], [2] и Бахвалова [3] заключается в том, чтобы найти высокочастотные реакции системы посредством сглаживающих итераций на мелкой сетке, в то время как низкочастотные реакции находятся на вспомогательной грубой сетке. Несмотря на то, что многоуровневые методы и многоуровневые предобусловливатели в методе сопряженных градиентов (МСГ) и в других итерационных методах, а также различные аспекты, влияющие на их эффективность, довольно хорошо исследованы, они используются в вычислительной инженерной практике не так широко, как можно было бы ожидать. Причина этого хорошо известна: для эффективного применения классических многосеточных методов необходимо использовать такие пакеты программ, которые способны были бы произвести последовательность вспомогательных дискретизаций, постепенно переходящих от исходной к наиболее грубой дискретизации. Более того, гладкие на исходной дискретизации компоненты решения должны быть хорошо аппроксимированы на более грубых дискретизациях. Для многих современных конструкций высоких технологий это может быть проблемой, поскольку часто в современной вычислительной практике каждый конструктивный блок удается представить всего лишь одним или несколькими конечными элементами.

Эти трудности послужили стимулом к развитию много- и двухуровневых методов, основанных на более приспособленных к инженерным приложениям процедурах укрупнения сетки, и, в частности, *методов агрегации* [4]–[16]. В то время как классический, называемый также геометрическим, многосеточный подход создает последовательность дискретизаций посредством построения вспомогательных триангуляций, при агрегации производится попытка достичь той же цели на основе информации о матрице исходной системы алгебраических уравнений. Во многих случаях методы, основанные на втором подходе, оказались значительно более эффективными, чем использовавшиеся ранее прямые методы решения, например, [15], [16]. Возможность организации агрегатов в рамках многоуровневого подхода и сама по себе весьма полезна, поскольку в приложениях часто встречаются малые подобласти с характеристиками жесткости, значительно отличающимися от характеристик остальной структуры, и эти подобласти могут быть естественными единицами для задания агрегатов.

В простейшей форме, которая называется здесь *простой агрегацией*, все узлы мелкой сетки подразделяются на отдельные связные подмножества — *агрегаты* — и таким образом агрегаты разделены единственным слоем элементов. На каждом агрегате допускается только постоянное поле, или в более общем случае — поля с нулевой энергией, как, например, в [9], [10] и др. Хотя метод простой агрегации часто используется на практике, ему присущи два очевидных взаимосвязанных недостатка: а) он не обеспечивает адекватного снижения максимального собственного значения и б) он не позволяет адекватно аппроксимировать самые низкие частоты на

более грубых уровнях. Вследствие этого можно получить только свойство слабой аппроксимации и слабые оценки сходимости, см. раздел 4.

Одним из известных способов устранения этих недостатков является сглаживание координатных функций, полученных с помощью простой агрегации. Например, в методе сглаженной агрегации, предложенном в [11], это достигается с помощью дополнительной итерационной процедуры, которая называется *сглаживанием оператора продолжения*, [11]–[14]. Опыт применения этой процедуры показывает, что она может существенно повысить эффективность. Однако, насколько известно авторам, для таких двухуровневых методов оценки скорости сходимости, сравнимые с геометрическими методами (см., напр., [17]–[20]), были получены только в специальной норме, зависящей от отношения H/h и вырождающейся с ростом этого отношения [12].

В этой статье развивается подход обобщенной агрегации, предложенный в работах Фиша и др. [15], [16], в которых на каждом агрегате вводятся дополнительные координатные функции для обеспечения более точной аппроксимации энергии. Кроме того, мы позаботились о том, чтобы в интерфейсных областях между агрегатами градиенты не были слишком большими. Для этого расстояние между агрегатами считается сравнимым с размерами агрегатов, и значения функций на грубом уровне в узлах интерфейсного множества определяются путем интерполяции. Эти модификации позволяют добиться выполнения свойства сильной аппроксимации и убыстряют сходимость, причем оценки скорости сходимости, как и в классическом многосеточном методе, улучшаются с ростом числа сглаживаний. Существенно, что они позволяют оптимизировать вычислительную работу посредством правильного выбора параметра H сетки грубого уровня.

Как известно, двухуровневые итерации могут быть использованы в МСГ и других итерационных методах для преобусловливания. Мы рассматриваем такой вариант обобщенной агрегации для задач в областях, в которых не обеспечена H^2 -регулярность, и доказываем его эффективность. Для такого класса задач показано, что стоимость метода остается такой же, как стоимость нашего основного алгоритма или геометрических алгоритмов для H^2 -регулярных задач. В трехмерном случае общая вычислительная работа оценивается как $\mathcal{O}(n^{4k/(3k+1)})$, где n — число неизвестных, при общем предположении, что стоимость решения системы грубого уровня равна $\mathcal{O}(H^{-3k})$, $1 \leq k \leq 3$.

Многоуровневые процедуры агрегации разрабатывались в качестве альтернативы геометрическим многосеточным методам в попытке сократить использование геометрических данных. Однако если функции с нулевой энергией содержат непостоянные поля, как, например, в теории упругости, теории оболочек и эллиптических уравнениях высоких порядков без младших членов, то интерполяция становится неизбежной, и в вычисления вовлекаются геометрические координаты узлов. Геометрическая информация привлекается также и для других целей, как, например, в [12]. Если не преследовать цель создания метода черного ящика, основанного только на алгебраической информации, то баланс между алгебраическими и геометрическими данными подчиняется соображениям стоимости. В наших алгоритмах мы сохраняем главное положительное качество агрегации, т.е. возможность создания грубой аппроксимации посредством агрегации. Оно, в частности, позволяет избежать использования дополнительных более грубых триангуляций, достаточно хорошо приближающих границу. Но по сравнению с традиционной методикой агрегации геометрическая информация используется дополнительно для интерполяции в интерфейсных узлах. В двухуровневых методах, где размеры агрегатов могут быть значительными, интерполяция может быть менее трудоемкой, чем другие методы сглаживания, и обеспечивает наилучшие оценки сходимости. Наш способ организации интерполяции близок к тому, который использовался в [21] для получения хорошо обусловленных методов на регулярных сетках для задач Неймана в произвольных достаточно гладких областях. Он весьма гибок и предполагает различные способы реализации.

Статья построена следующим образом. В разделе 2 описываются задачи тонкого и грубого уровня и двухуровневые алгоритмы — основные и модифицированные. Особенности агрегации и условий, используемых в дальнейшем при исследовании сходимости, обсуждаются в разделе 3. В частности показано, что необходимая агрегация для произвольной квазиоднородной

триангуляции всегда существует и может быть получена, например, с помощью вспомогательной ортогональной сетки, в том числе и в случае произвольной достаточно гладкой области. Для случая простой агрегации в разделе 4 выводятся оценки сходимости при очень слабых условиях, предъявляемых к агрегации. Эти оценки верны также для случая геометрически неоднородных сеток. В разделе 5 анализируется обобщенная агрегация и устанавливается, что скорость сходимости улучшается — сначала для H^2 -регулярных задач, а затем для задач, не являющихся H^2 -регулярными. Кроме того, даются оценки вычислительной работы для оптимизированного параметра укрупнения. В разделе 6 обсуждаются численные результаты, подтверждающие основные выводы.

2. Задачи тонкого и грубого уровня и двухуровневые алгоритмы

Для простоты ограничимся рассмотрением уравнения Пуассона с граничными условиями Дирихле

$$-\Delta u = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \subset E_3, \quad (2.1)$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.2)$$

в трехмерной области Ω , хотя полученные результаты верны и для линейных задач упругости. Используем произвольную квазиоднородную триангуляцию \mathbb{S}_h области Ω тетраэдрами τ_r , $r = 1, 2, \dots, R$, удовлетворяющими при достаточно малых $h > 0$ неравенствам

$$0 < a^{(1)} h \leq \rho_{C,r} \leq h, \quad 0 < \gamma \leq \rho_{I,r}/\rho_{C,r}, \quad (2.3)$$

где $\rho_{I,r}$ и $\rho_{C,r}$ — радиусы наибольшей вписанной в тетраэдр τ_r и наименьшей описанной вокруг него сфер, а $a^{(1)}$ и γ — некоторые постоянные. Область триангуляции обозначена через Ω_h . Мы говорим, что \mathbb{S}_h является триангуляцией области Ω , если $\text{dist}(\mathbf{y}, \partial\Omega) \leq c_\Gamma h^2$ для всех $\mathbf{y} \in \partial\Omega_h$ с некоторой постоянной c_Γ , и для простоты предполагаем, что $\Omega_h \subset \Omega$. Как известно, для достаточно гладкой области Ω , имеющей, например, кусочно дважды дифференцируемую границу, такая квазиоднородная триангуляция с $\Omega_h \subset \Omega$ всегда существует (см., напр., [21], [22]). Символы $\mathbf{x}^{(i)}$, \bar{X} , \bar{w} используются для узла триангуляции, множества всех узлов и их индексов i соответственно. Триангуляция \mathbb{S}_h индуцирует пространство $\mathcal{H}(\Omega_h)$ функций, непрерывных на $\bar{\Omega}_h$ и линейных на каждом тетраэдре τ_r , и подпространство $\mathcal{H}^\circ(\Omega_h) = \{\tilde{v} \in \mathcal{H}(\Omega_h) : \tilde{v}|_{\partial\Omega} = 0\}$. Для каждой $\tilde{v} \in \mathcal{H}(\Omega_h)$ существует единственный вектор $\mathbf{v} = \{v^{(i)}\}$ узловых значений \tilde{v} таких, что

$$v^{(i)} = \tilde{v}(\mathbf{x}^{(i)}) \quad \text{для всех } i \in \bar{w}.$$

В пространстве этих векторов, обозначаемом через U , вводится скалярное произведение

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = h^3 \sum v^{(i)} w^{(i)}. \quad (2.4)$$

Матрица \mathbf{K} и вектор \mathbf{f} системы алгебраических уравнений метода конечных элементов

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.5)$$

удовлетворяют тождествам

$$(\mathbf{K}\mathbf{v}, \mathbf{w}) = a_{\Omega_h}(\tilde{v}, \tilde{w}), \quad (\mathbf{v}, \mathbf{f}) = (\tilde{v}, f)_{\Omega_h} \quad (2.6)$$

для любых $\tilde{v}, \tilde{w} \in \mathcal{H}^\circ(\Omega_h)$, а $(\cdot, \cdot)_{\Omega_h}$ и $a_{\Omega_h}(\cdot, \cdot)$ являются скалярным произведением в $L_2(\Omega_h)$ и интегралом Дирихле

$$(v, w)_\Omega := \int_\Omega vw \, d\mathbf{x}, \quad a_\Omega(v, w) := \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla w \, d\mathbf{x}.$$

Чтобы различать величины, относящиеся к различным уровням, они снабжаются дополнительным индексом $\ell = 1, 2, \dots$, где $\ell = 1$ относится к исходной задаче. Например, обозначения \mathbf{K}_ℓ , \mathbf{f}_ℓ , $\mathcal{H}_\ell(\Omega_h)$, $(\cdot, \cdot)_\ell$, \bar{w}_ℓ , h_ℓ используются для объектов ℓ -го уровня. Однако индекс $\ell = 1$, как в

(2.4)–(2.6), часто опускается. Оператор продолжения $\mathbf{P} : U_2 \rightarrow U$, необходимый для получения системы второго уровня

$$\mathbf{K}_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{f}_2, \quad \text{где} \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{R} \mathbf{K} \mathbf{P}, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{R} \mathbf{f}, \quad \mathbf{R} := \mathbf{P}^T,$$

определяется с помощью алгоритмов агрегации, описанных в разделе 3.

Предположим, что дана некоторая аппроксимация решения \mathbf{u} , для которой используем то же обозначение. Ниже представлена одна двухуровневая итерация $\mathbf{T}gi$ с m_1 предварительными и m_2 завершающими сглаживаниями:

```

procedure  $\mathbf{T}gi(\mathbf{K}_\ell, \mathbf{f}, \mathbf{u})$ ;
array  $\mathbf{K}_\ell, \mathbf{f}, \mathbf{u}$ ;
begin integer  $m_1, m_2$ ;
  array  $\mathbf{K}_{\ell+1}, \mathbf{B}_\ell, \mathbf{P}_\ell, \mathbf{d}, \mathbf{v}$ ;
  do  $m_1$  times
     $\mathbf{u} := \mathbf{u} - \mathbf{B}_\ell^{-1}(\mathbf{K}_\ell \mathbf{u} - \mathbf{f})$ ;
   $\mathbf{d} := \mathbf{P}_\ell^T(\mathbf{K}_\ell \mathbf{u} - \mathbf{f})$ ;  $\mathbf{K}_{\ell+1} := \mathbf{P}_\ell^T \mathbf{K}_\ell \mathbf{P}$ ;
   $\mathbf{v} := \mathbf{K}_{\ell+1}^{-1} \mathbf{d}$ ;
   $\mathbf{u} := \mathbf{u} - \mathbf{P}_\ell \mathbf{v}$ ;
  do  $m_2$  times
     $\mathbf{u} := \mathbf{u} - \mathbf{B}_\ell^{-1}(\mathbf{K}_\ell \mathbf{u} - \mathbf{f})$ ;
end.

```

Пусть $\mathbf{e}^{(s)} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^{(s)}$ — погрешность, где \mathbf{u} — точное решение (2.5), а $\mathbf{u}^{(s)}$ — приближенное решение, полученное при применении процедуры $\mathbf{T}gi$ s раз, и пусть $\mathbf{T}g(m_1, m_2) = \mathbf{T}gi(\mathbf{K}_1, m_1, m_2)$ — матрица двухуровневой итерации. Эта матрица связывает погрешности $\mathbf{e}^{(s+1)}$, $\mathbf{e}^{(s)}$:

$$\mathbf{e}^{(s+1)} = \mathbf{T}g(m_1, m_2) \mathbf{e}^{(s)},$$

и задается формулой

$$\mathbf{T}g(m_1, m_2) = \mathbf{S}_1^{m_1} (\mathbf{I} - \mathbf{P} \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{P}^T \mathbf{K}) \mathbf{S}_1^{m_2}, \quad (2.7)$$

где $\mathbf{S} = \mathbf{I} - \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{K}$.

Матрицу \mathbf{B}_1 в сглаживающих итерациях проще всего задать как $\mathbf{B}_1 = c_\beta h^{-2} \mathbf{I}$ с такой постоянной c_β , что $\mathbf{K} \leq \mathbf{B}$. Для сглаживания можно использовать ряд других итерационных процедур [17], [19]–[21] и, в частности, метод Ричардсона

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^k &= \mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{B}_{1,k}^{-1} (\mathbf{K} \mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{f}), \quad \mathbf{B}_{1,k} = c_\beta \sigma_k^{-1} h^{-2} \mathbf{I}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \\ \sigma_k &= \left(1 + \cos \frac{\pi}{2m+2} \right) \left(\cos \frac{\pi}{2m+2} - \cos \frac{(2k+1)\pi}{2m+2} \right)^{-1}, \quad m = m_1, m_2, \end{aligned} \quad (2.8)$$

ускоряющий сходимость (см. теоремы 5.1, 5.2). В последнем случае в (2.7) матрицы \mathbf{S}_1^m заменяются на

$$\mathbf{S}_1^{(m)} = \bigcap_{k=1}^m (\mathbf{I} - \mathbf{B}_{1,k}^{-1} \mathbf{K}).$$

Двухуровневые итерации могут быть использованы как вторичные для предусловливания в МСГ или другом итерационном методе. Такая версия дает возможность значительно ослабить требования к областям, связанные с эллиптической регулярностью. Для упрощения обсуждения ниже рассматривается метод простой итерации.

Обозначим через $\mathbb{S}_{h,P}$ и $\Omega_{h,P}$ некоторую триангуляцию, топологически эквивалентную \mathbb{S}_h , и ее область, а через \mathbf{K}_P — матрицу конечных элементов, спектрально эквивалентную \mathbf{K} и порожденную триангуляцией $\mathbb{S}_{h,P}$. Другими словами, матрица \mathbf{K}_P определяется таким же образом, как \mathbf{K} , но для задачи (2.1), (2.2) в области $\Omega_{h,P}$ триангуляции $\mathbb{S}_{h,P}$. Предположим, что проведено t_0 двухуровневых итераций для решения системы $\mathbf{K}_P \mathbf{w} = \tilde{\mathbf{f}}$ и $\mathbf{w}^{(t_0)}$ — полученное решение.

Вводя обозначение $\widetilde{\mathbf{K}}_{h,P}$ для матрицы, связывающей векторы $\mathbf{w}^{(t_0)}$ и $\widetilde{\mathbf{f}}$, и обозначение $\widetilde{\mathbf{S}}_1^{(m)}$ для матрицы m сглаживаний, получим

$$\begin{aligned}\mathbf{w}^{(t_0)} &= \widetilde{\mathbf{K}}_P^{-1} \widetilde{\mathbf{f}}, \quad \widetilde{\mathbf{K}}_P^{-1} = [\mathbf{I} - (\mathbf{T}g(\mathbf{K}_P, m_1, m_2))^{t_0}] \mathbf{K}_P^{-1}, \\ \mathbf{T}g(\mathbf{K}_P, m_1, m_2) &= \widetilde{\mathbf{S}}_1^{(m_1)} [\mathbf{I} - \mathbf{P}^T (\mathbf{P} \mathbf{K}_P \mathbf{P}^T)^{-1} \mathbf{P} \mathbf{K}_P] \widetilde{\mathbf{S}}_1^{(m_2)},\end{aligned}\tag{2.9}$$

где $\widetilde{\mathbf{S}}_1^{(m)} = \mathbf{S}_1^m$ или $\widetilde{\mathbf{S}}_1^{(m)} = \mathbf{S}_1^{(m)}$, а для матриц сглаживания и продолжения в двухуровневой процедуре решения системы $\mathbf{K}_P \mathbf{w} = \widetilde{\mathbf{f}}$ сохраняются обозначения \mathbf{S}_1 , $\mathbf{S}_1^{(m)}$ и \mathbf{P} .

Число t_0 выбирается из условия, что \mathbf{K}_P и $\widetilde{\mathbf{K}}_P$ эквивалентны по спектру, например,

$$(1 - \tilde{\varepsilon}) \widetilde{\mathbf{K}}_P \leq \mathbf{K}_P \leq (1 + \tilde{\varepsilon}) \widetilde{\mathbf{K}}_P, \quad \tilde{\varepsilon} \in (0, 1).\tag{2.10}$$

Это равнозначно тому, что должна быть гарантирована точность $\tilde{\varepsilon}$ в норме матрицы \mathbf{K}_P . Таким образом, t_0 легко выбрать на основе оценок для двухуровневых итерационных матриц, которые будут получены в разделах 4, 5.

Теперь итерационную процедуру для решения системы (2.5) можно записать в виде

$$\mathbf{u}^k = \mathbf{u}^{k-1} - \tau_0 \widetilde{\mathbf{K}}_P^{-1} (\mathbf{K} \mathbf{u}^{k-1} - \mathbf{f})\tag{2.11}$$

и согласно (2.10) можно взять $\tau_0 = 1$ в качестве оптимального постоянного параметра итерации.

Оценки вычислительной работы для (2.11) могут быть значительно лучше, чем при прямом применении двухуровневого метода для решения (2.5), поскольку из оценок норм $\mathbf{T}g(\mathbf{K}, m_1, m_2)$ и $\mathbf{T}g(\mathbf{K}_P, m_1, m_2)$ последняя может быть лучшей. Действительно, область Ω_h и область Ω , которую она триангулирует, могут не обеспечивать H^2 -регулярности задачи (2.1), (2.2). В то же время для многих таких пар \mathbb{S}_h, Ω_h легко создать топологически эквивалентную триангуляцию $\mathbb{S}_{h,P}$, удовлетворяющую условиям

- матрицы \mathbf{K} и \mathbf{K}_P эквивалентны по спектру,
- в области $\Omega_{h,P}$, триангуляцией которой является $\mathbb{S}_{h,P}$, задача Дирихле H^2 -регулярна.

Другими словами, для $\mathbf{T}g(\mathbf{K}_P, m_1, m_2)$ может быть достигнуто свойство сильной аппроксимации, в то время как для $\mathbf{T}g(\mathbf{K}, m_1, m_2)$ — нет. В двумерном случае хорошим примером области Ω является круг с вырезанным сектором или радиальным разрезом с началом в центре. В качестве вспомогательной области $\Omega_{(P)}$ можно взять половину круга. Хотя области Ω и Ω_P значительно различаются, при надлежащем отображении $\Omega \rightarrow \Omega_{(P)}$ матрицы \mathbf{K} и \mathbf{K}_P будут весьма близкими по спектру, и итерационный процесс (2.9) будет весьма эффективным.

3. Пространства грубого уровня

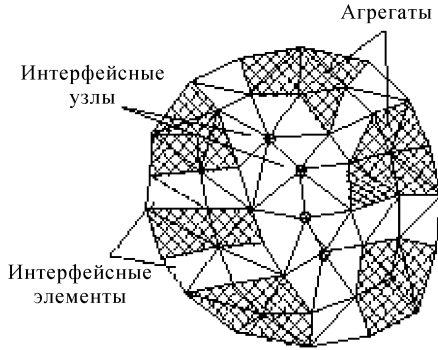


Рис. 1

В методе простой агрегации пространство грубого уровня однозначно определяется совокупностью агрегатов. Обобщенная агрегация, которая здесь рассматривается, имеет две дополнительные особенности. Во-первых, каждый агрегат обогащен дополнительными координатными функциями. Во-вторых, между соседними агрегатами предполагаются более широкие интерфейсные области, причем значения функций грубой сетки в узлах интерфейсной поверхности определяются посредством интерполяции или методом наименьших квадратов. Первое улучшает аппроксимацию на агрегатах, так что выполняется не только свойство слабой аппроксимации, но и свойство сильной аппроксимации. Второе позволяет снизить максимальное собственное значение модели грубого уровня и генерировать координатные функции, которые не требуют сглаживания. Типичная модель агрегирования иллюстрируется на рис. 1.

В этом разделе кратко описываются схемы агрегирования, для которых в разделах 4 и 5 проводится исследование сходимости.

Мы понимаем агрегат $\bar{\delta}^{(k)}$ как замкнутое подмножество области $\bar{\Omega}_h$, которое однозначно определено включенными в него узлами $\mathbf{x}^{(i)}$. Если $X^{(k)} \subset \bar{X}$ является множеством узлов агрегата и $v \in \mathcal{H}(\Omega_h)$ соответствует вектору \mathbf{v} с компонентами

$$\begin{aligned} v^{(i)} &= 1 \quad \text{для} \quad \mathbf{x}^{(i)} \in X^{(k)}, \\ v^{(i)} &= 0 \quad \text{для} \quad \mathbf{x}^{(i)} \notin X^{(k)}, \end{aligned}$$

то по определению $\bar{\delta}^{(k)} := \{\mathbf{x} : v(\mathbf{x}) = 1\}$. Теперь сформулируем предположения об агрегации.

А) Агрегат $\bar{\delta}^{(k)}$ может быть вершиной, ребром, тетраэдром триангуляции или односвязным множеством, определенным объединением таких объектов. Диаметр d_k каждого агрегата удовлетворяет неравенству

$$d_k \leq c_\delta h \quad (3.1)$$

с абсолютной постоянной c_δ . Любая пара агрегатов не имеет общих точек.

Каждый узел, в котором задано значение решения, включен в агрегат $\bar{\delta}^{(0)}$. Для задачи Дирихле (2.1), (2.2) имеем $\bar{\delta}^{(0)} = \partial\Omega_h$. Для каждого узла $\mathbf{x}^{(i)}$, не включенного ни в один из агрегатов, т. е.

$$\mathbf{x}^{(i)} \in \Omega_h \setminus \bar{\Omega}_A, \quad \bar{\Omega}_A := \bigcup_k \bar{\delta}^{(k)}, \quad (3.2)$$

определяем множество узлов X_i , которое называется *интерфейсным интерполяционным множеством*, и соответствующую *интерполяционную подобласть* A_i . В простейшем случае каждое множество X_i может состоять из двух, трех или четырех узлов, так что A_i может быть отрезком прямой, треугольником или тетраэдром с вершинами, образующими множество X_i и $\mathbf{x}^{(i)} \in A_i$.

Б) Для каждого узла $\mathbf{x}^{(i)}$ в (3.2) существует интерфейсное интерполяционное множество X_i такое, что

$$\mathbf{x}^{(i)} \in \bar{A}_i, \quad X_i \in \bar{\Omega}_A,$$

различные узлы $\mathbf{x}^{(j)} \in X_i$ принадлежат различным агрегатам и

$$\text{dist}(\mathbf{x}^{(j)}, \mathbf{x}^{(i)}) \leq c_0 h. \quad (3.3)$$

Назовем $gt(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)})$ g -расстоянием между узлами $\mathbf{x}^{(i)}$ и $\mathbf{x}^{(j)}$ и определим его как целое число, равное наименьшему числу ребер, соединяющих эти узлы. Аналогичным образом определим $g(\mathbf{x}^{(i)}, \bar{\delta}^{(k)})$, $g(\bar{\delta}^{(k)}, \bar{\delta}^{(l)})$ или $g(\bar{\Omega}_h', \bar{\Omega}_h'')$, где $\bar{\Omega}_h'$ и $\bar{\Omega}_h''$ — некоторые подмножества $\bar{\Omega}_h$, каждое из которых содержит не менее одного узла. Если $g(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}) = n$, $n = 1$, то узлы $\mathbf{x}^{(i)}$, $\mathbf{x}^{(j)}$ называются *соседними* и *соседями n -го поколения*, если $n \geq 1$.

Каждая подобласть интерполяции A_i принадлежит подпространству — прямой, плоскости или трехмерному пространству — имеющему размерность, равную размерности A_i . Чтобы сделать координатные функции грубого уровня более гладкими, можно добавить к исходным множествам X_i , A_i , $\dim A_i \geq 1$, дополнительные узлы $\mathbf{x}^{(j)}$, $j \in \omega_2$, которые находятся в одном подпространстве с A_i , удовлетворяют неравенствам $g(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}) \leq \max g(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(s)})$ по $\mathbf{x}^{(s)} \in X_i$ и число которых в каждом агрегате $\bar{\delta}^{(k)}$ не превосходит $(1 + \dim \delta^{(k)})$. Новое множество \bar{A}_i может быть определено как наименьший многоугольник или многогранник, включающий множество X_i . При таком определении X_i может оказаться, что $\text{card } X_i > 1 + \dim A_i$, и, следовательно, для такого интерфейсного узла вместо интерполяции используется линейная аппроксимация методом наименьших квадратов. Однако в любом случае будем называть всю эту процедуру интерполяцией.

Для практического определения множества X_i можно действовать следующим образом. Во-первых, рассматриваем узлы, соседние с $\mathbf{x}^{(i)}$. Если среди этих узлов нет подходящего интерполяционного множества, то привлекаем соседние узлы 2-го поколения и так далее. Множество X_i можно определить как множество узлов, ближайших к $\mathbf{x}^{(i)}$ в смысле g -расстояния и обеспечивающих однозначную линейную интерполяцию. Отличительной особенностью геометрических многосеточных методов является то, что различные интерполяционные множества не пересекаются. При использовании рассматриваемого подхода это свойство, вообще говоря, не является необходимым, хотя иногда оно может быть обеспечено. Одним из способов уменьшения числа пересечений является следующий прием: как только определена пара X_i , A_i , она используется для всех узлов $\mathbf{x}^{(i)} \in A_i$, $i \in \omega_I$, для которых множества интерполяции еще не определены. Для простоты в дальнейшем всегда предполагается, что число пересечений ограничено абсолютной постоянной, которая обозначена через n_0 . С помощью существующих процедур агрегации, в том числе и описанных далее, можно получить агрегаты и множества X_i , A_i , обладающие вышеуказанными и некоторыми дополнительными свойствами, например, как в (5.1).

Замечание 3.1. Если узлы $\mathbf{x}^{(i)}$, $\mathbf{x}^{(j)}$ являются соседними, то соответствующий недиагональный элемент в \mathbf{K} будет в общем случае ненулевым. Учитывая это, понятия g -расстояния и соседних узлов различных поколений можно понимать в чисто алгебраическом смысле на основе матрицы \mathbf{K} .

В случае агрегатов с постоянными полями пространство грубого уровня $\mathcal{H}_2^0(\Omega_h)$ — это такое подпространство пространства $\mathcal{H}(\Omega_h)$, что каждая функция $v_2 \in \mathcal{H}_2^0(\Omega_h)$ однозначно связана с вектором $\mathbf{v}_2 \in U_2 = R^{\bar{k}}$, где \bar{k} — число агрегатов $\bar{\delta}^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, \bar{k}$, в Ω . Функция v_2 сначала определяется на всех агрегатах следующим образом:

$$v_2(\mathbf{x}) = v_2^{(k)} \quad \text{для} \quad \mathbf{x} \in \bar{\delta}^{(k)}, \quad k = 1, 2, \dots, \bar{k}, \quad (3.4)$$

$$v_2(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{для} \quad \mathbf{x} \in \bar{\delta}^{(0)} = \partial\Omega_h, \quad (3.5)$$

где $v_2^{(k)}$ — компоненты вектора \mathbf{v}_2 . Значения $v_2(\mathbf{x}^{(i)})$ в интерфейсных узлах в соответствии со сказанным выше определяются с помощью линейной интерполяции по узлам $\mathbf{x}^{(j)} \in X_i$, где $v_2(\mathbf{x}^{(j)})$ известны из (3.4) и (3.5). Например, если для некоторого узла $\mathbf{x}^{(i)} \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_A$ множество A_i является треугольником, то $v_2(\mathbf{x}^{(i)})$ определяется с помощью линейной интерполяции по трем узлам $\mathbf{x}^{(j)} \in X_i$, которые являются вершинами этого треугольника. Равенства (3.4), (3.5) и линейная интерполяция однозначно определяют v_2 во всех узлах $\mathbf{x}^{(i)} \in \bar{X}$ и, следовательно, v_2 как элемент $\mathcal{H}(\Omega_h)$. Вышеупомянутые определения эквивалентны однозначному определению оператора продолжения $\mathbf{P} : U_2 \rightarrow U$.

Базис $\{p_2^{(k)}(\mathbf{x}), k = 1, 2, \dots, \bar{k}\}$ однозначно определен равенствами

$$p_2^{(k)}(\mathbf{x}) = \delta_{k,i} \quad \text{для всех } \mathbf{x} \in \bar{\delta}^{(i)}, \quad i, k = 1, 2, \dots, \bar{k}.$$

Назовем узел $\mathbf{x}^{(i)} \in \Omega_h \setminus \bar{\Omega}_A$ *зависимым* от агрегата $\bar{\delta}^{(k)}$ или узла $\mathbf{x}^{(j)}$, если для интерполяции в $\mathbf{x}^{(i)}$ используется значение $v_2(\mathbf{x}^{(j)})$, $\mathbf{x}^{(j)} \in \bar{\delta}^{(k)}$. Носитель любой функции $p_2^{(k)}(\mathbf{x})$ включает в себя агрегат $\bar{\delta}^{(k)}$, все тетраэдры τ_r , имеющие общие узлы с $\bar{\delta}^{(k)}$, и все элементы, имеющие по крайней мере один узел, зависящий от этого агрегата. Более того,

$$\sum_{k=1}^{\bar{k}} p_2^{(k)}(\mathbf{x}) = 1 \quad \text{для всех } \mathbf{x} \in \Omega_h^*, \quad (3.6)$$

где Ω_h^* — внутренняя часть Ω_h на расстоянии $\mathcal{O}(h)$ от границы. Точнее говоря, область Ω_h^* получается путем исключения из Ω_h всех тетраэдров, имеющих по крайней мере одну вершину на $\partial\Omega_h$ или зависящую от $\partial\Omega_h$. Ясно, что пространство $\mathcal{H}_2^\circ(\Omega_h)$ не содержит функций, которые линейны на Ω_h^* , и вследствие этого оно не обладает свойством сильной аппроксимации. Однако в разделе 4 показано, что определенное таким образом $\mathcal{H}_2^\circ(\Omega_h)$ обладает свойством слабой аппроксимации.

Замечание 3.2. Предположение Б) становится ненужным, если используется простая агрегация и, следовательно, каждый узел включен в некоторый агрегат.

При обобщенной агрегации пространство $\mathcal{H}_2(\Omega_h)$ на каждом агрегате обогащается включением координатных функций более высокого порядка с целью аппроксимации энергии. В данной работе рассматривается простейший вариант обобщенной агрегации, в котором пространство $\mathcal{H}_2(\Omega_h)$ на каждом агрегате есть пространство линейных полиномов. Другими словами, пространство $\mathcal{H}_2(\Omega_h)$ есть подпространство функций $v_2 \in \mathcal{H}^\circ(\Omega_h)$, линейных на каждом агрегате, со значениями $v_2(\mathbf{x}^{(i)})$ в интерфейсных узлах, определяемых посредством интерполяции.

Опишем соответствующие координатные функции в $\mathcal{H}_2(\Omega_h)$. Их выбор влияет на обусловленность матрицы грубого уровня \mathbf{K}_2 и L_2 -устойчивость. Различные агрегаты можно классифицировать на четыре категории: (i) агрегаты, состоящие из одного узла; (ii) агрегаты-линии, т. е. агрегаты, содержащие более одного узла, которые лежат на одной прямой; (iii) плоские агрегаты или агрегаты с узлами, расположенными в одной плоскости, но не относящиеся к категориям (i) и (ii); (iv) трехмерные агрегаты — все остальные агрегаты, не относящиеся к категориям (i)–(iii). На каждом агрегате $\bar{\delta}^{(k)}$ выбираем множество узлов $\hat{\mathbf{x}}^{(k,\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \dots, \bar{\alpha}(k)$, которое назовем *агрегатным интерполяционным множеством*, с числом $\bar{\alpha}(k) = 1, 2, 3, 4$ узлов, соответствующим размерности агрегата. А именно, (i) — единственный узел $\hat{\mathbf{x}}^{(k,1)} = \delta^{(k)}$, (ii) — два крайних узла $\hat{\mathbf{x}}^{(k,\alpha)}$ агрегата $\delta^{(k)}$ — отрезка прямой, (iii) — три узла $\hat{\mathbf{x}}^{(k,\alpha)} \in \delta^{(k)}$, которые образуют треугольник, имеющий максимальную вписанную окружность, (iv) — четыре узла $\hat{\mathbf{x}}^{(k,\alpha)} \in \bar{\delta}^{(k)}$, которые образуют тетраэдр, имеющий максимальную вписанную сферу. Наименьший многогранник, содержащий вершины $\hat{\mathbf{x}}^{(k,\alpha)}$ агрегата, называется интерполяционной подобластью агрегата.

Пусть ω_2 — набор номеров $i \in \bar{\omega}$ всех репрезентативных узлов $\mathbf{x}^{(i)} = \hat{\mathbf{x}}^{(k,\alpha)}$, $\alpha = 1, 2, \dots, \bar{\alpha}(k)$, $k = 1, 2, \dots, \bar{k}$. Координатные функции $p_2^{(i)}(\mathbf{x})$ однозначно определяются как элементы $\mathcal{H}_2^\circ(\Omega_h)$, удовлетворяющие равенствам

$$p_2^{(i)}(\mathbf{x}^{(j)}) = \delta_{i,j} \quad \text{для всех } i, j \in \omega_2. \quad (3.7)$$

В итоге, координатные функции описываются как элементы пространства $\mathcal{H}(\Omega_h)$ следующим образом. Во-первых, $p_2^{(i)}(\mathbf{x})$ определяется на агрегате $\bar{\delta}^{(k)}$, которому принадлежит узел $\mathbf{x}^{(i)}$, как линейная функция, удовлетворяющая (3.7) для всех $i, j \in \omega_2^{(k)} := \{s \in \omega_2 : \mathbf{x}^{(s)} \in \bar{\delta}^{(k)}\}$. В

остальных агрегатах $\bar{\delta}^{(t)}$, $t \neq k$, значение $p_2^{(i)}$ считается равным нулю. Наконец, на интерфейсной поверхности $\Omega_h \setminus \bar{\Omega}_A$, координатная функция $p_2^{(i)}$ определяется с помощью интерполяции, описанной выше.

Ясно, что в процесс интерполяции для функции $p_2^{(i)}$, $\mathbf{x}^{(i)} \in \bar{\delta}^{(k)}$, вовлечены только те узлы интерфейсной поверхности, которые зависят от агрегата $\bar{\delta}^{(k)}$. Отметим, что для каждого v_2 имеется единственная функция $v_2 \in \mathcal{H}_2^\circ(\Omega_h)$, задаваемая как

$$v_2 = \sum_{i \in \omega_2} p_2^{(i)}(\mathbf{x}) v_2^{(i)}, \quad (3.8)$$

и вектор $\mathbf{v} \leftrightarrow v_2$, $\mathbf{v} \in U$, соответствующий v_2 . Таким образом, оператор продолжения $\mathbf{P} : U_2 \rightarrow U$ определяется единственным образом.

Для описанных координатных функций не только выполняется равенство, аналогичное (3.6), но также

$$\sum_{i \in \omega_2} p_2^{(i)}(\mathbf{x}) \mathbf{x}_k^{(i)} = \mathbf{x}_k \quad \text{для } k = 1, 2, 3 \text{ и всех } \mathbf{x} \in \Omega_h^*,$$

где подразумевается, что $\mathbf{x}^{(i)} = (\mathbf{x}_1^{(i)}, \mathbf{x}_2^{(i)}, \mathbf{x}_3^{(i)})$. Следовательно, любая линейная функция на Ω_h^* точно представлена на этой подобласти элементом пространства $\mathcal{H}_2^\circ(\Omega_h)$.

Замечание 3.3. Если на агрегатах допускаются только постоянные поля, то улучшение качества координатных функций между агрегатами не дает повышения порядка аппроксимации функциями из грубого пространства. Поэтому можно использовать более простые процедуры, чем интерполяция или метод наименьших квадратов. Пусть $\mathbf{x}^{(i)} \in \Omega_h \setminus \Omega_A$ и $\mu_i = \text{card } X_i$, тогда для каждого $\mathbf{x}^{(j)} \in X_i$ при определении координатных функций грубого уровня полагаем $p_2^{(j)}(\mathbf{x}^{(j)}) = 1/\mu_i$. Очевидно, что свойство точной аппроксимации постоянной на Ω_h^* сохраняется.

Сформулированные выше условия накладывают очень слабые ограничения на агрегацию и, таким образом, применимы к разнообразным алгоритмам укрупнения. Для инженерной практики особенно важна возможность использования агрегатов различных размерностей. Соотношение между объемами используемых геометрических и алгебраических данных также может быть различным. В частности, сама агрегация может быть основана на чисто геометрических, как, например, в [12], или на чисто алгебраических аргументах. Рассмотрим два примера, иллюстрирующие эту мысль.

Условия (3.1) и (3.3) будут удовлетворяться автоматически в случае квазиоднородных сектов, если выполнены сформулированные ниже условия. Поскольку они выражены через g -расстояние, то согласно замечанию 3.1 их можно интерпретировать в алгебраическом смысле. Для простоты предполагается, что триангуляция \mathbb{S}_h продолжена за пределы Ω_h , т. е. существует триангуляция $\mathbb{S}^{(h)}$ с областью $\Omega^{(h)}$ такой, что \mathbb{S}_h является ограничением триангуляции $\mathbb{S}^{(h)}$ на Ω_h и $g(\mathbf{x}^{(i)}, \partial\Omega^{(h)}) \geq 2\nu_0$ для каждого $\mathbf{x}^{(i)} \in \partial\Omega_h$. Здесь ν_0 — целое число, характеризующее грубый уровень. Поскольку на триангуляцию $\mathbb{S}^{(h)}$ не накладываются других условий, она всегда существует. Следует подчеркнуть, что она играет совершенно вспомогательную роль и может быть опущена из рассуждений. Кроме того, используются обозначения $\bar{\Phi}_1^{(k)}$, $\bar{\Phi}_2^{(k)}$ для многогранника, содержащего все узлы $\mathbf{x}^{(j)}$, для которых $g(\mathbf{x}^{(k)}, \mathbf{x}^{(j)}) \leq \nu_0$, и для наименьшего многогранника, содержащего все узлы $\mathbf{x}^{(j)}$ на расстоянии $g(\bar{\delta}^{(k)}, \mathbf{x}^{(j)}) \leq 2\nu_0$, соответственно. Введем следующие условия:

а) каждый агрегат $\bar{\delta}^{(k)}$ является подмножеством множества $\bar{\Phi}_1^{(k)}$, т. е. $X^{(k)} \subset \bar{\Phi}_k^{(k)}$ для всех $k \in \omega_2$, где подразумевается, что агрегатам присвоены номера множеств $\bar{\Phi}_1^{(k)}$, которым они принадлежат;

б) для каждого $k \in \bar{\omega}_2$

$$\min_{j \in \bar{\omega}_2 \setminus k} g(\bar{\delta}^{(k)}, \bar{\delta}^{(j)}) = 2\nu_0,$$

что означает, что для каждого агрегата существует соседний на g -расстоянии, равном $2\nu_0$;

с) каждый узел интерфейсной подобласти $\mathbf{x}^{(i)} \in \Omega_h \setminus \overline{\Omega}_A$ входит по крайней мере в два множества $\Phi_2^{(ki)}$, $\Phi_2^{(li)}$, так что $\mathbf{x}^{(i)} \in \Phi_2^{(ki)} \cap \Phi_2^{(li)}$.

Если условия а)–с) выполнены, то (3.1) и (3.3) также удовлетворяются с $c_\delta = 2\nu_0$, $c_0 = 3\nu_0$. Некоторые из даваемых далее оценок сходимости верны для локально-квазиоднородных или квазиоднородных по углам треугольников сеток. В этом случае условия а)–с) не изменяются, в то время как в (3.1) и (3.3) значение h следует заменить на $h^{(t)}$ с $t = k, i$ соответственно, где $h^{(t)}$ — например, максимальный размер ребра среди ребер, один конец которых попадает на $\mathbf{x}^{(t)}$. Алгоритмы, удовлетворяющие условиям а)–с), могут быть довольно простыми. Ограничимся примером с $\nu_0 = 1$.

Лемма 3.1. Пусть \mathbb{S}_h — произвольная триангуляция и $\nu_0 = 1$. Существует множество агрегатов $\mathcal{M} = \{\bar{\delta}^{(k)}, k \in \omega_{\mathcal{M}}\}$, удовлетворяющих условиям а)–с) и таким, что

$$\Omega_h \subset \bigcup_{k \in \omega_{\mathcal{M}}} \Phi_2^{(k)}. \quad (3.9)$$

Доказательство. Сначала установим, что существует множество $\widetilde{\mathcal{M}} = \{\bar{\delta}^{(k)}, k \in \widetilde{\omega}_{\mathcal{M}}\}$ с агрегатами, являющимися вершинами и удовлетворяющими условиям а), б) и (3.9). В самом деле, всегда найдутся два агрегата $\bar{\delta}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)}$, удовлетворяющие условиям а) и б). Предположим, что для некоторого узла $\mathbf{x}^{(k)}$

$$g(\mathbf{x}^{(p)}, \bar{\delta}^{(k)}) \geq 2 \quad \text{для всех } k \in \widetilde{\omega}_{\mathcal{M}}. \quad (3.10)$$

Тогда определим новый агрегат $\bar{\delta}^{(p)} = \mathbf{x}^{(p)}$ и включим его в $\widetilde{\mathcal{M}}$. При этом условия а) и б) не нарушаются. Процесс обогащения множества $\widetilde{\mathcal{M}}$ может быть продолжен до тех пор, пока не будут выполнены условия а), б) и (3.9).

Теперь рассмотрим одно из множеств $\widetilde{\mathcal{M}}$ и обновим его агрегаты и множества $\Phi_2^{(k)}$ таким образом, что а) будет также выполнено. Предположим, что некоторый узел $\mathbf{x}^{(i_0)} \in \Omega_h \setminus \overline{\Omega}_A$ попадает только в одно множество $\Phi_2^{(i)}$. Это означает, что

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}^{(i_0)}, \bar{\delta}^{(i)}) &= 1, \\ g(\mathbf{x}^{(i_0)}, \bar{\delta}^{(t)}) &\geq 2 \quad \text{для всех } \delta \neq i. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Обновим агрегат $\bar{\delta}^{(i)}$, включив в него узел $\mathbf{x}^{(i_0)}$, и множество $\Phi_2^{(i)}$. Очевидно, что для обновленного множества $\widetilde{\mathcal{M}}$ условия а), б) и (3.9) по-прежнему выполнены. Кроме того, теперь в узле $\mathbf{x}^{(i_0)}$ условие с) не нарушено.

Обновление агрегатов и множеств $\Phi_2^{(k)}$ может быть продолжено, однако необходимо показать, что только узлы $\mathbf{x}^{(m)} \in \overline{\Phi}_1^{(k)}$ могут быть добавлены к каждому агрегату в этом процессе. Предположим, что в другом узле $\mathbf{x}^{(j_0)}$ условие с) нарушается, т.е. только для одного числа $j \in \widetilde{\omega}_{\mathcal{M}}$

$$\begin{aligned} g(\mathbf{x}^{(j_0)}, \bar{\delta}^{(j)}) &= 1, \\ g(\mathbf{x}^{(j_0)}, \bar{\delta}^{(s)}) &\geq 2 \quad \text{для всех } s \neq j. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Если агрегат еще не был обновлен, то обновляем его, как было показано выше. В противном случае $\delta^{(j)} = \delta^{(i)}$ и $g(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j_0)})$ равняется 1 или 2. В первом случае обновим агрегат $\bar{\delta}^{(i)}$ снова. Второй случай невозможен, поскольку если принять во внимание (3.11) и (3.12), то придем к выводу, что перед первым обновлением агрегата $\bar{\delta}^{(i)}$ условие (3.10) выполнялось для $p = j_0$. Но это противоречит тому факту, что исходное множество $\widetilde{\mathcal{M}}$ удовлетворяло (3.9). \square

Простым способом агрегации является использование вспомогательной регулярной сетки (плохо аппроксимирующей границу) прямоугольной или другой формы. Пусть \mathcal{Z}_a — множество узлов $\mathbf{z}^{(i)} := Hi = H(i_1, i_2, i_3) \in \Omega_h$ однородной прямоугольной сетки такое, что $\text{dist}(\mathbf{z}^{(i)}, \partial\Omega_h) \geq cH$, $0.5 \leq c \leq 1$, и $\tau^{(a,i)} := \{x : Hi_k < x_k < H(i_k + 1), k = 1, 2, 3\}$ — ячейка сетки. Для каждого $\mathbf{z}^{(i)} \in \mathcal{Z}_a$ может быть задан агрегат, состоящий из одного узла, как ближайший к $\mathbf{z}^{(i)}$ узел $\mathbf{x}^{(k)} \in X$. Пусть $\bar{\Omega}_{h,a}$ — объединение ячеек $\tau^{(a,1)} \in \Omega_{h,a}$, разделенных по крайней мере одним слоем ячеек, образующих интерфейсную подобласть; можно задать агрегаты, которые содержат все или часть узлов этих ячеек. Агрегаты можно также расположить более регулярным образом и, например, на каждой ячейке $\tau^{(a,i)} \in \Omega_{h,a}$ с четными индексами i_k . Очевидно, такие способы агрегации позволяют удовлетворить (3.1), (3.3) и дополнительные условия, формулируемые в дальнейшем (см. раздел 5).

4. Сходимость метода простой агрегации

В этом разделе исследуем сходимость методов агрегации с постоянными полями на агрегатах, генерированных на квазиоднородных и квазиоднородных по углам мелких сетках. К этим методам относится метод простой агрегации, который сходится при весьма слабых ограничениях и именно введенных в предыдущем разделе ограничениях на размеры агрегатов и интерполяционных множеств, не зависящих, однако, от их размерностей.

Воспользуемся следующими обозначениями:

$\|\cdot\|_{0,\Omega}$ — норма в пространстве $L_2(\Omega)$, $\|v\|_{0,\Omega} = (v, v)_{\Omega}^{1/2}$;
 $\|\cdot\|_{k,\Omega}$, $\|\cdot\|_{k,\Omega}$ — квазинорма и норма в пространстве Соболева $H^k(\Omega)$, $|v|_{k,\Omega}^2 = \sum_{|q|=k} \int_{\Omega} (D_x^q v)^2 dx$,

$\|v\|_{k,\Omega}^2 = \|v\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{\ell=1}^k |v|_{\ell,\Omega}^2$, где $D_x^q v = \partial^{|q|} v / \partial x_1^{q_1} \partial x_2^{q_2}$, $q = (q_1, q_2)$, $q_1, q_2 \geq 0$, $|q| = q_1 + q_2$;

$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0\}$ — подпространство функций из $H^1(\Omega)$, обращающихся в нуль на границе;

$C^k(\Omega)$ — пространство функций с непрерывными k -ми производными и нормой $\|v\|_{C^k(\Omega)} = \max_{0 \leq |q| \leq k} \sup_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} |D_x^q v|$;

$(\cdot, \cdot)_{\ell}$ и $\|\cdot\|_{s,\ell}$ — скалярное произведение и норма в пространстве ℓ -го уровня векторов U_{ℓ} ,

$$(\mathbf{v}_{\ell}, \mathbf{w}_{\ell})_{\ell} = h_{\ell}^3 \sum_{i \in \omega_{\ell}} v_{\ell}^{(i)} w_{\ell}^{(i)}, \quad \|v\|_{s,\ell}^2 = (K_{\ell}^s v_{\ell}, v_{\ell})_{\ell}, \quad (4.1)$$

где $\omega_1 = \omega$, ω_{ℓ} — подмножества множеств $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}, \bar{\omega}_{\ell}$ — номеров внутренних узлов агрегатов; $\omega_I = \omega \setminus \omega_2$; B_i — множество номеров агрегатов, используемых для интерполяции в $\mathbf{x}^{(i)}$, $i \in \omega_2$;

\mathcal{W}_k — множество номеров узлов, зависящих от агрегата $\bar{\delta}^{(k)}$.

Лемма 4.1. Пусть неравенства (2.3), (3.1) и (3.3) выполнены, матрица сглаживающей итерации \mathbf{S}_1 удовлетворяет неравенствам

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{B}_1^{-1} \mathbf{K}, \quad \mathbf{K} \leq \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_1^T \leq c_{\beta} h^{-2}, \quad c_{\beta} = \text{const}, \quad (4.2)$$

и $m_1, m_2 \geq 1$. Тогда при условии постоянства полей на агрегатах

$$\|\mathbf{T}g(m_1, m_2)\|_{[1,1]} \leq \left(1 - \frac{1}{C_A}\right) \quad (4.3)$$

с постоянной C_A , зависящей только от $\alpha^{(1)}$, γ , c_0 , c_{δ} .

Доказательство. Для доказательства необходимо проверить свойство слабой аппроксимации, например, в следующей форме: для любого вектора $\mathbf{u} \in U$ существует вектор $\mathbf{u}_2 \in U_2$ такой, что

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{P}\mathbf{u}_2\|_{D,1}^2 \leq c(\max(c_{\delta}, c_0))^2 h^2 \|\mathbf{u}\|_{1,1}^2, \quad (4.4)$$

где c — постоянная, зависящая только от $\alpha^{(1)}$ и γ .

Не теряя общности, можно предположить, что для определения оператора продолжения используется только интерполяция. Для любого $\mathbf{u} \in U$ зададим компоненты $u_2^{(k)}$ вектора \mathbf{u}_2 равенствами

$$u_2^{(k)} = u^{(k)} \quad \text{для всех } k \in \omega_2. \quad (4.5)$$

По способу определения оператора \mathbf{P} для компонент $v^{(j)}, j \in \omega_I$, вектора $\mathbf{v} = \mathbf{P}\mathbf{u}_2$ имеем

$$v^{(j)} = \sum_{k \in B_j} b_k^{(j)} u_2^{(k)}, \quad 0 < b_k^{(j)} < 1, \quad \sum_{k \in B_j} b_k^{(j)} = 1. \quad (4.6)$$

Заметим, что в этих соотношениях присутствуют коэффициенты, соответствующие граничным узлам. Из (4.5) и (4.6) следует, что

$$\mathbf{u}^{(j)} - \mathbf{v}^{(j)} = \begin{cases} 0 & \forall j \in \omega_2; \\ u^{(j)} - u^{(k)} & \forall j \in X^{(k)}; \\ u^{(j)} - \sum_{k \in B_j} b_k^{(j)} u^{(k)} & \forall j \in \omega_I. \end{cases} \quad (4.7)$$

Пусть $u \in \mathcal{H}^\circ(\Omega_h)$ и

$$u(\mathbf{x}^{(i)}) = u^{(i)} \quad \text{для всех } i \in \bar{\omega}. \quad (4.8)$$

Под $\tau_{r(i)}$ и $\bar{A}_{\tau,i}$ подразумеваем тетраэдр, для которого $\max_{\mathbf{x} \in A_{\tau,i}} |\text{grad } u| = \max_{\mathbf{x} \in \tau_{r(i)}} |\text{grad } u|$, и наименьшее объединение тетраэдров $\bar{\tau}_r$ содержит подобласть A_i . Очевидно, $\tau_{r(i)}$ зависит от u , в то время как $A_{\tau,i}$ не зависит. Только конечное число подобластей $A_{\tau,i}$ могут пересекаться в каждой точке $\mathbf{x} \in \Omega_h$, и это число ограничено абсолютной постоянной. Заметим также, что в случае, когда в узлах интерфейсной поверхности используется только интерполяция, имеем $\text{card } B_i \leq 4$ и

$$b^{(j)} = \sum_{i \in B_j} (b_i^{(j)})^2 \leq 1.$$

Для третьего случая (4.7) из предыдущего обсуждения и (3.3) следует, что

$$|\mathbf{u}^{(p)} - \mathbf{v}^{(j)}|^2 = \left| \sum_{k \in B_j} b_k^{(j)} (u^{(j)} - u^{(k)}) \right|^2 \leq b^{(j)} \sum_{k \in B_j} (u^{(j)} - u^{(k)})^2 \leq \frac{4c_0^2 h^2}{\text{mes } \tau_{r(j)}} \int_{\tau_{r(j)}} (\text{grad } u)^2 d\mathbf{x}. \quad (4.9)$$

Принимая дополнительно во внимание (2.3), приходим к неравенству

$$h^3 \sum_{\mathbf{x}^{(j)} \in \Omega_I} (u^{(j)} - v^{(j)})^2 \leq c c_0^2 h^2 |u|_{1, \Omega_I}^2 \quad (4.10)$$

с постоянной c , зависящей только от $\alpha^{(1)}$ и γ .

Совершенно аналогичным образом выводится оценка

$$h^3 \sum_{\mathbf{x}^{(j)} \in \Omega_A} (u^{(j)} - v^{(j)})^2 \leq c c_\delta^2 h^2 |u|_{1, \Omega_I}^2, \quad (4.11)$$

откуда, если учесть (4.10) и определение нормы $\|\cdot\|_{[1,1]}$, следует (4.4). Неравенство

$$\inf_{\mathbf{v}_2 \in U_2} (\mathbf{B}_1(\mathbf{v} - \mathbf{P}\mathbf{v}_2), \mathbf{v} - \mathbf{P}\mathbf{v}_2) \leq c c_\beta (\max(c_0, c_\delta))^2 \|\mathbf{v}\|_{[1, \Omega_I]}^2 \quad (4.12)$$

является следствием (4.4) и предположения (4.2) о сглаживании. Теперь, чтобы получить (4.3), мы можем использовать (4.12) и, например, лемму 3.1 из [18] или предположение 6.4.10 из [19]. Отметим, что $C_A = c c_\beta (\max(c_0, c_\delta))^2$. \square

Можно доказать, что скорость сходимости не изменяется, если сетка не является квазиоднородной, а только локально-квазиоднородной или квазиоднородной по углам, т. е. когда вместо (2.3) требуется только, чтобы

$$0 < \gamma \leq \rho_{I,2}/\rho_{c,2}. \quad (4.13)$$

Для случая таких неоднородных сеток переписываем (3.1) и (3.3) в форме

$$\max_{\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)} \in \bar{\delta}^{(k)}} g(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}) \leq 2\nu_0, \quad \max_{\mathbf{x}^{(j)} \in X_i} g(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{x}^{(j)}) \leq \nu_0 \quad (4.14)$$

для каждого $k \in \omega_2$ и $i \in \omega_I$ и определяем скалярное произведение

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = c_s \sum_{i \in \omega} (\text{mes } \Psi^{(i)}) v^{(i)} w^{(i)}, \quad (4.15)$$

где c — некоторая абсолютная постоянная и $\Psi^{(i)}$ — носитель координатной функции тонкого уровня $p_1^{(i)}$. Соответственно, мы определяем матрицу жесткости \mathbf{K} и нормы $\|\cdot\|_{[k,\ell]}$ (см. (2.6) и (4.1)). Через \bar{h}_i обозначим некоторую характеристическую длину для ребер тетраэдров, включенных в многогранник $\Psi_1^{(i)}$, например, среднее арифметическое. Матрица сглаживающей итерации \mathbf{S} может быть определена с помощью диагональной матрицы $\mathbf{B} = c_\beta \text{diag}[\bar{h}_i^{-2}]$ с такой постоянной c_β , что

$$\mathbf{K} \leq \mathbf{B}. \quad (4.16)$$

Лемма 4.2. Пусть будут выполнены условия (4.13), (4.14) и (4.16) и норма $\|\cdot\|_{[1,1]}$ определены посредством скалярного произведения (4.15). Тогда при предположении о постоянных полях на агрегатах оценка (4.3) выполняется с постоянной $C_A = c\nu_0^2 c_\beta$ и постоянной c , зависящими только от γ .

Мы опускаем доказательство, которое во многом аналогично доказательству предыдущей леммы, если заметить, что в нем используются на самом деле только локальные оценки.

Замечание 4.1. Леммы 4.1 и 4.2 остаются верными, если производить продолжение в интерфейсные узлы более простым способом, в частности, способом, указанным в замечании 3.3.

5. Сходимость обобщенного метода агрегации

В этом разделе рассматриваются алгоритмы агрегации на основе грубого пространства $\mathcal{H}_2^o(\Omega_h)$ с линейными полями на агрегатах. Такое пространство обеспечивает ускорение сходимости.

Для того чтобы гарантировать свойство сильной аппроксимации грубой модели, необходима дополнительная регулярность формы агрегатов, интерполяционных множеств и области Ω_h . Будем использовать те же обозначения A_j для интерфейсной подобласти и внутренних подобластей интерполяции, определенных в разделе 3, но с различными номерами $j \in \omega_I$ и $j \in \omega_2$ соответственно. Независимо от того, является ли такая подобласть плоской или трехмерной, $\bar{\rho}_j$ и $\hat{\rho}_j$ обозначают радиусы наибольшей вписанной и наименьшей описанной окружности или сферы соответственно. Потребуем, чтобы

$$\bar{\rho}_j / \hat{\rho}_j \geq \alpha^{(I)} > 0 \quad (5.1)$$

с постоянной $\alpha^{(I)}$, не зависящей от j , h и H . Предположим, что размеры агрегатов и интерполяционных множеств удовлетворяют (4.14), так что в (3.1) и (3.3) $c_\delta = 2\nu_0$, $c_0 = \nu_0$. Предположим также, что условие $b)$ из раздела 3 выполнено по крайней мере для $k = 0$ в ослабленной форме

$$\min_{j \in \bar{\omega}_2 \setminus k} \text{dist}(\delta^{(k)}, \delta^{(j)}) \geq \alpha^{(2)} H, \quad \alpha^{(2)} \in (0, 1].$$

Пусть $\Omega_{h,\varepsilon}$ — ε -окрестность области Ω_h и $\varepsilon \geq 2H$. Потребуем, чтобы для каждой функции $w \in H^2(\Omega)$ существовало продолжение на $\Omega_{h,\varepsilon}$ в пространстве $H^2(\Omega_{h,\varepsilon})$ такое, что

$$\|w\|_{2,\Omega_{h,\varepsilon}} \leq c\|w\|_{2,\Omega} \quad (5.2)$$

с постоянной, не зависящей от w . Это условие всегда выполнено, если, например, \mathbb{S}_h является триангуляцией достаточно гладкой области, что следует из результатов [21], [22] по построению методов, в которых криволинейные границы аппроксимируются точно, и, например, [23]–[25].

Лемма 5.1. Пусть $\mathcal{H}_2^\circ(\Omega_h)$ — пространство грубого уровня с линейными полями на агрегатах, и условия (2.3), (3.1), (3.3), (5.1) выполнены. Для любой $w \in H^2(\Omega_h) \cap H_0^1(\Omega_h)$ существует $u_2 \in \mathcal{H}_2^\circ(\Omega_h)$ такая, что

$$\|w - u_2\|_{0,\Omega_h} + H|w - u_2|_{1,\Omega_h} \leq c_a H^t \|w\|_{t,\Omega}, \quad t = 1, 2, \quad (5.3)$$

с постоянной, не зависящей от h и H .

Доказательство. Чтобы не загромождать доказательство деталями, связанными с приближенной аппроксимацией границы, предположим, что $\Omega = \Omega_h$. Для любой функции $w \in H^2(\Omega_h)$ введем вспомогательную функцию $w_h \in C^2(\Omega)$, для которой

$$|w - w_h|_{k,\Omega_h} \leq c\hbar^{t-k} \|w\|_{t,\Omega_h}, \quad 0 \leq k \leq t \leq 2, \quad (5.4)$$

$$|w_h|_{k,\Omega_h} \leq c\hbar^{-1} \|w_h\|_{k-1,\Omega_{h,\hbar}}, \quad k = 1, 2, \quad (5.5)$$

$$|D_x^q w_h(\mathbf{x})|^2 \leq c\hbar^{-3} \|w\|_{|q|,S_h(\mathbf{x})}^2, \quad 0 \leq |q| < 2, \quad (5.6)$$

с абсолютными постоянными c , т. е. не зависящими от w и \hbar , причем $S_h(\mathbf{x})$ — это сфера радиуса h с центром в точке \mathbf{x} . Функции w_h с такими свойствами можно получить путем усреднения (напр., [26], [27])

$$w_h(\mathbf{x}) = \int_{|x-y|<h} K_h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) w(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_h, \quad (5.7)$$

с ядром, удовлетворяющим соотношениям

$$\begin{aligned} \hbar^3 K_h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= K_0(\boldsymbol{\xi}) = K_0(|\boldsymbol{\xi}|) \geq 0, \quad \int_{|\boldsymbol{\xi}| \leq 1} K_0(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = 1, \\ K_0(\boldsymbol{\xi}) &= 0 \quad \text{для } |\boldsymbol{\xi}| \geq 1, \quad K_0(\boldsymbol{\xi}) \in C^2(R^3), \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\xi} = \hbar^{-1}|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$, $|\boldsymbol{\xi}| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$ и K_0 — фиксированная функция. В (5.7) w считается продолженной на $\Omega_{h,\varepsilon}$, $\varepsilon = \hbar$, таким образом, что (5.2) выполнено. Неравенства (5.4)–(5.6) легко доказываются на основе упомянутых выше свойств ядра.

Свяжем с функциями w, w_H три функции $u_2 \in \mathcal{H}_2^\circ(\Omega_h)$, $v \in \mathcal{H}(\Omega_h)$ и $v_\Gamma \in \mathcal{H}(\Omega_h)$ и однозначно определим их равенствами

$$u_2(\mathbf{x}^{(i)}) = w_H(\mathbf{x}^{(i)}) \quad \text{для всех } i \in \omega_2, \quad (5.8)$$

$$v(\mathbf{x}^{(i)}) = w_H(\mathbf{x}^{(i)}) \quad \text{для всех } i \in \bar{\omega},$$

$$v_\Gamma(\mathbf{x}^{(i)}) = \begin{cases} 0, & i \in \omega; \\ w_H(\mathbf{x}^{(i)}), & i \in \omega_\Gamma. \end{cases} \quad (5.9)$$

Согласно неравенству треугольника

$$\|w - u_2\| \leq \|w - w_H\| + \|w_H - v\| + \|v_\Gamma\| + \|v_0 - u_2\| \quad (5.10)$$

с $v_0 = v - v_\Gamma$. Из неравенства (5.4) получаем

$$\|w - w_H\| \leq cH^2 \|w\|_{2,\Omega}. \quad (5.11)$$

Для второго члена в правой части (5.10) оценка погрешности линейной интерполяции, рассуждения типа использованных в доказательстве леммы Брэмбла–Гильберта [28] и неравенство

(5.6) позволяют написать $\|w_H - v\|_{0,\tau_r}^2 \leq ch^7 |w_H|_{C^2(\tau_r)}^2 \leq c \frac{h^7}{H^3} \|v\|_{2,\tau_r,H}^2$, где $\tau_{r,\varepsilon}$ — ε -окрестность τ_r и $c = c(\alpha^{(1)}, \gamma)$. Теперь суммируем по r и, учитывая, что области $\tau_{r,H}$ могут пересекаться только cH^3/h^3 раз, $c = c(\alpha^{(1)}, \gamma)$, используем (5.2) и приходим к неравенству

$$\|w_H - v\|^2 \leq ch^4 \|w\|_{2,\Omega_h}^2. \quad (5.12)$$

Функция v_Γ отлична от нуля только на полосе одного слоя элементов, прилегающих к границе. Используя это обстоятельство и оценку погрешности линейной интерполяции на треугольных гранях, имеем $\|v_\Gamma\|^2 \leq h \|v_\Gamma\|_{0,\partial\Omega_h}^2 = h \|w - v_\Gamma\|_{0,\partial\Omega_h}^2 \leq ch^5 \|w_H\|_{2,\partial\Omega_h}^2$, $c = c(\alpha^{(1)}, \gamma)$, причем $|\cdot|_{2,\partial\Omega_h}^2$ понимается как сумма $|\cdot|_{2,T_r}^2$ по всем треугольным граням $T_r \subset \partial\Omega_h$. С помощью определения w_H и (5.2) легко получаем $|w_H|_{2,\partial\Omega_h}^2 \leq \frac{c}{H} |w|_{2,\partial\Omega_{h,H}}^2 \leq \frac{c}{H} \|w\|_{2,\Omega_h}^2$ и, следовательно,

$$\|v_\Gamma\|^2 \leq c \frac{h}{H} h^4 \|w\|_{2,\Omega_h}^2. \quad (5.13)$$

Прежде всего имеем

$$\|v_0 - u_2\| \leq ch^3 \sum_{i \in \omega} (v_0(\mathbf{x}^{(i)}) - u_2(\mathbf{x}^{(i)}))^2, \quad c = c(\alpha^{(1)}, \gamma). \quad (5.14)$$

Чтобы получить выражения, аналогичные (4.7) для разностей $(v_0(\mathbf{x}^{(i)}) - u_2(\mathbf{x}^{(i)}))$, введем некоторые новые обозначения. В рассматриваемом случае интерполяция в целом производится с помощью выражений, аналогичных (4.6), но в них множества B_j заменены на $B_{(j)}$,

$$B_{(j)} = \bigcup_{k \in B_j} B^{(k)}, \quad B^{(k)} = \{\mathbf{x}^{(i)} : \mathbf{x}^{(i)} = \widehat{\mathbf{x}}^{(k,\alpha)}, \alpha = 1, 2, \dots, \bar{\alpha}(k)\}, \quad k \in \omega_2,$$

где $\widehat{\mathbf{x}}^{(k,\alpha)}$ — узлы интерполяционного множества на агрегате $\bar{\delta}^{(k)}$. Если $\bar{\alpha}(k) \geq 2$, то вводим $(\bar{\alpha}(k) - 1)$ -размерные функции $\lambda_{k,i}(\mathbf{x})$,

$$\lambda_{k,i}(\mathbf{x}^{(j)}) = \delta_{i,j} \quad \text{для всех } i, j \in B^{(k)},$$

которые являются барицентрическими координатами для A_k . Вместо (4.7) имеем

$$v_0(\mathbf{x}^{(j)}) - u_2(\mathbf{x}^{(j)}) = \begin{cases} 0 & \forall j \in \omega_2, \\ w_H(\mathbf{x}^{(j)}) - \sum_{i \in B^{(k)}} \lambda_{k,i}(\mathbf{x}^{(j)}) w_H(\mathbf{x}^{(i)}) & \forall \mathbf{x}^{(j)} \in \bar{\delta}^{(k)}, \\ w_H(\mathbf{x}^{(j)}) - \sum_{i \in B_{(j)}} b_i^{(j)} w_H(\mathbf{x}^{(i)}) & \forall j \in \omega_1, \end{cases} \quad (5.15)$$

где учтено, что функции w_H , v , v_0 и u_2 совпадают на соответствующих множествах узлов. Суммы в (5.15) — это интерполяционные формулы (с добавлением членов, соответствующих границе), которые для линейных функций являются точными. В результате получаем оценки погрешности интерполяции

$$|v_0(\mathbf{x}^{(j)}) - v_2(\mathbf{x}^{(j)})| \leq cH^2 |w_H|_{C^2(\Delta_j)} \quad (5.16)$$

с постоянной $c = c(\alpha^{(1)})$. Здесь Δ_j — наименьшее выпуклое множество, содержащее агрегат $\bar{\delta}^{(k)}$ с узлом $\mathbf{x}^{(j)} \in \bar{\delta}^{(k)}$ для $j \in \omega \setminus (\omega_I \cup \omega_2)$ и $\Delta_j = A_j$ для $j \in \omega_I$.

Если $\Delta_{j,H}$ — H -окрестность Δ_j , то с помощью (5.6) имеем $|w_H|_{C^2(\Delta_j)}^2 \leq cH^{-3} \|w\|_{2,\Delta_{j,H}}^2$ и, подставляя в (5.17) и далее в (5.15), получаем

$$\|v - v_2\|^2 \leq ch^3 H \sum_j \|w\|_{2,\Delta_{j,H}}^2. \quad (5.17)$$

Различные множества $\Delta_{j,H}$ покрывают каждую точку области $\Omega_{h,2H}$ конечное число раз, которое зависит только от $\alpha^{(1)}$ и числа пересечений различных интерполяционных множеств. Кроме того, совпадающие интерполяционные множества можно использовать максимум для $c(H/h)^3$

различных узлов $\mathbf{x}^{(i)}$, где $c = c(\alpha^{(I)}, \gamma)$. По этим причинам и согласно (5.2) неравенство (5.17) сводится к неравенствам

$$\|v - v_2\|^2 \leq cH^4 \|w\|_{2, \Omega_{h, 2H}}^2 \leq cH^4 \|w\|_{2, \Omega_h}^2, \quad c = c(\alpha^{(1)}, \alpha^{(I)}, \gamma). \quad (5.18)$$

Объединяя (5.10)–(5.13) и (5.18), получаем

$$\|w - u_2\| \leq cH^2 \|w\|_{2, \Omega_h}^2, \quad c = c(\alpha^{(1)}, \alpha^{(I)}, \gamma). \quad (5.19)$$

Доказательство оценки

$$\|w - u_2\|_{1, \Omega_h} \leq cH \|w\|_{2, \Omega_h}, \quad c = c(\alpha^{(1)}, \alpha^{(I)}, \gamma), \quad (5.20)$$

по своей сути аналогично доказательству (5.19), хотя несколько сложнее. Оценки (5.19) и (5.20) эквивалентны (5.3). \square

Ниже формулируем результаты о сходимости сначала для областей, которые обеспечивают H^2 -регулярность решений, а затем для менее гладких областей. Предположим, что \mathbb{S}_h — триангуляция области Ω , для которой задача Дирихле H^2 -регулярна, т. е. для любой $f \in L_2(\Omega)$ решение задачи Дирихле удовлетворяет неравенству (см. [24], [25], [31])

$$\|u\|_{2, \Omega} \leq C_R \|f\|_{0, \Omega}. \quad (5.21)$$

Тогда для разности $\tilde{u} - \tilde{u}_2$ двух приближенных решений $\tilde{u} \in H(\Omega_h)$ и $\tilde{u}_2 \in H_2(\Omega_h)$ имеем

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_2\|_{0, \Omega_h} \leq c^2 C_R^2 H^2 \|f\|_{0, \Omega} \quad (5.22)$$

с постоянной c , зависящей только от $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(I)}$, γ и $\partial\Omega$. Доказательство проводится так же, как хорошо известные доказательства оценок погрешности в нормах $\|\cdot\|_{k, \Omega_h}$, $k = 1, 2$ (напр., [21], [29], [30]). Оно основано на оценках аппроксимации (5.3), неравенстве (5.21) и оценке погрешности за счет сдвига границы. Если $\Omega = \Omega_h$, то $c \leq c_a$. Если для области Ω верны неравенства (5.2) и (5.21), то назовем Ω *регулярной*.

Теорема 5.1. Пусть выполнены условия квазиоднородности (2.3), (3.1), (3.3) и (5.1), матрица \mathbf{S}_1 удовлетворяет условиям леммы 4.2 и \mathbb{S}_h — триангуляция регулярной области Ω . Тогда для $m > 0$ имеем

$$\|\mathbf{T}g(m, m)\|_{1,1} \leq \begin{cases} \frac{3C_A}{4(4m+1)}, & \text{если } C_A \leq 2m + 1; \\ (1 - \frac{1}{C_A})^{2m}, & \text{если } C_A > 2m + 1. \end{cases} \quad (5.23)$$

Если для сглаживания используется полунитерационный метод Ричардсона (2.8), то для всех $m \geq 1$

$$\|\mathbf{T}g(m, m)\|_{1,1} \leq C_A / (m + 1)^2. \quad (5.24)$$

Постоянная $C_A = c^2 C_R^2 c_\beta \nu_0^2$ не зависит от h , и $c = c(\alpha^{(1)}, \alpha^{(I)}, \gamma)$.

Доказательство. Неравенство

$$\|\mathbf{B}_1^{1/2} (\mathbf{K}^{-1} - \mathbf{P} \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{P}^T) \mathbf{B}_1^{1/2}\|_{0,1} \leq C_A, \quad (5.25)$$

которое выражает свойство сильной аппроксимации, следует непосредственно из (5.22), определения нормы $\|\cdot\|_{0,1}$ и предположений о матрице сглаживания \mathbf{B}_1 . Оценки (5.23) и (5.24) являются прямым следствием (5.25) и известных результатов, касающихся двухуровневых методов [17], [19], [20] (см., напр., теорему 6.4.4 в [19]). \square

Оценки (5.23) и (5.24) справедливы также в случае, когда вместо интерполяции используется метод наименьших квадратов, в предположении, что (5.1) заменяется соответствующим условием устойчивости.

Теперь обратимся к алгоритму (2.9)–(2.11) и сначала сформулируем более строго предположения о триангуляциях \mathbb{S}_h . Пусть $\mathbf{x} = \chi(\mathbf{y}) \in (\mathcal{H}(\Omega_h))^3$ — отображение $\mathbb{S}_h \rightarrow \mathbb{S}_{h,P}$ и $\mathcal{H}_P(\Omega_{h,P})$ — пространство непрерывных на $\overline{\Omega}_{h,P}$ и линейных на каждом треугольнике $\tau_{r,P} = \chi(\tau_r)$ функций. Предположим, что для любой $v \in \mathcal{H}(\Omega_h)$ и функции $v_P \in \mathcal{H}_P(\Omega_{h,P})$, определяемой равенством $v_P(\chi(\mathbf{y})) = v(\mathbf{y})$, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} c_I \|v\|_{0,\Omega_h} &\leq \|v_P\|_{0,\Omega_{h,P}} \leq c_{II} \|v\|_{0,\Omega_h}, \\ c_I |v|_{1,\Omega_h} &\leq |v_P|_{1,\Omega_{h,P}} \leq c_{II} |v|_{1,\Omega_h} \end{aligned} \quad (5.26)$$

с постоянными, не зависящими от h . В частности, если \mathbb{S}_h и $\mathbb{S}_{h,P}$ — квазиоднородные триангуляции, то c_I и c_{II} зависят только от $\alpha^{(1)}$ и γ и аналогичных чисел для триангуляции $\mathbb{S}_{h,P}$.

Определение 5.1. Триангуляция \mathbb{S}_h называется *исправимой*, если отображение χ удовлетворяет (5.26) и $\mathbb{S}_{h,P}$ — триангуляция области $\Omega_{(P)}$, для которой задача Дирихле H^2 -регулярна.

Теорема 5.2. Пусть триангуляция \mathbb{S}_h исправима, двухуровневый алгоритм (2.9)–(2.11), в котором применяются сглаживания с чебышевскими итерационными параметрами и $m = \nu_0$, удовлетворяет предположениям теоремы 5.1 и решение системы грубого уровня выполняется за $\mathcal{O}(H^{-3k})$ арифметических операций, $1 \leq k \leq 3$. Тогда существует ν_0 , для которого вычислительная стоимость решения (2.5) с относительной погрешностью в норме $\|\cdot\|_{1,1}$, не превышающей ε , оценивается как $\mathcal{O}(n^{4k/(3k+1)} \log \varepsilon^{-1})$.

Доказательство. По условиям теоремы, теорема 5.1 справедлива для двухуровневой итерационной матрицы $\mathbf{T}g(m, m) = \mathbf{T}g(\mathbf{K}_P, m, m)$. Для $m = \nu_0$ соответствующая оценка (5.24) принимает вид

$$\|\mathbf{T}g(\mathbf{K}_P, \nu_0, \nu_0)\|_{1,1} \leq \tilde{C}_A, \quad (5.27)$$

где \tilde{C}_A не зависит от h и ν_0 . Для определенности полагаем $\tilde{\varepsilon} = 0.5$. Оценка (5.27) означает, что число $\mathcal{O}((\log \tilde{C}_A) \log \tilde{\varepsilon}^{-1}) = \mathcal{O}((\log \tilde{C}_A) \log 2)$ двухуровневых итераций будет гарантировать выполнение (2.10). Это число не зависит от h и ν_0 . То же самое справедливо и для числа итераций (2.11). Стоимость получения матрицы \mathbf{K}_P , соответствующей матрицы грубого уровня, а также матрицы продолжения и стоимость продолжения и ограничения равна $\mathcal{O}(n)$. Учитывая это, приходим к выводу, что общая вычислительная работа, которую обозначаем через Q , оценивается величиной

$$Q = \mathcal{O}(n\nu_0) + \mathcal{O}(n^k/\nu_0^{3k}).$$

Первый член отражает сглаживание на одной двухуровневой итерации, а второй — решение системы грубого уровня. Выбор $\nu_0 = n^{(k-1)/(3k+1)}$ завершает доказательство. \square

Предположим, что имеет место наихудший случай: для решения системы грубого уровня используется метод Холецкого, т. е. $3k = 7$. Тогда $Q \leq n^{1.17}$. Согласно теореме 5.1 такая же, как в теореме 5.2, оценка общей вычислительной работы, очевидно, будет справедлива для случая прямого применения двухуровневого метода, но при условии H^2 -регулярности. Таким образом, модификация (2.9)–(2.11) двухуровневого метода позволяет значительно ослабить ограничения на области, связанные с H^2 -регулярностью. При использовании более эффективного метода решения на грубом уровне оценка вычислительной работы улучшается.

Замечание 5.1. “Исправленные” триангуляции могут успешно применяться как в алгоритмах, аналогичных (2.9)–(2.11), так и в многоуровневых методах, в том числе классических многосеточных методах. Как и в рассмотренной ситуации, они позволяют обойти трудности, возникающие в связи со свойством сильной аппроксимации, если конфигурация исходной области не обеспечивает H^2 -регулярности.

Замечание 5.2. Для плоских эллиптических задач аналогичные асимптотические оценки вычислительной работы, необходимой для достижения заданной точности ε , были получены Ванеком и Крижковой [12] для метода сглаженной агрегации. Однако эти авторы измеряли погрешность в норме, порожденной матрицей A_L (обозначение работы [12]), которая получается после применения к матрице \mathbf{K} решаемой системы уравнений ν_0^2 сглаживаний, используемых для сглаживания оператора продолжения. Очевидно, что такая норма зависит от ν_0 и вырождается с ростом ν_0 .

Изложенные в работе результаты переносятся на методы конечных элементов повышенных порядков точности, в том числе и с криволинейными конечными элементами, рассмотренные, например, в [22], [21].

6. Численные результаты и обсуждение

Для проверки предложенного метода и сравнения схем обобщенной и простой агрегации с точки зрения числа итераций и времени CPU были проведены численные эксперименты для четырех задач линейной упругости.

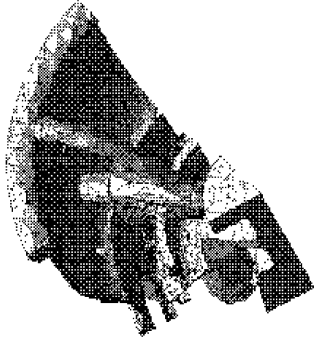


Рис. 2

Первая группа задач — это задачи о кубе, дискретизированном с помощью $16 \times 16 \times 16$, $24 \times 24 \times 24$ и $28 \times 28 \times 28$ кубических элементов с восемью узлами, имеющими соответственно 14739, 46875 и 73167 степеней свободы. Вторая задача, показанная на рис. 2, — это форма для отливки крыла, дискретизированная элементами-тетраэдрами, имеющими десять узлов каждый, с общим количеством степеней свободы, равным 158166. Третья задача, показанная на рис. 3, — это обшивка диффузора с воротами для заливки металла, дискретизированная элементами-тетраэдрами, имеющими по четыре узла. Общее количество степеней свободы равно 131529. В последнем численном примере рассматриваем конструкцию оболочки-каное из бетона (см. рис. 4), дискретизированную ANS элементами с восемью узлами. В последнем примере общее число степеней свободы равно 132486.

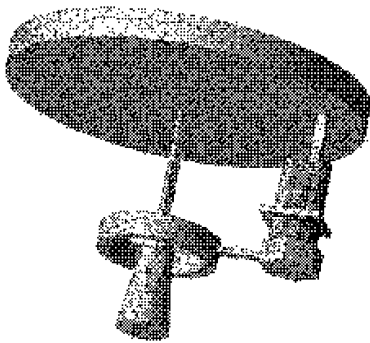


Рис. 3

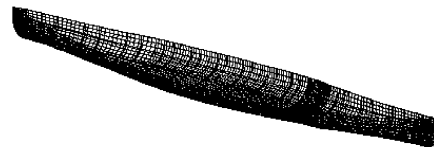


Рис. 4

Были проверены три подхода к построению операторов продолжения на основе агрегации. Они различались координатными функциями на агрегатах: (i) собственные функции агрегатов при граничных условиях Неймана на их границах (в таблице — GAM-Eigen) [15], [16], (ii) линейные поля (GAM-Linear), (iii) перемещения как твердого тела. Для всех тестовых задач сглаживание проводилось с использованием предобуславливания посредством неполной факторизации по Холецкому, а система уравнений на грубой сетке решалась многофронтальным методом с упорядочиванием методом наименьшей степени. Во всех случаях допустимая погрешность невязки была равна 10^{-7} и вычислялась в сеточной норме L_2 , нормализованной по отношению к

сеточной норме L_2 правой части. В качестве нагрузки использовалось равномерно распределенное давление.

В таблице сравниваются различные методы решения с точки зрения количества итераций и времени CPU в секундах для всех рассмотренных тестовых задач. Оптимизация параметра разрежения сетки производилась экспериментально, в итоге число неизвестных сокращалось на грубом уровне в 50–90 раз. На основе первой группы задач можно сделать следующие выводы: (i) скорости сходимости двух версий метода обобщенной агрегации не зависят от размера задачи; (ii) на каждом цикле метода обобщенной агрегации для линейных задач (GAM-Linear) величина погрешности снижается более, чем на порядок; (iii) в большинстве рассмотренных численных примеров даже скорость сходимости метода простой агрегации слабо зависит от размера задачи.

Можно увидеть, что для задач большого масштаба на неструктурированных сетках (отливочная форма для диффузора и каное) иногда выгодно строить грубую модель на основе локального анализа собственных значений. Для трех случаев неструктурированных сеток метод простой агрегации не сошелся после 1000 итераций. Для всех четырех тестовых задач метод обобщенной агрегации превосходил многофронтальный метод в 1.4–16 раз.

Таблица. Сравнение методов решения

Задача	Уравнение	GAM-Eigen		GAM-Linear		Простая агрег.		Direct CPU
		Итерац.	CPU	Итерац.	CPU	Итерац.	CPU	
Куб 16^3	14739	12	75	5	64	30	115	320
Куб 24^3	46785	12	360	5	375	39	479	2990
Куб 28^3	73167	12	1004	5	1619	46	1002	16210
Отливка	158166	49	752	97	1757	>1000	NA	1012
Диффузор	75717	17	116	17	182	671	5771	327
Каное	132486	32	497	192	2572	>1000	NA	522

Литература

1. Федоренко Р.П. *О скорости сходимости одного итерационного процесса* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1964. – Т. 4. – № 3. – С. 559–564.
2. Федоренко Р.П. *Релаксационный метод решения разностных эллиптических уравнений* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1961. – Т. 1. – № 5. – С. 922–972.
3. Бахвалов Н.С. *О сходимости одного релаксационного метода при естественных ограничениях на эллиптический оператор* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1966. – Т. 6. – № 5. – С. 861–883.
4. Brandt A., McCormick S.E., Ruge J.W. *Algebraic multigrid (AMG) for sparse matrix equations* // Sparsity and its Appl. Cambridge: Cambridge Univ. Press. – 1984.
5. Ruge J., Stuben K. *Algebraic multigrid* // Frontiers in Appl. Math. Philadelphia. – 1987. – V. 5. – P. 73–130.
6. Lallemand M.-H., Steve H., Dervieux A. *Unstructured multigriding by volume agglomeration: Current status* // Computer and Fluids. – 1992. – V. 21. – P. 343–397.
7. Lonsdale R.D. *An algebraic multigrid solver for the Navier–Stokes equations on unstructured meshes* // Int. J. Num. Meth. Heat Fluid Flow. – 1993. – V. 3. – P. 3–14.
8. Koobus B., Lallemand M.-H., Dervieux A. *Unstructured volume-agglomeration MG: Solution of Poisson equation* // Int. J. Numer. Meth. Fluids. – 1994. – V. 1. – P. 27–42.
9. Bulgakov V.E. *Multilevel iterative technique and aggregation concept with semi-analytical preconditioning for solving boundary value problems* // Commun. Numer. Methods Eng. – 1993. – P. 649–657.
10. Bulgakov V.E., Kuhn G. *High-performance multilevel iterative aggregation solver for large finite-element structural analysis problems* // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1995. – V. 38. – P. 3529–3544.
11. Vanek P. *Acceleration of convergence of a two-level algorithm by smoothing transfer operator* // Appl. in Math. – 1992. – V. 37. – P. 265–274.

12. Vanek P., Krizkova J. *Two-level methods on unstructured meshes with the convergence rate independent of the coarse-space size* // Internal report, University of Colorado at Denver, 1995. – P. 1–15.
13. Vanek P., Mandel J., Brezina M. *Algebraic multigrid by smoothed aggregation for second and fourth order elliptic problems* // Seventh Copper Mountain Conference on Multigrid Methods, NASA Conference Publication 3339, September 1996, Ed. N. Duane Melson, Tom A. Manteuffel, Steve F. McCormick, Craig C. Douglas. – P. 721–736.
14. Vanek P., Brezina M., Mandel J. *Convergence Analysis of Algebraic Multigrid Based on Smoothed Aggregation* // UCD/CCM Report №126, University of Colorado at Denver, February 1998. – P. 1–14.
15. Fish J., Belsky V. *Generalized aggregation multilevel solver* // Int. J. Numer. Meth. Eng. Comp. – 1997. – V. 40. – P. 4341–4361.
16. Fish J., Suvorov A., Belsky V. *Automated adaptive multilevel solver* // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1997. – V. 149. – P. 267–287.
17. Bramble J.H. *Multigrid Methods* // Pitman Research Notes in Math. Sci. Longman Sci. & Tech., Harlow, Essex, 1993. – V. 294. – P. 1–161.
18. Bramble J.H., Pasciak J.E., Wang J., Xu I. *Convergence estimates for multigrid algorithms without regularity assumptions* // Math. Comp. – 1991. – V. 57. – P. 23–45.
19. Hackbusch W. *Multigrid Methods and Applications*. – Berlin: Springer-Verlag, 1985. – XIV. – 380 p.
20. Шайдунов В.В. *Многосеточные методы конечных элементов*. – М.: Наука, 1995. – 287 с.
21. Корнеев В.Г. *Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности*. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1977. – 205 с.
22. Корнеев В.Г. *Итерационные методы решения систем алгебраических уравнений метода конечных элементов* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1977. – Т. 17. – № 5. – С. 1213–1233.
23. Adams R.A. *Sobolev Spaces*. – New York: Academic Press, 1975. – 268 p.
24. Ладыженская О.А., Уралцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*. – М.: Наука, 1964. – 538 с.
25. Nečas J. *Les Methodes Directes un Theorie des Equations Elliptiques*. – Paris: Masson, 1967. – 345 p.
26. Демьянович Ю.К. *Об оценках скорости сходимости некоторых проекционных методов решения эллиптических уравнений* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1968. – Т. 8. – № 1. – С. 79–96.
27. Головкин К.К. *Об аппроксимации функций в произвольных нормах* // Тр. матем. ин-та АН СССР. – 1964. – Т. 70. – С. 26–37.
28. Bramble J.H., Hilbert S.R. *Bounds for a class of linear functionals with application to Hermite interpolation* // Numer. Math. – 1971. – V. 16. – P. 363–369.
29. Babuska I., Aziz A.K. *Survey lectures on the mathematical foundations of the finite element method* // The mathematical foundation of the finite element method with applications to particle differential equations. – New York: Academic Press, 1972. – P. 3–363.
30. Сьярле Ф. *Метод конечных элементов для эллиптических уравнений*. – М.: Мир, 1980. – 521 с.
31. Kadlec J. *O reguljarnosti resenijsa zadaci Puassona na oblasti s granicej, lokal'noi podobnoj granice vypukloj oblasti (on the regularity of the solution of the Poisson equation on a domain with the boundary locally similar to the boundary of a convex domain)* // Czechoslovak Math. J. – 1964. – V. 14. – P. 386–393.

Санкт-Петербургский государственный университет
Ренсселайский политехнический институт
(г. Трой, США)

Поступила
08.06.2000