Известия вузов. Математика
2012, № 12, с. 16–29

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

В.С. БОЛОДУРИН

О ПРОЕКТИВНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ТОЧЕЧНЫХ СООТВЕТСТВИЙ МЕЖДУ ТРЕМЯ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЯМИ

Аннотация. Точечные соответствия между тремя гиперповерхностями проективных пространств изучаются на основе инвариантных методов Г.Ф. Лаптева [1] (Тр. Моск. матем. о-ва, 1953, **2**, 275–382). Определены основные уравнения и геометрические объекты соответствий. Найдены инвариантные нормализации гиперповерхностей, основные тензоры соответствия, указана связь изучаемых соответствий с теорией многомерных три-тканей.

Ключевые слова: гиперповерхность, точечное соответствие, инвариантная нормализация, многомерные три-ткани.

УДК: 514.757

1. *Основные уравнения. Фундаментальные геометрические объекты соответствия.* Рассмотрим три n-мерные гиперповерхности $\underset{\xi}{V}_n$ $(\xi, \eta, \theta = 1, 2, 3)$ проективных пространств. Пусть $C : \underset{1}{V}_n \times \underset{2}{V}_n \to \underset{3}{V}_n$ — точечное соответствие между гиперповерхностями. Обозначим через $\underset{\xi}{M}_0$ соответствующие точки гиперповерхностей $\underset{\xi}{V}_n$. Соответствие $C : \underset{1}{V}_n \times \underset{2}{V}_n \to \underset{3}{V}_n$ порождает шесть семейств точечных отображений $\underset{\xi\eta}{T} : \underset{\xi}{V}_n \to \underset{\eta}{V}_n$, возникающих при фиксации точек $\underset{\xi}{M}_0$ на гиперповерхностях, где $\theta \neq \xi, \eta$. Будем предполагать, что отображения $\underset{\xi\eta}{T} : \underset{\xi}{V}_n \to \underset{\eta}{V}_n$ регулярны и обратимы на парах гиперповерхностей $\underset{\xi}{V}_n$, $\underset{\eta}{V}_n$ при фиксации точек гиперповерхности $\underset{\theta}{V}_n$.

При исследовании точечных соответствий между тремя поверхностями возможны две точки зрения. Первая предполагает, что поверхности, между которыми установлено точечное соответствие, принадлежат одному пространству. Геометрия этой тройки поверхностей изучается по отношению к группе проективных преобразований, действующей на тройку поверхностей как на единое целое.

Эта точка зрения использована в работе [2], где рассмотрены три гиперповерхности проективного пространства, соответствие между точками которых установлено с помощью прямых этого пространства. Показана тесная связь такого соответствия с три-тканью, поверхностями которой служат связки прямых с центрами в точках рассматриваемых гиперповерхостей.

В данной работе будем предполагать, что поверхности не являются жестко связанными, и будем считать их расположенными в разных проективных пространствах $\underset{\xi}{P}_{n+1}$. Это предположение позволяет изучать геометрию трех гиперповерхностей, между точками которых установлено точечное соответствие, по отношению к более широкой группе преобразований.

Поступила 27.10.2011

Такая группа образована прямым произведением проективных групп преобразований трех пространств, в которых расположены гиперповерхности.

С каждой точкой $\underset{\xi}{M}_0$ гиперповерхности $\underset{\xi}{V}_n$ свяжем проективный репер, состоящий из точки $\underset{\xi}{M}_0$, точек $\underset{\xi}{M}_i$ $(i, j, k, \ldots = 1, 2, \ldots, n)$ в касательной гиперплоскости к гиперповерхности $\underset{\xi}{V}_n$ в точке $\underset{\xi}{M}_0$ и точки $\underset{\xi}{M}_{n+1}$ вне касательной гиперплоскости. Принято прямую $[\underset{\xi}{M}_0 \underset{\xi}{M}_n]$, проходящую через точку $\underset{\xi}{M}_0$ и не лежащую в касательной плоскости к гиперповерхности в этой точке, называть нормалью первого рода гиперповерхности ([3], с. 224). Нормалью второго рода гиперповерхности в точке $\underset{\xi}{M}_0$ называют $(n-2)$-мерную плоскость, принадлежащую касательной гиперплоскости в точке $\underset{\xi}{M}_0$ и не проходящую через эту точку.

Инфинитезимальные перемещения реперов $\left\{\underset{\xi}{M}_0, \underset{\xi}{M}_i, \underset{\xi}{M}_{n+1}\right\}$ определяются уравнениями

$$d\underset{\xi}{M}_u = \underset{\xi}{\omega}{}_u^v \underset{\xi}{M}_v, \tag{1}$$

где $u, v, w = 0, 1, \ldots, n+1$. Здесь $\underset{\xi}{\omega}{}_u^v$ — формы Пфаффа, удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства

$$d\underset{\xi}{\omega}{}_u^v = \underset{\xi}{\omega}{}_u^w \wedge \underset{\xi}{\omega}{}_w^v.$$

Уравнения гиперповерхностей $\underset{\xi}{V}_n$ запишутся в виде

$$\underset{1}{\omega}{}_0^{n+1} = 0, \underset{2}{\omega}{}_0^{n+1} = 0, \underset{3}{\omega}{}_0^{n+1} = 0. \tag{2}$$

Формы Пфаффа $\underset{\xi}{\omega}{}_0^i$ определяют перемещения соответствующих точек $\underset{\xi}{M}_0$ гиперповерхностей $\underset{\xi}{V}_n$ соответствия, поэтому они должны быть связаны между собой линейными соотношениями. Преобразуя реперы в точках $\underset{\xi}{M}_0$, можем привести эти соотношения к простейшему виду

$$\underset{1}{\omega}{}_0^i + \underset{2}{\omega}{}_0^i + \underset{3}{\omega}{}_0^i = 0. \tag{3}$$

Геометрически это означает, что реперы в точках $\underset{\xi}{M}_0$ пространств $\underset{\xi}{P}_{n+1}$ выбраны так, что направления в точках $\underset{\xi}{M}_0$, $\underset{\eta}{M}_0$ являются соответствующими при отображениях $\underset{\xi\eta}{T}$.

Фиксируя точку $\underset{\theta}{M}_0$, где $\theta \neq \xi, \eta$, из уравнения (3) получаем уравнения отображения $\underset{\xi\eta}{T} : \underset{\xi}{V}_n \to \underset{\eta}{V}_n$

$$\underset{\xi}{\omega}{}_0^{n+1} = 0, \quad \underset{\eta}{\omega}{}_0^{n+1} = 0, \quad \underset{\xi}{\omega}{}_0^i + \underset{\eta}{\omega}{}_0^i = 0. \tag{4}$$

Введем коллинеацию $\underset{\xi\eta}{K}$, положив

$$\underset{\xi\eta}{K}\underset{\xi}{M}_0 = \underset{\eta}{M}_0, \quad \underset{\xi\eta}{K}\underset{\xi}{M}_i = -\underset{\eta}{M}_i, \quad \underset{\xi\eta}{K}\underset{\xi}{M}_{n+1} = \underset{\eta}{M}_{n+1}.$$

Для этой коллинеации в силу уравнений (1), (4) выполняются соотношения

$$\underset{\xi\eta}{K} d\underset{\xi}{M}_0 = d\underset{\eta}{M}_0 + \underset{\xi}{\theta}_1 \underset{\eta}{M}_0,$$

где $\underset{\xi}{\theta}_1$ — величина первого порядка малости по отношению к $\underset{\xi}{\omega}{}^v_u$. Коллинеация $\underset{\xi\eta}{K}$ имеет касание первого порядка с отображением $\underset{\xi\eta}{T}_0 : \underset{\xi}{V}_n \to \underset{\eta}{V}_n$ в паре соответствующих точек $\underset{\xi}{M}_0$, $\underset{\eta}{M}_0$.

Уравнения (2), (3) являются основными уравнениями нашей задачи; с помощью внешнего дифференцирования и продолжения их получим последовательность геометрических объектов, определяющих свойства гиперповерхностей, находящихся в изучаемом соответствии.

Множество параметров, от которых зависят реперы рассматриваемых гиперповерхностей $\underset{\xi}{V}_n$, разбивается на подмножества главных и вторичных параметров. Главные параметры определяют положение точек $\underset{\xi}{M}_0$ на гиперповерхностях $\underset{\xi}{V}_n$. Их число равно $2n$. Формы $\underset{1}{\omega}{}^i_0$, $\underset{2}{\omega}{}^i_0$ являются независимыми линейными комбинациями $2n$ дифференциалов главных параметров.

Формы Пфаффа $\underset{\xi}{\omega}{}^v_u$ зависят линейно не только от дифференциалов главных параметров, но и от дифференциалов вторичных параметров, определяющих допустимые преобразования реперов гиперповерхностей в точках $\underset{\xi}{M}_0$. Значения форм $\underset{\xi}{\omega}{}^v_u$ при закрепленных главных параметрах обозначим через $\underset{\xi}{\pi}{}^v_u = \underset{\xi}{\omega}{}^v_u(\delta)$. Символ δ будем в дальнейшем использовать для дифференцирования по вторичным параметрам.

Продифференцируем уравнения (2), (3) внешним образом и раскроем полученные квадратичные уравнения по лемме Картана. Положив $\underset{\xi}{\theta}{}^i_j = \underset{\xi}{\omega}{}^i_j - \delta^j_i \underset{\xi}{\omega}{}^0_0$, получим продолжение основных уравнений соответствия $C : \underset{1}{V}_n \times \underset{2}{V}_n \to \underset{3}{V}_n$

$$\begin{gathered}\underset{1}{\omega}{}^{n+1}_i = \underset{1}{\lambda}_{ij}\underset{1}{\omega}{}^j_0, \quad \underset{2}{\omega}{}^{n+1}_i = \underset{2}{\lambda}_{ij}\underset{2}{\omega}{}^j_0, \quad \underset{3}{\omega}{}^{n+1}_i = \underset{3}{\lambda}_{ij}\underset{3}{\omega}{}^j_0, \quad \underset{1}{\omega}{}^i_0 + \underset{2}{\omega}{}^i_0 + \underset{3}{\omega}{}^i_0 = 0,\\ \underset{1}{\theta}{}^i_j - \underset{3}{\theta}{}^i_j = \underset{2}{\lambda}{}^i_{jk}\underset{1}{\omega}{}^k_0 + \mu^i_{jk}\underset{2}{\omega}{}^k_0, \quad \underset{2}{\theta}{}^i_j - \underset{3}{\theta}{}^i_j = \mu^i_{kj}\underset{1}{\omega}{}^k_0 + \underset{1}{\lambda}{}^i_{jk}\underset{2}{\omega}{}^k_0;\end{gathered} \tag{5}$$

здесь величины $\underset{\xi}{\lambda}_{ij}$, $\underset{1}{\lambda}{}^i_{jk}$, $\underset{2}{\lambda}{}^i_{jk}$ симметричны по нижним индексам.

Уравнения отображений $\underset{\xi\eta}{T} : \underset{\xi}{V}_n \to \underset{\eta}{V}_n$ после продолжения основных уравнений примут вид

$$\underset{\xi}{\omega}{}^{n+1}_i = \underset{\xi}{\lambda}_{ij}\underset{\xi}{\omega}{}^j_0, \quad \underset{\eta}{\omega}{}^{n+1}_1 = \underset{\eta}{\lambda}_{ij}\underset{\eta}{\omega}{}^j_0, \quad \underset{\xi}{\omega}{}^i_0 + \underset{\eta}{\omega}{}^i_0 = 0, \quad \underset{\xi}{\theta}{}^i_j - \underset{\eta}{\theta}{}^i_j = \underset{\theta}{\lambda}{}^i_{jk}\underset{\xi}{\omega}{}^k_0, \tag{6}$$

где $\underset{3}{\lambda}{}^i_{jk} = \underset{1}{\lambda}{}^i_{jk} + \underset{2}{\lambda}{}^i_{jk} - 2\mu^i_{(kj)}$.

Уравнения (5) позволяют ввести дополнительные формы

$$\omega^i_j = \underset{1}{\theta}{}^i_j - \big(\underset{2}{\lambda}{}^i_{jk} - \mu^i_{kj}\big)\underset{1}{\omega}{}^k_0 = \underset{2}{\theta}{}^i_j - \big(\underset{1}{\lambda}{}^i_{jk} - \mu^i_{jk}\big)\underset{2}{\omega}{}^k_0 = \underset{3}{\theta}{}^i_j + \mu^i_{kj}\underset{1}{\omega}{}^k_0 + \mu^i_{jk}\underset{2}{\omega}{}^k_0, \tag{7}$$

полезные в дальнейшем.

Продолжим далее уравнения (5). Для этого продифференцируем их внешним образом и раскроем квадратичные уравнения с помощью леммы Картана. В результате получим

$$\begin{gathered}\nabla_1 \underset{1}{\lambda}_{jk} = \underset{1}{\lambda}_{jk}\big(\underset{1}{\omega}{}^0_0 - \underset{1}{\omega}{}^{n+1}_{n+1}\big) + \underset{1}{\lambda}_{ijk}\underset{1}{\omega}{}^k_0, \quad \nabla_2 \underset{2}{\lambda}_{jk} = \underset{2}{\lambda}_{jk}\big(\underset{2}{\omega}{}^0_0 - \underset{2}{\omega}{}^{n+1}_{n+1}\big) + \underset{2}{\lambda}_{ijk}\underset{2}{\omega}{}^k_0,\\ \nabla_3 \underset{3}{\lambda}_{jk} = \underset{3}{\lambda}_{jk}\big(\underset{3}{\omega}{}^0_0 - \underset{3}{\omega}{}^{n+1}_{n+1}\big) + \underset{3}{\lambda}_{ijk}\underset{3}{\omega}{}^k_0,\\ \nabla \underset{2}{\lambda}{}^i_{jk} = 2\delta^i_{(k}\underset{1}{\omega}{}^0_{j)} - \underset{1}{\lambda}_{jk}\underset{1}{\omega}{}^i_{n+1} + 2\delta^i_{(k}\underset{3}{\omega}{}^0_{j)} - \underset{3}{\lambda}_{jk}\underset{3}{\omega}{}^i_{n+1} + \underset{2}{\lambda}{}^i_{jkl}\underset{1}{\omega}{}^l_0 + \overline{\underset{2}{\lambda}}{}^i_{jkl}\underset{2}{\omega}{}^l_0,\\ \nabla \underset{1}{\lambda}{}^i_{jk} = 2\delta^i_{(k}\underset{2}{\omega}{}^0_{j)} - \underset{2}{\lambda}_{jk}\underset{2}{\omega}{}^i_{n+1} + 2\delta^i_{(k}\underset{3}{\omega}{}^0_{j)} - \underset{3}{\lambda}_{jk}\underset{3}{\omega}{}^i_{n+1} + \underset{1}{\lambda}{}^i_{jkl}\underset{1}{\omega}{}^l_0 + \underset{1}{\lambda}{}^i_{jkl}\underset{2}{\omega}{}^l_0,\\ \nabla \mu^i_{jk} = 2\delta^i_{(k}\underset{3}{\omega}{}^0_{j)} - \underset{3}{\lambda}_{jk}\underset{3}{\omega}{}^i_{n+1} + \mu^i_{jkl}\underset{1}{\omega}{}^l_0 + \overline{\mu}^i_{jkl}\underset{2}{\omega}{}^l_0.\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь оператор ∇ определен с помощью форм ω^j_i так, что $\nabla t^i_{jk} = dt^i_{jk} - t^i_{lk}\omega^l_j - t^i_{jl}\omega^l_k + t^l_{jk}\omega^i_l$. Аналогично операторы ∇_ξ определены соответственно с помощью форм $\underset{\xi}{\theta}{}^i_j = \underset{\xi}{\omega}{}^i_j - \delta^i_j\underset{\xi}{\omega}{}^0_0$. Величины $\underset{\xi}{\lambda}_{ijk}$ симметричны по нижним индексам, для остальных величин правых частей уравнений (8) выполняется ряд дополнительных соотношений

$$\begin{gathered}\overline{\underset{2}{\lambda}}{}^i_{jkl} - \mu^i_{jlk} - \mu^t_{kj}\mu^i_{tl} + \mu^t_{jl}\mu^i_{kt} = 0, \quad \underset{2}{\lambda}{}^i_{[jk]l} = \overline{\underset{2}{\lambda}}{}^i_{[jk]l} = 0,\\ \overline{\underset{1}{\lambda}}{}^i_{jkl} - \overline{\mu}^i_{jlk} - \mu^t_{jk}\mu^i_{lt} + \mu^t_{lj}\mu^i_{tk} = 0, \quad \underset{1}{\lambda}{}^i_{[jk]l} = \overline{\underset{1}{\lambda}}{}^i_{[jk]l} = 0,\\ \underset{2}{\lambda}{}^i_{j[kl]} + \underset{2}{\lambda}{}^t_{j[k}\underset{2}{\lambda}{}^i_{|t|l]} - \underset{2}{\lambda}{}^i_{jt}\mu^t_{[kl]} + \underset{2}{\lambda}{}^t_{j[l}\mu^i_{k]t} + \underset{2}{\lambda}{}^i_{t[k}\mu^t_{l]j} = 0,\\ \underset{1}{\lambda}{}^i_{j[kl]} + \underset{1}{\lambda}{}^t_{j[k}\underset{1}{\lambda}{}^i_{|t|l]} + \underset{1}{\lambda}{}^i_{jt}\mu^t_{[kl]} + \underset{1}{\lambda}{}^t_{j[l}\mu^i_{|t|k]} + \underset{1}{\lambda}{}^i_{t[k}\mu^t_{|j|l]} = 0.\end{gathered}$$

Как обычно, квадратные скобки используются для обозначения операции альтернирования, а круглые скобки — для операции симметрирования.

Заметим,что из уравнений (7) следует

$$\omega^i_j(\delta) = \pi^i_j = \underset{\xi}{\pi}{}^i_j - \delta^i_j\underset{\xi}{\pi}{}^0_0,$$

поэтому значения операторов ∇, ∇_ξ при фиксированных главных параметрах совпадают. Обозначим общее значение этих операторов при фиксированных главных параметрах через ∇_δ. С помощью оператора ∇_δ уравнения, вытекающие из (8) при $\underset{1}{\omega}{}^i_0 = \underset{2}{\omega}{}^i_0 = 0$, запишутся в виде

$$\begin{gathered}\nabla_\delta \underset{\xi}{\lambda}_{jk} = \underset{\xi}{\lambda}_{jk}\big(\underset{\xi}{\pi}{}^0_0 - \underset{\xi}{\pi}{}^{n+1}_{n+1}\big),\\ \nabla_\delta \underset{2}{\lambda}{}^i_{jk} = 2\delta^i_{(k}\underset{1}{\pi}{}^0_{j)} - \underset{1}{\lambda}_{jk}\underset{1}{\pi}{}^i_{n+1} + 2\delta^i_{(k}\underset{3}{\pi}{}^0_{j)} - \underset{3}{\lambda}_{jk}\underset{3}{\pi}{}^i_{n+1},\\ \nabla_\delta \mu^i_{jk} = 2\delta^i_{(k}\underset{3}{\pi}{}^0_{j)} - \underset{3}{\lambda}_{jk}\underset{3}{\pi}{}^i_{n+1},\\ \nabla_\delta \underset{1}{\lambda}{}^i_{jk} = 2\delta^i_{(k}\underset{2}{\pi}{}^0_{j)} - \underset{2}{\lambda}_{jk}\underset{2}{\pi}{}^i_{n+1} + 2\delta^i_{(k}\underset{3}{\pi}{}^0_{j)} - \underset{3}{\lambda}_{jk}\underset{3}{\pi}{}^i_{n+1}.\end{gathered} \tag{9}$$

Из полученных уравнений следует, что величины $\underset{\xi}{\lambda}_{ij}$ образуют относительные тензоры веса два. Они являются асимптотическими тензорами гиперповерхностей $\underset{\xi}{V}_n$. Так как для величин $\mu^i_{[jk]}$ выполняется условие

$$\nabla_\delta \mu^i_{[jk]} = 0,$$

то они являются компонентами кососимметрического тензора второй дифференциальной окрестности. Обозначим этот тензор через α^i_{jk}.

Система величин $\underset{\xi}{\lambda}_{jk}$, $\underset{\xi}{\lambda}^{i}_{jk}$ определяет геометрический объект в смысле Г.Ф. Лаптева [1], который является фундаментальным геометрическим объектом второго порядка точечного соответствия C. Продолжив систему уравнений (5), получим систему дифференциальных уравнений последовательности фундаментальных геометрических объектов точечного соответствия

$$\underset{\xi}{\lambda}_{jk},\ \underset{\xi}{\lambda}^{i}_{jk},\ \underset{\xi}{\lambda}_{jkl}, \underset{1}{\lambda}^{i}_{jkl},\ \underset{1}{\overline{\lambda}}^{i}_{jkl},\ \underset{2}{\lambda}^{i}_{jkl},\ \underset{2}{\overline{\lambda}}^{i}_{jkl},\ \mu^{i}_{jkl},\ \overline{\mu}^{i}_{jkl}, \dots .$$

2. *Характеристические направления.* Рассмотрим отображение $\underset{\xi\eta}{T} : \underset{\xi}{V}_n \to \underset{\eta}{V}_n$. При выбранных реперах в соответственных точках на гиперповерхностях $\underset{\xi}{V}_n$, $\underset{\eta}{V}_n$ объект $\underset{\theta}{\lambda}^{i}_{jk}$ позволяет определить квадратичное преобразование касательных направлений

$$\underset{\xi}{\omega}^{i}_{0} \to \Omega_{\xi}{}^{i} = \underset{\theta}{\lambda}^{i}_{jk}\underset{\xi}{\omega}^{j}_{0}\underset{\xi}{\omega}^{k}_{0}.$$

Направления, инвариантные относительно таких квадратичных преобразований, в геометрии точечных соответствий называют характеристическими [4]. Они должны удовлетворять системе уравнений

$$\underset{\theta}{\lambda}^{i}_{jk}\underset{\xi}{\omega}^{j}_{0}\underset{\xi}{\omega}^{k}_{0} = \theta\underset{\xi}{\omega}^{i}_{0}. \tag{10}$$

Геодезической линией на гиперповерхности $\underset{\xi}{V}_n$, связанной с выбранным семейством нормалей первого рода, называют кривую, соприкасающаяся плоскость которой в каждой ее точке проходит через соответствующую нормаль первого рода (например, [3]). Условие, что некоторая кривая ℓ гиперповерхности имеет касание второго порядка с геодезической линией в точке $\underset{\xi}{M}_0$, заключается в совпадении их соприкасающихся плоскостей в этой точке, или аналитически в выполнении условия

$$\nabla_{\xi}\underset{\xi}{\omega}^{i} = \theta\underset{\xi}{\omega}^{i}.$$

Значения форм $\underset{\xi}{\omega}^{i}$ определяют направление, касательное к кривой ℓ.

Укажем геометрический смысл характеристических направлений точечных соответствий между гиперповерхностями. Он заключается в том, что всякая линия $\ell \in \underset{\xi}{V}_n$, имеющая касание второго порядка с геодезической линией, проходящей через точку $\underset{\xi}{M}_0 \in \underset{\xi}{V}_n$ по характеристическому направлению, переходит при точечном отображении $\underset{\xi\eta}{T} : \underset{\xi}{V}_n \to \underset{\eta}{V}_n$ в кривую $\underset{\xi\eta}{T}\big(\ell\big) \in \underset{\eta}{V}_n$, обладающую аналогичным свойством в точке $\underset{\eta}{M}_0 \in \underset{\eta}{V}_n$ относительно соответствующего характеристического направления. Это непосредственно следует из уравнений (6), (10) и соотношений

$$\nabla_{\xi}\underset{\xi}{\omega}^{i} + \nabla_{\eta}\underset{\eta}{\omega}^{i} = \underset{\theta}{\lambda}^{i}_{jk}\underset{\xi}{\omega}^{j}_{0}\underset{\xi}{\omega}^{k}_{0}.$$

Из геометрического смысла характеристических направлений вытекает, что они зависят от выбора нормалей первого рода в точках гиперповерхностей и инвариантны относительно расположения нормалей второго рода. Система уравнений (10) может быть переписана в виде

$$\underset{\xi}{\omega}^{[l}_{0}\underset{\eta}{\lambda}^{i]}_{jk}\underset{\xi}{\omega}^{j}_{0}\underset{\xi}{\omega}^{k}_{0} = 0.$$

Геометрически это означает, что характеристические направления являются общими образующими кубических гиперконусов, определяемых уравнениями системы.

Допустим, что при некотором выборе нормалей первого рода на гиперповерхностях $\underset{\xi}{V}_n$ любое направление $\underset{\xi}{\omega}{}^i_0$ в точке $\underset{\xi}{M}_0$ является характеристическим относительно отображений $\underset{\xi\eta}{T} : \underset{\xi}{V}_n \to \underset{\eta}{V}_n$. Тогда предыдущие уравнения должны удовлетворяться тождественно для любых значений $\underset{\xi}{\omega}{}^i_0$. Следовательно, для таких соответствий верны условия

$$\underset{\xi}{\delta}{}^{[i}_{(m}\underset{\eta}{\lambda}{}^{i]}_{jk)} = 0,$$

которые равносильны следующим соотношениям:

$$\underset{1}{\lambda}{}^i_{jk} = \frac{1}{n+1}\big(\delta^i_j\underset{1}{\lambda}{}^l_{lk} + \delta^i_k\underset{1}{\lambda}{}^l_{lj}\big), \quad \underset{2}{\lambda}{}^i_{jk} = \frac{1}{n+1}\big(\delta^i_j\underset{2}{\lambda}{}^l_{lk} + \delta^i_k\underset{2}{\lambda}{}^l_{lj}\big),$$
$$\mu^i_{(jk)} = \frac{1}{n+1}\big(\delta^i_j\mu^l_{(lk)} + \delta^i_k\mu^l_{(lj)}\big). \tag{11}$$

Теорема 1. *Если при любом выборе нормалей первого рода на гиперповерхностях $\underset{\xi}{V}_n$, находящихся в точечном соответствии $C : \underset{1}{V}_n \times \underset{2}{V}_n \to \underset{3}{V}_n$, любое направление $\underset{\xi}{\omega}{}^i_0$ является характеристическим, то при $n > 1$ гиперповерхности $\underset{\xi}{V}_n$ вырождаются в гиперплоскости, а само соответствие становится гомографией Годо.*

Действительно, пусть в соответствующих точках $\underset{\xi}{M}_0$ всех трех гиперповерхностей $\underset{\xi}{V}_n$ относительно выбранных нормалей первого рода $\big[\underset{\xi}{M}_0\underset{\xi}{M}_{n+1}\big]$ выполняются условия теоремы, тогда верны соотношения (11). Преобразуем нормали первого рода на гиперповерхностях $\underset{\xi}{V}_n$, положив $\underset{\xi}{M}'_{n+1} = \underset{\xi}{t}{}^i\underset{\xi}{M}_i + \underset{\xi}{M}_{n+1}$, где величины $\underset{\xi}{t}{}^i$ произвольны. Значения величин $\underset{1}{\lambda}{}^i_{jk}$, $\underset{2}{\lambda}{}^i_{jk}$, $\mu^i_{(jk)}$ для новых реперов $\big\{\underset{\xi}{M}_0, \underset{\xi}{M}_i, \underset{\xi}{M}'_{n+1}\big\}$ гиперповерхностей соответствия обозначим через $\underset{1}{\lambda}{}'^i_{jk}$, $\underset{2}{\lambda}{}'^i_{jk}$, $\mu'^i_{(jk)}$. Тогда вычисления показывают, что

$$\underset{2}{\lambda}{}'^i_{jk} = \underset{2}{\lambda}{}^i_{jk} - \underset{1}{\lambda}_{jk}\underset{1}{t}{}^i - \underset{3}{\lambda}_{jk}\underset{3}{t}{}^i, \quad \underset{1}{\lambda}{}'^i_{jk} = \underset{1}{\lambda}{}^i_{jk} - \underset{2}{\lambda}_{jk}\underset{2}{t}{}^i - \underset{3}{\lambda}_{jk}\underset{3}{t}{}^i,$$
$$\mu'^i_{(jk)} = \mu^i_{(jk)} - \underset{3}{\lambda}_{jk}\underset{3}{t}{}^i.$$

Поскольку для любых нормалей первого рода на гиперповерхностях $\underset{\xi}{V}_n$ любое направление $\underset{\xi}{\omega}{}^i_0$ является характеристическим, то для величин $\underset{1}{\lambda}{}'^i_{jk}$, $\underset{2}{\lambda}{}'^i_{jk}$, $\mu'^i_{(jk)}$ должны также выполняться соотношения вида (11). После проведения необходимых вычислений и учета произвола при выборе величин $\underset{\xi}{t}{}^i$ при $n > 1$ имеем $\underset{\xi}{\lambda}_{jk} = 0$. Следовательно, гиперповерхности $\underset{\xi}{V}_n$ вырождаются в гиперплоскости.

Точечное соответствие между тремя гиперповерхностями $(n+1)$-мерных проективных пространств переходит в точечное соответствие между тремя n-мерными проективными гиперплоскостями. В работе [5] показано, что если для величин $\underset{1}{\lambda}{}^i_{jk}$, $\underset{2}{\lambda}{}^i_{jk}$, $\mu^i_{(jk)}$, характеризующих точечные соответствия между тремя проективными пространствами, выполняются соотношения вида (11), то точечные отображения $\underset{\xi\eta}{T}$ вырождаются в проективные точечные отображения. Соответствия такого типа между тремя проективными пространствами называются гомографиями Годо.

3. *Инвариантная нормализация гиперповерхностей.*

Инвариантное оснащение гиперповерхности $\underset{\xi}{V}_n$ проективного пространства состоит в присоединении к каждой точке $\underset{\xi}{M}_0 \in \underset{\xi}{V}_n$ (на инвариантной нормали первого рода) инвариантной точки на нормали первого рода и инвариантной нормали второго рода в виде $(n-2)$-мерной плоскости, принадлежащей касательной гиперплоскости в точке $\underset{\xi}{M}_0$ и не проходящей через эту точку [3].

Задача полного проективно-инвариантного оснащения гиперповерхностей [6] соответствия сводится к построению с помощью последовательности фундаментальных объектов соответствия $C : \underset{1}{V}_n \times \underset{2}{V}_n \to \underset{3}{V}_n$ геометрических объектов, удовлетворяющих уравнениям

для нормали первого рода

$$\nabla_\delta \underset{\xi}{y}^i = -\underset{\xi}{y}^i\big(\underset{\xi}{\pi}{}^0_0 - \underset{\xi}{\pi}{}^{n+1}_{n+1}\big) - \underset{\xi}{\pi}{}^i_{n+1}, \tag{12}$$

для точки, лежащей на инвариантной нормали первого рода,

$$\delta \underset{\xi}{y} = -\underset{\xi}{y}\big(\underset{\xi}{\pi}{}^0_0 - \underset{\xi}{\pi}{}^{n+1}_{n+1}\big) - \underset{\xi}{\pi}{}^0_{n+1}, \tag{13}$$

для нормали второго рода

$$\nabla_\delta \underset{\xi}{y}_i = -\underset{\xi}{\pi}{}^0_i. \tag{14}$$

Ниже будем предполагать, что гиперповерхности $\underset{\xi}{V}_n$ тангенциально не вырождены. В силу этого $\det|\underset{\xi}{\lambda}_{ij}| \neq 0$. Следовательно, существуют тензоры $\underset{\xi}{\lambda}^{ij}$, симметричные по верхним индексам и удовлетворяющие условиям $\underset{\xi}{\lambda}^{ik}\underset{\xi}{\lambda}_{kj} = \delta^i_j$. В силу указанных условий и соотношений (9) для этих тензоров верны уравнения

$$\nabla_\delta \underset{\xi}{\lambda}^{ij} = -\underset{\xi}{\lambda}^{ij}\big(\underset{\xi}{\pi}{}^0_0 - \underset{\xi}{\pi}{}^{n+1}_{n+1}\big).$$

Из уравнений (9) имеем

$$\nabla_\delta\big(2\underset{3}{\lambda}^{ki}\mu^l_{(lk)}\big) = -2\underset{3}{\lambda}^{ki}\mu^l_{(lk)}\big(\underset{3}{\pi}{}^0_0 - \underset{3}{\pi}{}^{n+1}_{n+1}\big) + 2(n+1)\underset{3}{\lambda}^{ij}\underset{3}{\pi}{}^0_j - 2\underset{3}{\pi}{}^i_{n+1},$$

$$\nabla_\delta\big((n+1)\underset{3}{\lambda}^{jk}\mu^i_{(jk)}\big) = -(n+1)\underset{3}{\lambda}^{jk}\mu^i_{(jk)}\big(\underset{3}{\pi}{}^0_0 - \underset{3}{\pi}{}^{n+1}_{n+1}\big) + 2(n+1)\underset{3}{\lambda}^{ij}\underset{3}{\pi}{}^0_j - (n^2+n)\underset{3}{\pi}{}^i_{n+1}.$$

Замечаем, что при $n > 1$ для объекта

$$\underset{3}{x}^i = -\frac{1}{n^2+n-2}\big(2\underset{3}{\lambda}^{ki}\mu^l_{(lk)} - (n+1)\underset{3}{\lambda}^{jk}\mu^i_{(jk)}\big), \tag{15}$$

построенного на основе двух предыдущих равенств, выполняются уравнения

$$\nabla_\delta \underset{3}{x}^i = -\underset{3}{x}^i\big(\underset{3}{\pi}{}^0_0 - \underset{3}{\pi}{}^{n+i}_{n+1}\big) - \underset{3}{\pi}{}^i_{n+1}.$$

Следовательно, согласно уравнениям (12) этот объект является нормализующим объектом первого рода для гиперповерхности $\underset{3}{V}_n$.

Дальнейшие аналогичные вычисления показывают, что объекты

$$\underset{1}{x}^i = -\frac{1}{n^2+n-2}\big(2\underset{1}{\lambda}^{ki}\big(\underset{2}{\lambda}^l_{lk} - \mu^l_{(lk)}\big) - (n+1)\underset{1}{\lambda}^{jk}\big(\underset{2}{\lambda}^i_{jk} - \mu^i_{(jk)}\big)\big),$$

$$\underset{2}{x}^i = -\frac{1}{n^2+n-2}\big(2\underset{2}{\lambda}^{ki}\big(\underset{1}{\lambda}^l_{lk} - \mu^l_{(lk)}\big) - (n+1)\underset{2}{\lambda}^{jk}\big(\underset{1}{\lambda}^i_{jk} - \mu^i_{(jk)}\big)\big) \tag{15'}$$

являются нормализующими объектами первого рода для гиперповерхностей $\underset{1}{V}_n$, $\underset{2}{V}_n$ соответственно.

Для построения инвариантных оснащающих объектов второго рода используем вновь уравнения (9) и уравнения, которым удовлетворяют построенные объекты $\underset{\xi}{x}^i$. Проверка показывает, что величины

$$\underset{1}{x}_k = \frac{1}{n+1}\big(\underset{1}{\lambda}_{lk}\underset{1}{x}^l - \underset{2}{\lambda}^l_{lk} + \mu^l_{(lk)}\big), \quad \underset{2}{x}_k = \frac{1}{n+1}\big(\underset{2}{\lambda}_{lk}\underset{2}{x}^l - \underset{1}{\lambda}^l_{lk} + \mu^l_{(lk)}\big),$$
$$\underset{3}{x}_k = \frac{1}{n+1}\big(\underset{3}{\lambda}_{lk}\underset{3}{x}^l - \mu^l_{(lk)}\big) \tag{16}$$

удовлетворяют уравнениям (14) и являются оснащающими объектами второго рода для гиперповерхностей соответствия.

Итак, доказана

Теорема 2. *Точечное соответствие $C : \underset{1}{V}_n \times \underset{2}{V}_n \to \underset{3}{V}_n$ между тремя тангенциально невырожденными гиперповерхностями при $n > 1$ определяет инвариантную нормализацию первого и второго рода на всех трех гиперповерхностях $\underset{\xi}{V}_n$ во второй дифференциальной окрестности.*

Заметим,что из работы [7] следует, что точечное соответствие между двумя гиперповерхностями позволяет построить инвариантную нормализацию первого рода гиперповерхностей во второй дифференциальной окрестности. Однако инвариантная нормализация второго рода гиперповерхностей строится только в третьей дифференциальной окрестности.

4. *Основные тензоры соответствия.* Преобразуем реперы на всех гиперповерхностях $\underset{\xi}{V}_n$ так, чтобы нормали первого и второго рода на этих гиперповерхностях стали инвариантными. Для этого используем инвариантные нормализующие объекты (15), (15′), (16). Введем новые реперы $\{\underset{\xi}{N}_0, \underset{\xi}{N}_i, \underset{\xi}{N}_{n+1}\}$. Положим

$$\underset{\xi}{N}_0 = \underset{\xi}{M}_0, \quad \underset{\xi}{N}_i = \underset{\xi}{M}_i + \underset{\xi}{x}_i\underset{\xi}{M}_0, \quad \underset{\xi}{N}_{n+1} = \underset{\xi}{x}^i\underset{\xi}{M}_i + \underset{\xi}{M}_{n+1}.$$

Обозначим формы Пфаффа для новых реперов через $\underset{\xi}{\sigma}^u_v$. Уравнения, связывающие формы Пфаффа новых и старых реперов, будут иметь вид

$$\underset{\xi}{\sigma}^0_0 = \underset{\xi}{\omega}^0_0 - \underset{\xi}{x}_i\underset{\xi}{\omega}^i_0, \quad \underset{\xi}{\sigma}^i_0 = \underset{\xi}{\omega}^i_0, \quad \underset{\xi}{\sigma}^{n+1}_i = \underset{\xi}{\omega}^{n+1}_i,$$
$$\underset{\xi}{\sigma}^j_i = \underset{\xi}{\omega}^j_i + \underset{\xi}{x}_i\underset{\xi}{\omega}^j_0 - \underset{\xi}{\omega}^{n+1}_i\underset{\xi}{x}^j,$$
$$\underset{\xi}{\sigma}^i_{n+1} = \nabla_\xi\underset{\xi}{x}^i + \underset{\xi}{\omega}^i_{n+1} + \underset{\xi}{x}^i\big(\underset{\xi}{\omega}^0_0 - \underset{\xi}{\omega}^{n+1}_{n+1}\big) - \underset{\xi}{x}^i\underset{\xi}{x}^t\underset{\xi}{\omega}^{n+1}_t,$$
$$\underset{\xi}{\sigma}^0_i = \nabla_\xi\underset{\xi}{x}_i + \underset{\xi}{\omega}^0_i - \underset{\xi}{x}_i\underset{\xi}{x}_j\underset{\xi}{\omega}^j_0 + \underset{\xi}{x}_j\underset{\xi}{x}^j\underset{\xi}{\omega}^{n+1}_i.$$

В силу уравнений (12), (14) величины $\nabla_\xi\underset{\xi}{x}^i + \underset{\xi}{\omega}^i_{n+1} + \underset{\xi}{x}^i\big(\underset{\xi}{\omega}^0_0 - \underset{\xi}{\omega}^{n+1}_{n+1}\big)$, $\nabla_\xi\underset{\xi}{x}_i + \underset{\xi}{\omega}^0_i$ зависят только от дифференциалов главных параметров, поэтому формы $\underset{\xi}{\sigma}^0_i$ и $\underset{\xi}{\sigma}^i_{n+1}$ можно записать следующим образом:

$$\underset{\xi}{\sigma}^0_i = \underset{\xi}{a}_{ij}\underset{1}{\sigma}^j_0 + \underset{\xi}{b}_{ij}\underset{2}{\sigma}^j_0, \quad \underset{\xi}{\sigma}^i_{n+1} = \underset{\xi}{a}^i_j\underset{1}{\sigma}^j_0 + \underset{\xi}{b}^i_j\underset{2}{\sigma}^j_0. \tag{17}$$

В новых реперах уравнения соответствия (5) принимают вид

$$\begin{gathered}\underset{1}{\sigma}{}^{n+1}_{i} = \underset{1}{\lambda}_{ij}\underset{1}{\sigma}{}^{j}_{0}, \quad \underset{2}{\sigma}{}^{n+1}_{i} = \underset{2}{\lambda}_{ij}\underset{2}{\sigma}{}^{j}_{0}, \quad \underset{3}{\sigma}{}^{n+1}_{i} = \underset{3}{\lambda}_{ij}\underset{3}{\sigma}{}^{j}_{0},\\ \underset{1}{\sigma}{}^{i}_{0} + \underset{2}{\sigma}{}^{i}_{0} + \underset{3}{\sigma}{}^{i}_{0} = 0,\\ \underset{1}{\Sigma}{}^{i}_{j} - \underset{3}{\Sigma}{}^{i}_{j} = \underset{2}{a}{}^{i}_{jk}\underset{1}{\sigma}{}^{k}_{0} + m^{i}_{jk}\underset{2}{\sigma}{}^{k}_{0}, \quad \underset{2}{\Sigma}{}^{i}_{j} - \underset{3}{\Sigma}{}^{i}_{j} = m^{i}_{kj}\underset{1}{\sigma}{}^{k}_{0} + \underset{1}{a}{}^{i}_{jk}\underset{2}{\sigma}{}^{k}_{0},\end{gathered} \tag{18}$$

где $\underset{\xi}{\Sigma}{}^{i}_{j} = \underset{\xi}{\sigma}{}^{i}_{j} - \delta^{i}_{j}\underset{\xi}{\sigma}{}^{0}_{0}$ и

$$\begin{gathered}\underset{2}{a}{}^{i}_{jk} = \underset{2}{\lambda}{}^{i}_{jk} + 2\sigma^{i}_{(j}\underset{1}{x}_{k)} - \underset{1}{\lambda}_{jk}\underset{1}{x}{}^{i} + 2\sigma^{i}_{(j}\underset{3}{x}_{k)} - \underset{3}{\lambda}_{jk}\underset{3}{x}{}^{i},\\ \underset{1}{a}{}^{i}_{jk} = \underset{1}{\lambda}{}^{i}_{jk} + 2\sigma^{i}_{(j}\underset{2}{x}_{k)} - \underset{2}{\lambda}_{jk}\underset{2}{x}{}^{i} + 2\sigma^{i}_{(j}\underset{3}{x}_{k)} - \underset{3}{\lambda}_{jk}\underset{3}{x}{}^{i},\\ m^{i}_{jk} = \mu^{i}_{jk} + 2\sigma^{i}_{(j}\underset{3}{x}_{k)} - \underset{3}{\lambda}_{jk}\underset{3}{x}{}^{j}.\end{gathered} \tag{19}$$

Положим $\underset{3}{a}{}^{i}_{jk} = \underset{1}{a}{}^{i}_{jk} + \underset{2}{a}{}^{i}_{jk} - 2m^{i}_{(jk)}$. В силу уравнений (9), а также уравнений (12), (14), справедливых для объектов $\underset{\xi}{x}{}^{i}$, $\underset{\xi}{x}_{i}$, имеем равенства

$$\nabla_{\delta}\underset{1}{a}{}^{i}_{jk} = \nabla_{\delta}\underset{2}{a}{}^{i}_{jk} = \nabla_{\delta}\underset{3}{a}{}^{i}_{jk} = \nabla_{\delta}m^{i}_{(jk)} = 0,$$

из которых следует, что величины $\underset{1}{a}{}^{i}_{jk}$, $\underset{2}{a}{}^{i}_{jk}$, $\underset{3}{a}{}^{i}_{jk}$, $m^{i}_{(jk)}$ являются абсолютными тензорами. Они симметричны по нижним индексам и для них верны соотношения, являющиеся следствием выбора нормализующих объектов первого и второго рода в соответствующих точках гиперповерхностей,

$$\begin{gathered}\underset{1}{a}{}^{i}_{ik} = \underset{2}{a}{}^{i}_{ik} = \underset{3}{a}{}^{i}_{ik} = m^{i}_{(ik)} = 0,\\ \big(\underset{1}{a}{}^{i}_{jk} - m^{i}_{(jk)}\big)\underset{2}{\lambda}{}^{jk} = 0, \quad \big(\underset{2}{a}{}^{i}_{jk} - m^{i}_{(jk)}\big)\underset{1}{\lambda}{}^{jk} = 0, \quad m^{i}_{(jk)}\underset{3}{\lambda}{}^{jk} = 0.\end{gathered}$$

Будем называть эти тензоры в дальнейшем основными тензорами соответствия.

Уравнения отображений $\underset{\xi\eta}{T} : \underset{\xi}{V}_{n} \to \underset{\eta}{V}_{n}$ в новых реперах получаются из уравнений (18) при условии $\underset{\theta}{\sigma}{}^{i}_{0} = 0$ и записываются в виде

$$\begin{gathered}\underset{\xi}{\sigma}{}^{n+1}_{i} = \underset{\xi}{\lambda}_{ij}\underset{\xi}{\sigma}{}^{j}_{0}, \quad \underset{\eta}{\sigma}{}^{n+1}_{i} = \underset{\eta}{\lambda}_{ij}\underset{\eta}{\sigma}{}^{j}_{0}, \ \underset{\xi}{\sigma}{}^{i}_{0} + \underset{\eta}{\sigma}{}^{i}_{0} = 0,\\ \underset{\xi}{\Sigma}{}^{i}_{j} - \underset{\eta}{\Sigma}{}^{i}_{j} = \underset{\theta}{a}{}^{i}_{jk}\underset{\xi}{\sigma}{}^{k}_{0}.\end{gathered}$$

Тензоры $\underset{\theta}{a}{}^{i}_{jk}$ определяют квадратичные преобразования $\underset{\xi}{\sigma}{}^{i}_{0} \to \underset{\xi}{\sigma}{}^{i} = \underset{\theta}{a}{}^{i}_{jk}\underset{\xi}{\sigma}{}^{j}_{0}\underset{\xi}{\sigma}{}^{k}_{0}$, которые порождают инвариантные характеристические направления в соответствующих точках гиперповерхностей.

Выясним геометрический смысл обращения основных тензоров соответствия $\underset{\theta}{a}{}^{i}_{jk}$ в нуль. Назовем точечное соответствие $C : \underset{1}{V}_{n} \times \underset{2}{V}_{n} \to \underset{3}{V}_{n}$ геодезическим, если при некотором выборе нормалей первого рода в соответствующих точках $\underset{\xi}{M}_{0}$ гиперповерхностей $\underset{\xi}{V}_{n}$ любое касательное направление $\underset{\xi}{\sigma}{}^{i}_{0}$ становится характеристическим в этой точке относительно отображений $\underset{\xi\eta}{T} : \underset{\xi}{V}_{n} \to \underset{\eta}{V}_{n}$.

Справедлива

Теорема 3. *Точечное соответствие* $C : \underset{1}{V}_n \times \underset{2}{V}_n \to \underset{3}{V}_n$ *при* $n > 1$ *будет геодезическим тогда и только тогда, когда его основные тензоры* $\underset{\theta}{a}{}^i_{jk}$ *равны нулю.*

Действительно, пусть существуют три семейства нормалей первого рода на гиперповерхностях $\underset{\xi}{V}_n$ соответствия, относительно которых соответствие $C : \underset{1}{V}_n \times \underset{2}{V}_n \to \underset{3}{V}_n$ является геодезическим. Тогда должны выполняться соотношения (11).

При этих условиях, как следует из уравнений (15), (15′), нормализующие объекты первого рода гиперповерхностей $\underset{\xi}{x}{}^i = 0$. Внесем найденные значения $\underset{\xi}{x}{}^i = 0$ в соотношения (16), тогда получим значения нормализующих объектов второго рода гиперповерхностей

$$\underset{1}{x}_k = \frac{1}{n+1}\big(-\underset{2}{\lambda}{}^l_{lk} + \mu^l_{(lk)}\big), \quad \underset{2}{x}_k = \frac{1}{n+1}\big(-\underset{1}{\lambda}{}^l_{lk} + \mu^l_{(lk)}\big), \quad \underset{3}{x}_k = -\frac{1}{n+1}\mu^l_{(lk)}.$$

После подстановки найденных значений нормализующих объектов $\underset{\xi}{x}{}^i$, $\underset{\xi}{x}_k$ в формулы (19) и учета соотношений (11) получим

$$\underset{1}{a}{}^i_{jk} = \underset{2}{a}{}^i_{jk} = \underset{3}{a}{}^i_{jk} = m^i_{jk} = 0.$$

Обратно, если совершен переход на всех гиперповерхностях соответствия к инвариантным нормалям первого и второго рода и тензоры

$$\underset{1}{a}{}^i_{jk} = \underset{2}{a}{}^i_{jk} = \underset{3}{a}{}^i_{jk} = m^i_{jk} = 0,$$

то соотношения (11) справедливы. Поэтому в соответствующих точках $\underset{\xi}{M}_0$ гиперповерхностей $\underset{\xi}{V}_n$ любое касательное направление $\underset{\xi}{\sigma}{}^i_0$ становится характеристическим относительно инвариантных нормалей первого рода. Следовательно, точечное соответствие $C : \underset{1}{V}_n \times \underset{2}{V}_n \to \underset{3}{V}_n$ является геодезическим. □

5. *Полное проективно-инвариантное оснащение.* Продолжение уравнений (17) показывает, что для величин

$$\underset{1}{x} = -\frac{1}{n}\underset{1}{a}{}^i_i, \quad \underset{2}{x} = -\frac{1}{n}\underset{2}{b}{}^i_i, \quad \underset{3}{x} = \frac{1}{2n}\big(\underset{3}{a}{}^i_i + \underset{3}{b}{}^i_i\big) \tag{20}$$

выполняются уравнения (13), поэтому эти величины соответственно определяют инвариантные точки на инвариантных нормалях первого рода гиперповерхностей $\underset{\xi}{V}_n$.

Выясним геометрический смысл выбора точек. Вычисления проведем для гиперповерхности $\underset{1}{V}_n$. Совокупность нормалей первого рода гиперповерхности $\underset{1}{V}_n$ образует n-параметрическое семейство прямых — конгруэнцию прямых. Пусть точка $\underset{1}{F} = \underset{1}{y}\underset{1}{N}_0 + \underset{1}{N}_{n+1}$ есть фокус конгруэнции на прямой $\big[\underset{1}{N}_0\underset{1}{N}_{n+1}\big]$, тогда инфинитезимальное перемещение фокуса $\underset{1}{F}$ должно принадлежать прямой $\big[\underset{1}{N}_0\underset{1}{N}_{n+1}\big]$. Так как

$$d\underset{1}{F} = (\,\cdot\,)\underset{1}{N}_0 + (\,\cdot\,)\underset{1}{N}_{n+1} + \big(\underset{1}{y}\underset{1}{\sigma}{}^i_0 + \underset{1}{\sigma}{}^i_{n+1}\big)\underset{1}{N}_i,$$

то фокусы $\underset{1}{F}$ найдутся из условий

$$\underset{1}{y}\underset{1}{\sigma}{}^i_0 + \underset{1}{\sigma}{}^i_{n+1} = 0$$

или

$$\big(\underset{1}{y}\delta^i_j + \underset{1}{a}{}^i_j\big)\underset{1}{\sigma}{}^j_0 = 0.$$

Значения $\underset{1}{y}$, определяющие фокусы на прямой $\big[\underset{1}{N}_0\underset{1}{N}_{n+1}\big]$, получим, рассмотрев уравнение

$$|\underset{1}{y}\delta^i_j + \underset{1}{a}{}^i_j| = 0.$$

Сумма корней этого уравнения равна $\sum\limits_{i=1}^{n} \underset{1}{y}_i = -\underset{1}{a}{}^i_i$. На каждой прямой конгруэнции $\big[\underset{1}{N}_0\underset{1}{N}_{n+1}\big]$ относительно точки $\underset{1}{N}_0$ и n фокусов с помощью соотношения

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underset{1}{y}_i\underset{1}{N}_0 + \underset{1}{N}_{n+1} = -\frac{1}{n}\underset{1}{a}{}^i_i\underset{1}{N}_0 + \underset{1}{N}_{n+1} = \underset{1}{N}{}'_{n+1}$$

определится гармонический полюс [8].

Совместим далее вершины реперов $\underset{\xi}{N}_{n+1}$ с инвариантными точками $\underset{\xi}{N}{}'_{n+1} = \underset{\xi}{x}\underset{\xi}{N}_0 + \underset{\xi}{N}_{n+1}$, где величины $\underset{\xi}{x}$ задаются значениями (20). Остальные вершины реперов оставим без изменений. После этих преобразований величины $\underset{\xi}{a}_{ij}$, $\underset{\xi}{b}_{ij}$ становятся абсолютными тензорами, а величины $\underset{\xi}{a}{}^i_j$, $\underset{\xi}{b}{}^i_j$ — относительными тензорами соответствия, удовлетворяющими условиям

$$\underset{1}{a}{}^i_i = 0, \quad \underset{2}{b}{}^i_i = 0, \quad \underset{3}{a}{}^i_i + \underset{3}{b}{}^i_i = 0.$$

Формы $\underset{\xi}{\sigma}{}^0_{n+1}$ будут зависеть только от дифференциалов главных параметров, поэтому они могут быть записаны в виде $\underset{\xi}{\sigma}{}^0_{n+1} = \underset{\xi}{p}_i\underset{1}{\sigma}{}^i_0 + \underset{\xi}{q}_i\underset{2}{\sigma}{}^i_0$.

Итак, доказана

Теорема 4. *Точечное соответствие $C : \underset{1}{V}_n \times \underset{2}{V}_n \to \underset{3}{V}_n$ между гиперповерхностями проективных пространств при $n > 1$ определяет полное проективно-инвариантное оснащение гиперповерхностей в третьей дифференциальной окрестности.*

6. *Соответствие и многомерная три-ткань.* С алгебраической точки зрения точечное соответствие $C : \underset{1}{V}_n \times \underset{2}{V}_n \to \underset{3}{V}_n$ является локальной дифференцируемой квазигруппой. Три-ткань, отвечающая этой квазигруппе, строится следующим образом. Рассмотрим пространство декартовой композиции $\underset{1}{V}_n \times \underset{2}{V}_n \times \underset{3}{V}_n$. В этом пространстве соответствию C отвечает $2n$-мерное гладкое многообразие. Каждой гиперповерхности $\underset{\xi}{V}_n$ на многообразии отвечает расслоение коразмерности n. Совокупность всех расслоений коразмерности n образует на многообразии три-ткань.

Запишем уравнения структуры три-ткани, присоединенной к соответствию. Используем для этого значения форм ω^i_j, определенных соотношениями (7). Заметим прежде всего, что формы ω^i_j определяются соответствием и не зависят от выбора оснащения гиперповерхностей, так как инвариантны относительно замены нормалей первого и второго рода на $\underset{\xi}{V}_n$.

Внесем значения форм ω^i_j в уравнения структуры проективных пространств $\underset{\xi}{P}_{n+1}$, тогда получим

$$d\underset{1}{\omega}{}^i_0 = \underset{1}{\omega}{}^j_0 \wedge \omega^i_j + \alpha^i_{jk}\underset{1}{\omega}{}^j_0 \wedge \underset{1}{\omega}{}^k_0, \quad d\underset{2}{\omega}{}^i_0 = \underset{2}{\omega}{}^j_0 \wedge \omega^i_j - \alpha^i_{jk}\underset{2}{\omega}{}^j_0 \wedge \underset{2}{\omega}{}^k_0,$$
$$d\underset{3}{\omega}{}^i_0 = \underset{3}{\omega}{}^j_0 \wedge \omega^i_j - \alpha^i_{jk}\underset{3}{\omega}{}^j_0 \wedge \big(\underset{2}{\omega}{}^k_0 - \underset{1}{\omega}{}^k_0\big).$$

Полученные уравнения совместно с уравнениями (3) аналогичны уравнениям локальной теории многомерных три-тканей [9]. Формы ω^i_j определяют связность три-ткани, тензор α^i_{jk} является тензором кручения этой ткани.

Продифференцируем формы ω^i_j внешним образом. Получим

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + R^i_{jkl}\underset{1}{\omega}{}^k_0 \wedge \underset{2}{\omega}{}^l_0,$$

где $R^i_{jkl} = \underset{2}{\overline{\lambda}}{}^i_{jkl} - \overline{\mu}^i_{kjl} = \mu^i_{jlk} - \underset{1}{\overline{\lambda}}{}^i_{jlk}$. Совокупность величин R^i_{jkl} определяет тензор кривизны три-ткани.

Таким образом, *с точечным соответствием между тремя гиперповерхностями проективных пространств связывается многомерная три-ткань. Тензоры кручения и кривизны, аффинная связность этой три-ткани определяются второй и третьей дифференциальными окрестностями соответствия.*

Частным случаем многомерных три-тканей являются параллелизуемые три-ткани [9]. Они имеют нулевые тензоры кручения и кривизны. Точечные соответствия между тремя гиперповерхностями, присоединенная три-ткань которых является параллелизуемой, определяются уравнениями

$$\underset{1}{\omega}{}^n_i = \underset{1}{\lambda}_{ij}\underset{1}{\omega}{}^j_0, \quad \underset{2}{\omega}{}^n_i = \underset{2}{\lambda}_{ij}\underset{2}{\omega}{}^j_0, \quad \underset{3}{\omega}{}^n_i = \underset{3}{\lambda}_{ij}\underset{3}{\omega}{}^j_0,$$
$$\underset{1}{\omega}{}^i_0 + \underset{2}{\omega}{}^i_0 + \underset{3}{\omega}{}^i_0 = 0,$$
$$\omega^i_j = \underset{1}{\theta}{}^i_j - \big(\underset{2}{\lambda}{}^i_{jk} - \mu^i_{kj}\big)\underset{1}{\omega}{}^k_0 = \underset{2}{\theta}{}^i_j - \big(\underset{1}{\lambda}{}^i_{jk} - \mu^i_{jk}\big)\underset{2}{\omega}{}^k_0 = \underset{3}{\theta}{}^i_j + \mu^i_{kj}\underset{1}{\omega}{}^k_0 + \mu^i_{jk}\underset{2}{\omega}{}^k_0,$$
$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k.$$

Уравнения первой строки определяют гиперповерхности соответствия. Следующие уравнения определяют само соответствие. Дифференцируя эти уравнения внешним образом, получим систему квадратичных уравнений

$$\triangle\big(\underset{2}{\lambda}{}^i_{jk} - \mu^i_{kj}\big) \wedge \underset{1}{\omega}{}^k_0 = 0, \quad \triangle\big(\underset{1}{\lambda}{}^i_{jk} - \mu^i_{jk}\big) \wedge \underset{2}{\omega}{}^k_0 = 0, \quad \triangle\mu^i_{jk} \wedge \underset{3}{\omega}{}^k_0 = 0,$$

где формы Пфаффа $\triangle\big(\underset{2}{\lambda}{}^i_{jk} - \mu^i_{kj}\big)$, $\triangle\big(\underset{1}{\lambda}{}^i_{jk} - \mu^i_{jk}\big)$, $\triangle\mu^i_{jk}$ имеют вполне определенный вид. Исследование системы квадратичных уравнений на инволютивность [10] приводит к теореме.

Теорема 5. *Точечные соответствия между тремя тангенциально невырожденными гиперповерхностями, присоединенная три-ткань которых является параллелизуемой, существуют с произволом* $3n$ *функций от* n *переменных.*

7. *Случай* $n = 1$. Рассмотрим соответствие $C : \underset{1}{V}_1 \times \underset{2}{V}_1 \to \underset{3}{V}_1$ между тремя кривыми проективных плоскостей. На основе фундаментальных геометрических объектов второй дифференциальной окрестности соответствия при $n = 1$ нельзя построить оснащающие объекты первого и второго рода, удовлетворяющие уравнениям (12), (14). Необходимы объекты

третьей дифференциальной окрестности. Продолжив первые уравнения (8) и фиксировав главные параметры, получим

$$\nabla_\delta \underset{\xi}{\lambda}_{ijk} = \underset{\xi}{\lambda}_{ijk}\big(\underset{\xi}{\pi}{}^0_0 - \underset{\xi}{\pi}{}^{n+1}_{n+1}\big) + 3\underset{\xi}{\lambda}_{(ij}\underset{\xi}{\lambda}_{k)l}\underset{\xi}{\pi}{}^l_{n+1)} - 3\underset{\xi}{\lambda}_{(ij}\underset{\xi}{\pi}{}^0_{k)}.$$

Построим далее объекты

$$\begin{aligned}
&\underset{1}{x}{}^1 = -\big(\underset{2}{\lambda}{}^1_{11} - \mu_{11}{}^1 + \tfrac{2}{3}\underset{1}{\lambda}_{111}\underset{1}{\lambda}{}^{11}\big)\underset{1}{\lambda}{}^{11}, && \underset{2}{x}{}^1 = -\big(\underset{1}{\lambda}{}^1_{11} - \mu_{11}{}^1 + \tfrac{2}{3}\underset{2}{\lambda}_{111}\underset{2}{\lambda}{}^{11}\big)\underset{2}{\lambda}{}^{11},\\
&\underset{3}{x}{}^1 = -\big(\mu_{11}{}^1 + \tfrac{2}{3}\underset{3}{\lambda}_{111}\underset{3}{\lambda}{}^{11}\big)\underset{3}{\lambda}{}^{11}, && \underset{1}{x}_1 = -\big(\underset{2}{\lambda}{}^1_{11} - \mu_{11}{}^1 + \tfrac{1}{3}\underset{1}{\lambda}_{111}\underset{1}{\lambda}{}^{11}\big),\\
&\underset{2}{x}_1 = -\big(\underset{1}{\lambda}{}^1_{11} - \mu_{11}{}^1 + \tfrac{1}{3}\underset{2}{\lambda}_{111}\underset{2}{\lambda}{}^{11}\big), && \underset{3}{x}_1 = -\big(\mu_{11}{}^1 + \tfrac{2}{3}\underset{3}{\lambda}_{111}\underset{3}{\lambda}{}^{11}\big).
\end{aligned}$$

Проверка показывает, что величины $\underset{\xi}{x}{}^1$, $\underset{\xi}{x}_1$ являются решениями дифференциальных уравнений (12), (14) соответственно. Следовательно, их можно принять в качестве нормализующих объектов первого и второго рода кривых соответствия.

Таким образом, *точечное соответствие* $C : \underset{1}{V}_1 \times \underset{2}{V}_1 \to \underset{3}{V}_1$ *между тремя кривыми проективных плоскостей определяет инвариантную нормализацию первого и второго рода всех трех кривых* $\underset{\xi}{V}_1$ *в третьей дифференциальной окрестности.*

Для построения полного проективно-инвариантного оснащения кривых соответствия C необходимо использовать геометрические объекты четвертой дифференциальной окрестности.

Если перейти к новым реперам $\big\{\underset{\xi}{N}_0, \underset{\xi}{N}_1, \underset{\xi}{N}_2\big\}$, где

$$\underset{\xi}{N}_0 = \underset{\xi}{M}_0, \quad \underset{\xi}{N}_1 = \underset{\xi}{M}_1 + \underset{\xi}{x}_1\underset{\xi}{M}_0, \quad \underset{\xi}{N}_2 = \underset{\xi}{x}{}^1\underset{\xi}{M}_1 + \underset{\xi}{M}_2,$$

и обозначить новые формы Пфаффа через $\underset{\xi}{\sigma}{}^u_v$, то уравнения, связывающие старые и новые формы Пфаффа, будут иметь вид

$$\begin{gathered}
\underset{\xi}{\sigma}{}^0_0 = \underset{\xi}{\omega}{}^0_0 - \underset{\xi}{x}_1\underset{\xi}{\omega}{}^1_0, \quad \underset{\xi}{\sigma}{}^1_0 = \underset{\xi}{\omega}{}^1_0, \quad \underset{\xi}{\sigma}{}^2_1 = \underset{\xi}{\omega}{}^2_1,\\
\underset{\xi}{\sigma}{}^1_1 = \underset{\xi}{\omega}{}^1_1 + \underset{\xi}{x}_1\underset{\xi}{\omega}{}^1_0 - \underset{\xi}{\omega}{}^2_1\underset{\xi}{x}{}^1,\\
\underset{\xi}{\sigma}{}^0_1 = \underset{\xi}{a}_{11}\underset{1}{\sigma}{}^1_0 + \underset{\xi}{b}_{11}\underset{2}{\sigma}{}^1_0, \quad \underset{\xi}{\sigma}{}^1_2 = \underset{\xi}{a}{}^1_1\underset{1}{\sigma}{}^1_0 + \underset{\xi}{b}{}^1_1\underset{2}{\sigma}{}^1_0.
\end{gathered}$$

После перехода к новым реперам уравнения соответствия (5) примут форму

$$\begin{gathered}
\underset{1}{\sigma}{}^2_1 = \underset{1}{\lambda}_{11}\underset{1}{\sigma}{}^1_0, \quad \underset{2}{\sigma}{}^2_1 = \underset{2}{\lambda}_{11}\underset{2}{\sigma}{}^1_0, \quad \underset{3}{\sigma}{}^2_1 = \underset{3}{\lambda}_{11}\underset{3}{\sigma}{}^1_0,\\
\underset{1}{\sigma}{}^1_0 + \underset{2}{\sigma}{}^1_0 + \underset{3}{\sigma}{}^1_0 = 0, \quad \underset{1}{\Sigma}{}^1_1 = \underset{2}{\Sigma}{}^1_1 = \underset{3}{\Sigma}{}^1_1.
\end{gathered}$$

Форма связности три-ткани, присоединенной к соответствию, будет $\omega^1_1 = \underset{1}{\Sigma}{}^1_1 = \underset{2}{\Sigma}{}^1_1 = \underset{3}{\Sigma}{}^1_1$ при $n = 1$. Продифференцировав эту форму, получим кривизну три-ткани, связанной с точечным соответствием между тремя кривыми проективных плоскостей,

$$R^1_{111} = 2\big(\underset{3}{b}_{11} - \underset{3}{a}_{11}\big) + \underset{3}{\lambda}_{11}\big(\underset{3}{a}{}^1_1 - \underset{3}{b}{}^1_1\big) = -2\underset{1}{b}_{11} + \underset{1}{\lambda}_{11}\underset{1}{b}{}^1_1 = 2\underset{2}{a}_{11} - \underset{2}{\lambda}_{11}\underset{2}{a}{}^1_1.$$

Литература

[1] Лаптев Г.Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований*, Тр. Моск. матем. о-ва **2**, 275–382 (1953).

[2] Акивис М.А. *О локально-дифференцируемой квазигруппе и три-ткани, которые определяются тройкой гиперповерхностей* , Сиб. мат. журн. **14** (3), 467–474 (1973).

[3] Норден А.П. *Пространства аффинной связности* (ГИТТЛ, М.–Л., (1950).

[4] Рыжков В.В.*Дифференциальная геометрия точечных соответствий между двумя пространствами*, Итоги науки, Геометрия, 1963 (Инст. науч. инф. АН СССР, 1965), с. 65–107.

[5] Болодурин В.С. *К инвариантной теории точечных соответствий трех проективных пространств*, Изв. вузов. Матем., № 5, 8–15 (1982).

[6] Болодурин В.С. *О некоторых свойствах точечных соответствий между гиперповерхностями проективных пространств*, Изв. вузов. Матем., № 2, 3–13 (1969).

[7] Болодурин В.С. *О точечных соответствиях между гиперповерхностями проективных пространств*, Тр. геометр. семин. ВИНИТИ **2**, 55–79 (1969).

[8] Casanova G. *La notion de pôle harmonique*, Rev. math. spec. **65** (6), 437–440 (1955).

[9] Акивис М.А. *О три-тканях многомерных поверхностей*, Тр. геометр. семин. ВИНИТИ **2**, 7-31 (1969).

[10] Фиников С.П. *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии* (ГИТТЛ, М.–Л., (1948).

В.С. Болодурин

профессор, заведующий кафедрой геометрии,
Оренбургский государственный педагогический университет,
ул. Советская, д. 19, г. Оренбург, 460014, Россия,

`e-mail:` Bolvikser@mail.ru

V.S. Bolodurin

Projective-differential properties of point correspondences between three hypersurfaces

Abstract. We study the point correspondences between three hypersurfaces in projective spaces with the help of G.F. Laptev invariant methods. We establish main equations and geometrical objects of correspondences. We construct invariant normalizations of hypersurfaces and main tensors of correspondences, and describe a connection of the studied correspondences with multidimensional 3-webs.

Keywords: hypersurface, point correspondence, invariant normalizations, multidimensional 3-webs.

V.S. Bolodurin

Professor, Head of the Chair of Geometry,
Orenburg State Pedagogical University,
19 Sovetskaya str., Orenburg, 460014 Russia,

`e-mail:` Bolvikser@mail.ru