Известия вузов. Математика
2008, № 7, с. 19–28

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

В.В. МАЛЫГИНА

О ТОЧНЫХ ГРАНИЦАХ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Аннотация. Для дифференциального уравнения с распределенным переменным запаздыванием получены достаточные признаки асимптотической и равномерной устойчивости решения. Построены примеры, показывающие точность границ полученной области устойчивости.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, распределенное запаздывание, устойчивость.

УДК: 517.929

Abstract. For a differential equation with a distributed varying delay, sufficient criterions of asymptotic and uniform stability of solutions are obtained. The constructed examples demonstrate exactness of the boundary of the obtained stability domain.

Keywords: functional differential equations, distributed delay, stability.

1. Введение

Для уравнений с сосредоточенным переменным запаздыванием вида

$$\dot{x}(t) + x\big(t - r(t)\big) = 0, \quad t \geq 0,$$

хорошо известен [1] следующий признак устойчивости: если $0 \leq r(t) \leq \omega < 3/2$, то решение уравнения асимптотически устойчиво; если $0 \leq r(t) \leq 3/2$, то решение уравнения устойчиво по Ляпунову. Замечательная особенность этого признака состоит в том, что приведенная в нем константа $3/2$ неулучшаема: сколь угодно малое ее увеличение позволяет выбрать запаздывание $r(t)$, при котором решение уже не будет устойчивым. Упомянутый признак послужил основой для различных обобщений [2]–[5]; при этом и для более общих объектов авторы стремились сохранить точность границ области устойчивости.

В данной работе рассматривается дифференциальное уравнение с *распределенным* переменным запаздыванием и ставится задача получить для него признаки устойчивости, аналогичные приведенным выше.

2. Постановка задачи

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\Delta = \{(t, s) \in \mathbb{R}_+^2 : t \geq s\}$. Через $L = L(\mathbb{R}_+)$ будем обозначать пространство суммируемых,

Поступила 27.03.2006

а через $L_\infty = L_\infty(\mathbb{R}_+)$ — суммируемых и ограниченных в существенном на $\mathbb{R}_+$ функций с естественной нормой.

Рассмотрим уравнение вида

$$\dot{x}(t) + \int_{t-r(t)}^{t} x(s)\,ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \qquad (1)$$
$$(x(\xi) = 0 \ \text{ при } \ \xi < 0).$$

Запаздывание $r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ считаем измеримым и ограниченным на $\mathbb{R}_+$, функцию $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ локально суммируемой. При $f \equiv 0$ уравнение (1) будем называть *однородным.*

Под *решением* уравнения (1) будем понимать функцию $x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, абсолютно непрерывную на каждом конечном интервале $[0, T]$ и удовлетворяющую (1) почти всюду.

Как известно ([6], с. 35), в указанных предположениях уравнение (1) с заданными начальными условиями однозначно разрешимо. Кроме того, существует функция $C : \Delta \to \mathbb{R}$ такая, что решение уравнения (1) имеет представление

$$x(t) = C(t,0)x(0) + \int_0^t C(t,s)f(s)\,ds. \qquad (2)$$

Функцию C принято называть *функцией Коши* уравнения (1).

Из (2) следует, что функция Коши как функция первого аргумента удовлетворяет уравнению ([6], с. 84)

$$C_t(t,s) = -\int_{t-r(t)}^{t} C(\tau,s)\,d\tau, \quad t \geq s \qquad (3)$$
$$(C(\xi,s) = 0 \ \text{ при } \ \xi < s)$$

с начальным условием $C(s,s) = 1$. Здесь и далее символом C_t будем обозначать производную функции Коши по первому аргументу.

Отметим еще одно полезное свойство функции Коши: при любых $(t,s) \in \Delta$ справедлива оценка ([7], с. 98)

$$|C(t,s)| \leq e^{(t-s)\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} r(t)}. \qquad (4)$$

Функция Коши уравнения (1) будет основным объектом нашего исследования, поэтому определения устойчивости удобнее формулировать в терминах свойств функции Коши. Легко убедиться, что для уравнения (1) эти определения совпадают с принятыми (напр., в [8], с. 130). Заметим, что для уравнения (1) равномерная асимптотическая устойчивость совпадает с экспоненциальной [5], [8] а устойчивость по Ляпунову — с равномерной устойчивостью, если последняя установлена при всех ограниченных запаздываниях.

Определение 1. Будем говорить, что уравнение (1) является

- *равномерно устойчивым*, если существует такая постоянная N, что при всех $(t,s) \in \Delta$ справедливо неравенство $|C(t,s)| \leq N$;
- *экспоненциально устойчивым*, если существуют такие положительные постоянные N и α, что при всех $(t,s) \in \Delta$ имеет место оценка

$$|C(t,s)| \leq Ne^{-\alpha(t-s)}. \qquad (5)$$

3. Test-уравнение и его свойства

Пусть $\omega > 0$, $l = \omega + \pi/2$. Рассмотрим однородное уравнение (1) с запаздыванием $r(t) = r_0(t)$, определенным равенством

$$r_0(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [0, \omega); \\ \omega, & \text{если } t \in [\omega, l). \end{cases}$$

Построим функцию $u_0(t)$ — решение такого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $u_0(0) = 1$:

$$u_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in [0, \omega); \\ 1 - \omega \sin(t - \omega), & \text{если } t \in [\omega, l). \end{cases}$$

Определим функцию $r_T(t) = r_0(t - nl)$, если $t \in [nl, (n+1)l)$, $n \in \mathbb{N}_0$, т. е. периодически продолжим функцию $r_0(t)$ с интервала $[0, l)$ на полуось с периодом l.

Определение 2. Однородное уравнение (1) с запаздыванием $r(t) = r_T(t)$ будем называть *test-уравнением.*

Через $u(t)$ обозначим решение test-уравнения, удовлетворяющее начальному условию $u(0) = 1$, через $U(t, s)$— его функцию Коши.

Лемма 1. *Test-уравнение обладает следующими свойствами*:

1. $u(t + l) = u(t)u(l)$, *в частности,* $u(nl) = u^n(l)$ *при любом* $n \in \mathbb{N}$;
2. $u(nl) = (1 - \omega)^n$ *при любом* $n \in \mathbb{N}$;
3. *test-уравнение равномерно устойчиво тогда и только тогда, когда* $0 \le \omega \le 2$;
4. *test-уравнение экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда* $0 < \omega < 2$.

Доказательство. 1. Обозначим $z(t) = u(t+l)$. Тогда с учетом периодичности функции $r_T(t)$ имеем

$$\dot{z}(t) = \dot{u}(t + l) = -\int_{t+l-r_T(t+l)}^{t+l} u(s)\, ds = -\int_{t-r_T(t)+l}^{t} u(s + l)\, ds = -\int_{t-r_T(t+l)}^{t} z(s)\, ds,$$

т. е. $z(t)$ — решение test-уравнения, удовлетворяющее начальному условию $z(0) = u(l)$. Следовательно, по формуле (2) $z(t) = u(t)z(0)$, а значит $u(t + l) = u(t)u(l)$.

2. Согласно определению test-уравнения, $r_T(t) = r_0(t)$ при $t \in [0, l)$, следовательно, $u(t) = u_0(t)$. Так как решение test-уравнения — абсолютно непрерывная функция, то $u(l) = \lim\limits_{t \to l} u_0(t) = 1 - \omega$. Для вычисления $u(nl)$ осталось применить свойство 1.

3, 4. Заметим, что при $t \ge nl \ge s$, $n \in \mathbb{N}_0$, для функции Коши test-уравнения справедливо равенство $U(t, s) = U(t, nl)U(nl, s)$.

Положим $t = nl + \tau$, $s = ml + \sigma$, где $0 \le \tau$, $\sigma < l$, $n, m \in \mathbb{N}_0$. Не нарушая общности можно считать, что $t - s > l$, тогда $n - m \ge 1$, $s \le (m + 1)l \le nl < t$. Используя отмеченное выше свойство функции $U(t, s)$, получаем

$$U(t, s) = U(\tau + nl, \sigma + ml) = U(\tau + nl, nl)U(nl, (m + 1)l)U((m + 1)l, \sigma + ml).$$

Из оценки (4) следует, что $|U(\tau + nl, nl)| \le e^{\omega\tau} \le e^{\omega l}$, $|U((m+1)l, \sigma + ml)| \le e^{\omega(l-\sigma)} \le e^{\omega l}$. С другой стороны, $U(nl, (m+1)l) = u^{n-m-1}(l)$, следовательно, равномерная устойчивость test-уравнения эквивалентна требованию $|u(l)| \le 1$, что в силу свойства 2 совпадает с неравенством $0 \le \omega \le 2$. Аналогично, экспоненциальная устойчивость test-уравнения эквивалентна требованию $|u(l)| < 1$, а стало быть, совпадает с неравенством $0 < \omega < 2$. □

4. Основные результаты

Рассмотрим частный случай уравнения (1) при $r(t) = r = \text{const}$ и $f(t) \equiv 0$

$$\dot{x}(t) = -\int_{t-r}^{t} x(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}_+ \tag{6}$$
$$(x(\xi) = 0 \ \text{ при } \ \xi < 0).$$

Обозначим через $x_0(t)$ решение уравнения (6), удовлетворяющее начальному условию $x_0(0) = 1$. Поскольку уравнение (6) является автономным, то функция $x_0(t-s)$ есть его функция Коши.

Приведем без доказательства некоторые свойства уравнения (6): критерий экспоненциальной устойчивости и критерий положительности функции Коши.

Лемма 2 ([9], [10])**.** *Уравнение* (6) *экспоненциально устойчиво тогда и только тогда, когда* $0 < r < \pi/\sqrt{2}$.

Следствие 1. В условиях леммы 2 имеем $\int\limits_0^\infty x_0(s)\,ds = 1/r$.

Доказательство. Подставим функцию $x_0(t)$ в равенство (6) и проинтегрируем по отрезку $[0,t]$:

$$x_0(t) - 1 = -\int_0^t \int_{s-r}^{s} x_0(\tau)\,d\tau\,ds.$$

Изменим порядок интегрирования и перейдем к пределу при $t \to \infty$

$$1 - \lim_{t\to\infty} x_0(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\int_0^{t-r} x_0(\tau)\int_\tau^{\tau+r} ds\,d\tau + \int_{t-r}^{t} x_0(\tau)\int_\tau^t ds\,d\tau\right).$$

Так как $x_0(t)$ имеет экспоненциальную оценку, из последнего равенства получаем

$$1 = r\int_0^\infty x_0(s)\,ds,$$

что и требовалось. □

Обозначим через μ_0 положительный корень уравнения $e^{-\mu} = 1 - \mu/2$.

Лемма 3 ([11])**.** *Для того чтобы функция Коши уравнения* (6) *была положительна, необходимо и достаточно, чтобы* $r \le \sqrt{\mu_0(2-\mu_0)}$.

Замечание 1. Приближенные вычисления дают $\mu_0 \approx 1{,}594$, $\sqrt{\mu_0(2-\mu_0)} \approx 0{,}805$.

При доказательстве следующей теоремы используется метод, предложенный С.А. Гусаренко в работе [12].

Теорема 1. *Пусть в уравнении* (1)

$$0 < \inf_{t\in\mathbb{R}_+} r(t) \le \sup_{t\in\mathbb{R}_+} r(t) < 2\sqrt{\mu_0(2-\mu_0)}.$$

Тогда уравнение (1) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. Положим $r = \sqrt{\mu_0(2-\mu_0)}$ и перепишем (1) в виде

$$\dot{x}(t) + \int_{t-r}^{t} x(s)\,ds = \int_{t-r}^{t-r(t)} x(s)\,ds + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

С помощью формулы (2) последнему равенству можно придать эквивалентную интегральную форму

$$x(t) = (Kx)(t) + g(t), \tag{7}$$

где

$$(Kx)(t) = \int_0^t x_0(t-s) \int_{s-r}^{s-r(s)} x(\tau)\, d\tau\, ds,$$
$$g(t) = \int_0^t x_0(t-s) f(s)\, ds + x_0(t)x(0),$$

а $x_0(t-s)$ — функция Коши уравнения (6).

В силу выбора r и замечания 1 $r < 0{,}81 < \pi/\sqrt{2}$, т. е. по лемме 2 функция $x_0(t-s)$ имеет экспоненциальную оценку (5).

Пусть $f \in L_\infty$. Тогда $g \in L_\infty$, а оператор K переводит L_∞ в L_∞. Оценим его норму

$$\|Kx\| = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} \left| \int_0^t x_0(t-s) \int_{s-r}^{s-r(s)} x(\tau)\, d\tau\, ds \right| \le$$
$$\le \left(\sup_{t\in\mathbb{R}_+} \int_0^t |x_0(t-s)| \sup_{s\in\mathbb{R}_+} |r(s) - r|\, ds \right) \|x\| =$$
$$= \left(\sup_{t\in\mathbb{R}_+} |r(t) - r| \int_0^\infty |x_0(s)|\, ds \right) \|x\|.$$

Из леммы 3 следует $x_0(t) > 0$, т. е. $|x_0(t)| = x_0(t)$, а в силу следствия 1 $\int\limits_0^\infty x_0(s)\, ds = 1/r$.

Учитывая предположения теоремы, получаем $\|K\| < 1$. Применяя принцип сжимающих отображений, заключаем, что уравнение (1) имеет ограниченное на $\mathbb{R}_+$ решение. По теореме Боля–Перрона ([7], с. 103, теорема 3.3.1) отсюда следует, что уравнение (1) экспоненциально устойчиво. □

Следствие 2. Пусть в уравнении (1)

$$0 < \varliminf_{t\to\infty} r(t) \le \varlimsup_{t\to\infty} r(t) < 2\sqrt{\mu_0(2-\mu_0)}.$$

Тогда уравнение (1) экспоненциально устойчиво.

Доказательство следует из ограниченности функции Коши уравнения (1) на любой полосе конечной ширины $t - s \le T$.

Доказательство основной леммы проводится по схеме доказательства леммы 2 из работы [13] и использует следующее установленное в ней утверждение.

Лемма 4. *Пусть u_1 и u_2 — непрерывно дифференцируемые функции, заданные на интервалах соответственно (a_1, b_1) и (a_2, b_2), при этом $b_1 - a_1 \ge b_2 - a_2$. Далее, пусть u_1 монотонно возрастает, $u_1(a_1) > u_2(a_2)$ и $u_1(b_1) = u_2(b_2)$. Тогда существуют точки $c_i \in (a_i, b_i)$, $i = \overline{1,2}$, такие, что $u_1(c_1) = u_2(c_2)$ и $\dot u_1(c_1) \le \dot u_2(c_2)$.*

Лемма 5 (основная). *Пусть $\omega > 2\sqrt{\mu_0(2-\mu_0)}$. Если $t_0 \ge kl + s$, $C(t_0, s) > 0$ и $C_t(t_0, s) \geqslant 0$, то найдется такое $t_1 \in [kl + s, t_0]$, что*

$$C(t_0, s) = u(l)C(t_1, s). \tag{8}$$

Доказательство. Согласно лемме 1 имеем $u(2l) = u^2(l) > 0$, следовательно, $C(t_0, s) = hu(2l)$ при некотором $h > 0$.

Рассмотрим множество

$$H = \left\{(t,\tau) \in [kl+s, t_0] \times [l, 2l] : C(t,s) = hu(\tau), \quad \int_{t-r(t)}^{t} C(\xi, s)\, d\xi \le h \min_{\theta\in[0,\omega]} \int_{\tau-\theta}^{\tau} u(\xi)\, d\xi\right\}.$$

Множество H не пусто, так как $(t_0, 2l) \in H$. По своей структуре H замкнуто и ограничено в $\mathbb{R}^2$. Значит, существует наименьшая точка τ^* из точек $\tau \in [l, 2l]$, для которых существует $t \in [kl+s, t_0]$ такое, что $(t,\tau) \in H$. Пусть t^* такова, что $(t^*, \tau^*) \in H$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $l \leqslant \tau^* \leqslant l + \omega$. Имеем $C(t^*, s) = hu(\tau^*) = hu(l)$, откуда $u(l)C(t^*, s) = hu^2(l) = hu(2l) = C(t_0, s)$, т. е. равенство (8) выполнено при $t_1 = t^*$.

Случай 2. $\tau^* > l + \omega$. Тогда, как следует из определения H,

$$\int_{t^*-r(t^*)}^{t^*} C(\xi, s)\, d\xi \le h \min_{\theta\in[0,\omega]} \int_{\tau^*-\theta}^{\tau^*} u(\xi)\, d\xi \le h \int_{\tau^*-r(t^*)}^{\tau^*} u(\xi)\, d\xi,$$

следовательно,

$$\int_{t^*-r(t^*)}^{t^*} (C(\xi, s) - hu(\xi + \tau^* - t^*))\, d\xi \le 0,$$

т. е. при некотором $\xi^* \le t^*$ имеем $C(\xi^*, s) < hu(\tau^* - (t^* - \xi^*))$.

Для функций $u_1 : (\tau^* - (t^* - \xi^*), \tau^*) \to \mathbb{R}$, $u_2 : (\xi^*, t^*) \to \mathbb{R}$, где $u_1(\tau) = hu(\tau)$, $u_2(t) = C(t, s)$, выполнены условия леммы 4. Следовательно, существуют $\sigma_1 < t^*$, $\sigma_2 < \tau^*$ такие, что $C(\sigma_1, s) = hu(\sigma_2)$, $C_t(\sigma_1, s) \ge h\dot{u}(\sigma_2)$. Так как C есть решение уравнения (3), а u — решение test-уравнения, то в силу условий на ω получаем $(\sigma_1, \sigma_2) \in H$. Но $\sigma_2 < \tau^*$, что противоречит определению τ^*. □

Теорема 2. *Пусть в уравнении* (1) $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} r(t) \le 2$. *Тогда уравнение* (1) *равномерно устойчиво.*

Доказательство. Рассмотрим test-уравнение с параметром ω, где $r(t) \le \omega \le 2$. Не нарушая общности, можно считать, что для ω выполняется условие леммы 5. При $t - s \le l$ функция Коши уравнения (1) в силу (4) ограничена. Обозначим $M = \sup\limits_{t-s\le l} |C(t,s)|$. Предположим, что существуют t' и s_0 такие, что $t' - s_0 > l$ и $|C(t', s_0)| > M$. Положим $m = \max\limits_{t\in[s_0+l, t']} |C(t, s_0)|$ и найдем точку $t_0 \in (s_0 + l, t']$, ближайшую к $s_0 + l$ и такую, что $|C(t_0, s_0)| = m > M$. Очевидно, $C(t_0, s_0)C_t(t_0, s_0) \ge 0$ и в силу лемм 1 и 5 имеем

$$|C(t_0, s_0)| = |C(t_1, s_0)|\, |u(l)| \le |C(t_1, s_0)|, \tag{9}$$

где $t_1 \in [s_0, t_0]$. Из определения точки t_0 следует, что $t_1 \in [s_0, s_0 + l]$. Но тогда неравенство (9) означает, что $M \ge m$, что невозможно. □

Теорема 3. *Пусть в уравнении* (1)

$$0 < \inf_{t\in\mathbb{R}_+} r(t) \le \sup_{t\in\mathbb{R}_+} r(t) < 2. \tag{10}$$

Тогда уравнение (1) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. Рассмотрим test-уравнение с параметром $\omega \ge \sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} r(t)$ таким, что $2\sqrt{\mu_0(2-\mu_0)} < \omega < 2$. Из леммы 1 следует $-1 < u(l) < 0$.

Заметим, что $M = \sup\limits_{(t,s)\in\Delta} |C(t,s)| < \infty$ в силу теоремы 2. Зафиксируем $s \ge 0$ и рассмотрим функцию $C(t,s)$ на множестве $E_k = [s+2kl, \infty)$. Обозначим $m_k = \sup\limits_{t\in E_k} |C(t,s)|$ и докажем, что при всех $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$m_k \le |u(l)| m_{k-1}. \tag{11}$$

Действительно, пусть существует такая точка $t_0 > s + 2kl$, что $m_k = |C(t_0,s)|$. Тогда $C_t(t_0,s) = 0$, а $C(t_0,s) \ne 0$. Применяя лемму 5, получаем $m_k = |C(t,s)| = |u(l)|\,|C(t_1,s)| \le |u(l)| m_{k-1}$, где $t_1 \in E_{k-1}$. Так как (11) установлено при всех $k \in \mathbb{N}$, то

$$m_k \le |u(l)| m_{k-1} \le \dots \le |u(l)|^k M.$$

С другой стороны, $|u(l)| < 1$, значит, $m_k < m_{k-1}$, а $m_k = \sup\limits_{t\in E_k \setminus E_{k-1}} |C(t,s)|$. Следовательно, если $t - s \in [2kl, 2(k+1)l]$, то $|C(t,s)| \le M|u(l)|^k$, т.е. уравнение (1) экспоненциально устойчиво. $\square$

Следствие 3. Пусть в уравнении (1)

$$0 < \varliminf_{t\in\mathbb{R}_+} r(t) \le \varlimsup_{t\in\mathbb{R}_+} r(t) < 2.$$

Тогда уравнение (1) экспоненциально устойчиво.

Замечание 2. Константы 0 и 2 в теоремах 2 и 3 неулучшаемы: из леммы 1 (свойства 3 и 4) следует, что для test-уравнения неравенство (10) является критерием экспоненциальной устойчивости, а соответствующее ему нестрогое неравенство — критерием равномерной.

Замечание 3. Следующий пример показывает, что в теореме 2 точную верхнюю грань нельзя заменить верхним пределом.

Положим в однородном уравнении (1)

$$r(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \in [kl, kl+\omega); \\ 2 + \frac{1}{k+1}, & \text{если } t \in [kl+\omega, (k+1)l), \end{cases}$$

где $l = \omega + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Решение такого уравнения легко построить на каждом отрезке $[kl, (k+1)l)$, при этом $x((k+1)l) = x(kl)\big(1 - 2 - \frac{1}{k}\big) = -\big(1 + \frac{1}{k}\big)x(kl)$. Значит, $x((k+1)l) = (-1)^{k+1}\big(1+\frac{1}{k}\big)\big(1 + \frac{1}{k-1}\big)\cdots\big(1+\frac{1}{2}\big)\big(1+\frac{1}{1}\big) = (-1)^k(k+1)$ и $|x((k+1)l)| = |k+1| \to \infty$. С другой стороны, $\varlimsup\limits_{t\to\infty} r(t) = 2$, но $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} r(t) > 2$.

5. Некоторые обобщения

Полученные результаты можно применить к исследованию устойчивости уравнений с распределенным запаздыванием более общего вида, чем уравнение (1).

Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) = -a \int_{t-r(t)}^{t} x(s)\,ds + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \tag{12}$$
$$(x(\xi) = 0 \ \text{ при } \ \xi < 0),$$

где функции f и r удовлетворяют тем же условиям, что и в уравнении (1), а коэффициент $a \in \mathbb{R}$.

Очевидно, при $a < 0$ уравнение (12) неустойчиво. В случае же $a \geq 0$ для уравнения (12) на основе установленных выше результатов легко получить признаки равномерной и экспоненциальной устойчивости.

Теорема 4. *Пусть* $a \geq 0$ *и* $\sqrt{a}\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} r(t) \leq 2$. *Тогда уравнение* (12) *равномерно устойчиво.*

Теорема 5. *Пусть* $0 < \sqrt{a}\,\varliminf\limits_{t\to\infty} r(t) \leq \sqrt{a}\,\varlimsup\limits_{t\to\infty} r(t) < 2$. *Тогда уравнение* (12) *экспоненциально устойчиво.*

Доказательство. Если отбросить тривиальный случай $a = 0$ ($C(t,s) \equiv 1$), то теоремы 4 и 5 можно доказать по одной схеме. Замена переменных $\tau = \sqrt{a}t$, $x\big(\frac{\tau}{\sqrt{a}}\big) = y(\tau)$, как нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, преобразует (12) в уравнение вида (1):

$$y'(\tau) = -\int_{\tau-\sqrt{a}r\left(\frac{\tau}{\sqrt{a}}\right)}^{\tau} y(\xi)\,d\xi + f\left(\frac{\tau}{\sqrt{a}}\right), \quad \tau \in \mathbb{R}_+.$$

Применяя к нему теоремы 2 и 3, получаем соответственно теоремы 4 и 5. □

Другим обобщением уравнения (1) является уравнение

$$\dot{x}(t) = -a(t)\int_{t-r(t)}^{t} a(s)x(s)\,ds + f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+ \qquad (13)$$
$$(x(\xi) = 0 \ \text{ при } \ \xi < 0),$$

в котором функции $a, f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $r : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ предполагаются суммируемыми на каждом конечном отрезке $[0, T]$.

Целесообразно сначала изучить случай $a \in L$.

Теорема 6. *Пусть* $a \in L$. *Тогда функция Коши уравнения* (13) *обладает следующими свойствами*:

1. $|C(t,s)| \leq N$, *т. е. уравнение* (13) *равномерно устойчиво*;
2. *для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* T, *что при всех* $t \geq s \geq T$ $\ |C(t,s) - 1| < \varepsilon$.

Доказательство. Из определения функции Коши следует, что она, как функция первого аргумента, является решением однородного уравнения (13) при $t \geq s$ и удовлетворяет начальным условиям $C(s,s) = 1$. При этом предполагается, что $C(\xi,s) = 0$, если $\xi < s$. Тогда

$$C(t,s) = 1 - \int_s^t a(\tau)\int_{\tau-r(\tau)}^{\tau} a(\xi)C(\xi,s)\,d\xi\,d\tau. \qquad (14)$$

Следовательно,

$$|C(t,s)| \leq 1 + \int_s^t |a(\tau)|\int_s^{\tau} |a(\xi)|\,|C(\xi,s)|\,d\xi\,d\tau.$$

Применим теорему об интегральном неравенстве ([7], с. 163) и учтем суммируемость коэффициента

$$|C(t,s)| \leq \operatorname{ch}\left(\int_s^t |a(\tau)|\,d\tau\right) \leq \operatorname{ch}\left(\int_0^{\infty} |a(\tau)|\,d\tau\right) = N.$$

Для доказательства второго свойства функции Коши вновь используем уравнение (14) и уже установленное свойство 1

$$|C(t,s)-1| = \left| \int_s^t a(\tau) \int_{\tau-r(\tau)}^{\tau} a(\xi)C(\xi,s)\,d\xi\,d\tau \right| \leq$$
$$\leq \int_s^t |a(\tau)| \int_s^{\tau} |a(\xi)|\,|C(\xi,s)|\,d\xi\,d\tau \leq$$
$$\leq N \int_s^{\infty} |a(\tau)| \int_s^{\tau} |a(\xi)|\,d\xi\,d\tau = \frac{N}{2}\left(\int_s^{\infty} |a(\tau)|\,d\tau\right)^2.$$

При любом $\varepsilon > 0$ можно найти такое T, что $\left(\int\limits_T^{\infty} |a(\tau)|\,d\tau\right) \leq \sqrt{\frac{2\varepsilon}{N}}$. Тогда для всех $t \geq s \geq T$ справедливо неравенство $|C(t,s)-1| < \varepsilon$. □

Следствие 4. Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда любое решение уравнения (13) имеет конечный предел при $t \to \infty$.

Теорема 7. *Пусть $a \notin L$ и $a(t) > 0$. Если*

$$0 < \varliminf_{t\to\infty} \int_{t-r(t)}^{t} a(s)\,ds \leq \varlimsup_{t\to\infty} \int_{t-r(t)}^{t} a(s)\,ds < 2,$$

то при некоторых положительных N, α для функции Коши уравнения (13) *имеет место оценка*

$$|C(t,s)| \leq Ne^{-\alpha\int_s^t a(\tau)\,d\tau}. \tag{15}$$

Доказательство. Сделаем замену переменных $\tau = \varphi(t) = \int\limits_0^t a(s)\,ds$ ([14]). В силу предположений теоремы функция $\varphi\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ является непрерывной и монотонно возрастающей на $\mathbb{R}_+$, причем $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = +\infty$. Следовательно, существует обратная функция $\varphi^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Обозначим $y(\tau) = x\big(\varphi^{-1}(\tau)\big)$. Так как функция x есть решение уравнения (13), то функция y будет решением уравнения

$$y'(\tau) = -\int_{\tau-q(\tau)}^{\tau} y(\xi)\,d\xi + f\big(\varphi^{-1}(\tau)\big), \quad \tau \in \mathbb{R}_+, \tag{16}$$

где запаздывание $q(\tau) = \int\limits_{\varphi^{-1}(\tau)-r(\varphi^{-1}(\tau))}^{\varphi^{-1}(\tau)} a(\xi)\,d\xi$. Пусть $C(t,s)$ — функция Коши уравнения (13), тогда $C\big(\varphi^{-1}(\tau),\varphi^{-1}(\sigma)\big)$ — функция Коши уравнения (16). Применяя к уравнению (16) теорему 3, получим, что функция $C\big(\varphi^{-1}(\tau),\varphi^{-1}(\sigma)\big)$ имеет экспоненциальную оценку (5), которая эквивалентна оценке (15) для функции $C(t,s)$. □

Теорема 8. *Пусть $a(t) > 0$. Если $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}_+} \int\limits_{t-r(t)}^{t} a(s)\,ds \leq 2$, то уравнение* (13) *равномерно устойчиво.*

Доказательство. Для случая $a \in L$ равномерная устойчивость обеспечивается теоремой 6. Если $a \notin L$, то повторим доказательство теоремы 7, применив в конце вместо теоремы 3 теорему 2. Получим, что уравнение (13) и в этом случае равномерно устойчиво. □

Литература

[1] Мышкис А.Д. *О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом* // Матем. сб. – 1951. – Т. 28. – № 3. – С. 641–658.

[2] Yorke J.A. *Asymptotic stability for one dimensional differential-delay equations* // J. Different. Equat. – 1970. – V. 7. – № 1. – P. 189–202.

[3] Yoneyama T. *On the* 3/2 *stability theorem for one dimensional delay-differential equations* // J. Math. Anal. Appl. – 1987. – V. 125. – № 1. – P. 161–173.

[4] Малыгина В.В. *Некоторые признаки устойчивости функционально-дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производной* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 7. – С. 46–53.

[5] Малыгина В.В. *Некоторые признаки устойчивости уравнений с запаздывающим аргументом* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 10. – С. 1716–1723.

[6] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. — 277 с.

[7] Азбелев Н.В., Симонов П.М. *Устойчивость уравнений с обыкновенными производными.* — Пермь: Изд-во Пермск. ун-та, 2001. — 229 с.

[8] Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1984. – 424 с.

[9] Вагина М.Ю. *Логистическая модель с запаздывающим усреднением* // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 4. – С. 167–173.

[10] Сабатулина Т.Л., Малыгина В.В. *Об асимптотической устойчивости одного класса систем дифференциальных уравнений с распределенным запаздыванием* // Вестн. Пермск. гос. техн. ун-та. Прикладная матем. и мех. – Пермь, 2004. – № 1. – С. 114–120.

[11] Малыгина В.В. *О положительности функции Коши линейного уравнения с распределенным запаздыванием* // Вестн. Пермск. гос. техн. ун-та. – Пермь, 2006. – № 1. – С. 80–83.

[12] Гусаренко С.А. *Признаки разрешимости задач о накоплении возмущений для функционально-дифференциальных уравнений* // Функционально-дифференц. уравнения. Межвуз. сб. научн. тр. – Пермь, 1987. – С. 30–40.

[13] Amemiya T. *On the delay-independent stability of a delayed differential equations of* 1*st order* // J. Math. Anal. Appl. – 1989. – V. 142. – № 1. – P. 13–25.

[14] Ladas G., Sficas Y. G., Stavroulakis I. P. *Asymptotic behaviour of solutions of retarded differential equations* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1983. – V. 88. – № 2. – P. 247–253.

В.В. Малыгина

доцент, кафедра вычислительной математики и механики,
Пермский государственный технический университет,
614000, г. Пермь, Комсомольский проспект, д. 29а,

`e-mail:` mavera@list.ru

V.V. Malygina

Associate Professor, Chair of Computational Mathematics and Mechanics,
Perm State Technical University,
29a Komsomol'skii Ave., Perm, 614000 Russia,

`e-mail:` mavera@list.ru