МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Кафедра теории и технологий преподавания математики и информатики

Направление: математика и английский язык

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Формирование геометрических понятий у учащихся 7-9 классов

Работа завершена:

"___"_____ 201_ г. _____ (Д.Р. Трусенева)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель
к.п.н., доцент
"___"_____ 201_ г. _____ (М.В. Фалилеева)

Заведующий кафедрой,
д.п.н., профессор
"___"_____ 201_ г. _____ (Л.Р. Шакирова)

Казань – 2014

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ …… ... 3
ГЛАВА 1. Теоретические основы формирования геометрических понятий у учащихся 7–9 классов …….. 6
1.1. Математическое понятие и его свойства ……... 6
1.2. Понятие треугольника в элементарной и школьной математике …... 16
1.3. Анализ школьных учебников и методических пособий по теме: «Треугольник» в 7–9 классах ……... 20
ГЛАВА 2. Экспериментальная работа по формированию геометрических понятий у учащихся 7–9 классов (на примере понятия «треугольник») ……. 31
2.1. Диагностика сформированности понятия «треугольник» ……... 31
2.2. Особенности формирования понятия «треугольник» в 7–9 классах .. 41
2.3. Система задач по решению треугольников …….. 44
ЗАКЛЮЧЕНИЕ ……... 50
БИБЛИОГРАФИЯ …….. 51
ПРИЛОЖЕНИЯ …….. 53

ВВЕДЕНИЕ

Геометрия как школьный учебный предмет всегда считался одним из самых сложных в школьном курсе математики. Данные по решению задач Единого Государственного Экзамена показывают, что самой «нерешаемой» задачей является планиметрическая задача уровня С. Многие учащиеся не умеют правильно строить геометрические чертежи к задачам [], анализировать условие задачи, выдвигать гипотезы решения, конструировать доказательство. Одной из главных первопричин этого является несформированность геометрических понятий. Большинство учащихся не имеют к 9 классу сформированных понятий о четырехугольнике, об окружности и даже о треугольнике.

К сожалению, целеполагание в обучении учителя сместились от «знать геометрию» к «уметь решать задачи ЕГЭ», что также понижает такие требования учителя как системность и прочность в усвоении геометрических понятий учащимися. Все вышесказанное обосновывает актуальность разработки темы данного дипломного исследования.

Исторически геометрия начиналась с треугольника, поэтому вот уже два с половиной тысячелетия треугольник – символом геометрии; но он не только символ, он – атом геометрии. Треугольник это важнейшая фигура планиметрии, и поэтому в первую очередь изучают свойства этой фигуры. С ним связаны многие методы, которые используются при решении различных геометрических задач. Любой многоугольник можно разделить на треугольники, а изучение свойств этого многоугольника, сводится к изучению составляющих его треугольников. Можно сказать, что изучаемая в школьном курсе геометрия – это геометрия треугольника. Поэтому формирование геометрических понятий рассмотрим на примере формирования учащихся поня-

тия «треугольник». Что позволяет переносить аналогичные рассуждения в формировании треугольника на другие геометрические понятия (четырехугольника, окружности, многоугольника).

Объектом исследования является процесс формирования геометрических понятий у учащихся в основной школе.

Предметом исследования являются методические условия формирования геометрических понятий в общей общеобразовательной школе.

Цель исследования — выявление условий формирования геометрического понятия в курсе математики общеобразовательной школы на примере ключевого понятия треугольника.

Для достижения этой цели поставлены следующие задачи:

1) изучить и выполнить теоретический анализ учебно-методической, учебной и математической литературы;
2) определить условия формирования математических понятий в 7–9 классах;
3) провести диагностику уровня сформированности понятия «треугольник» в 7-9 классах;
4) составить систему задач с методическими комментариями, позволяющие учителю продиагностировать сформированность понятия треугольник.

Для решения поставленных задач были использованы следующие методы:

1) изучение, анализ, сравнение математической, учебной литературы по данной теме;
2) организация и проведения теста;
3) количественная и качественная обработка данных, полученная при проведении теста.

Дипломная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложения.

Первая глава посвящена анализу геометрического материала, содержащегося в учебниках геометрии 7–9 классов, анализу литературы и теоретическим выводам.

Вторая глава дипломной работы посвящена экспериментальной работе. В экспериментальную работу входит тест.

В заключении сформулированы выводы по выполнению задач дипломной работы, поставленных во введении.

ГЛАВА 1. Теоретические сведения по теме «Формирование геометрических понятий у учащихся 7–9 классов»

1.1. Математическое понятие и его свойства

Понятие является одной из главных составляющих в содержании любого учебного предмета, в том числе – и математики.

С самого начала встреча с понятиями происходит у учащихся при изучении различных математических дисциплин. Так, начиная изучать геометрию, учащиеся сразу же встречаются с понятиями: точка, линия, угол, а далее с целой системой понятий, связанных с видами геометрических объектов.

Обратимся к определению понятия и отметим специфику математических понятий. Существуют разные взгляды на это определение.

Например, Л.В. Виноградова в учебно-методическом пособии для будущих учителей «Методика преподавания математики в средней школе» определяет понятие как форму мышления, в которой выделены существенные свойства объектов, отделенные и абстрагированные от несущественных свойств. Понятийное мышление, то есть мышление в понятиях, – это высшая стадия развития интеллекта [1, С.5].

Г.И. Саранцев в своей книге «Методология методики обучения математики» отмечает, что в логике распространены три основных варианта образования понятия:

1) Процесс конструирование понятий протекает как поиск всех необходимых условий, которых достаточно для однозначного определения требуемого класса объектов.

   Пример. Каждое из условий: «быть геометрической фигурой», «иметь три отрезка», «иметь три угла» – только необходимо для понятия треугольника. Любая пара названных условий также только необходима.

Но все вместе они необходимы и достаточны для определения класса треугольника.

2) Понятие рассматривается как логическая функция, заданная на множестве суждений и принимающая значения «истинно» и «ложно». Образования понятия заключается в поиске его необходимых условий. В данной концепции единицей содержания понятия выступает отдельное необходимое условие, а потому содержание понятия не совпадает с его определением.
3) Под содержанием понятия понимают сообщаемую им (семантическую) информацию. Единицей содержания выступают классы объектов, т. е. множество объектов, в терминах которого определяется рассматриваемое понятие [14, С.38].

Н.Л. Стефанова считает, что любая наука представляет собой систему понятий. В математике, как и в других учебных предметах, уделяется значительное внимание обучения понятиям. Что же такое понятие? Понятие относится к формам теоретического мышления, которое является рациональной степенью познания [9, С.109].

Понятие является объектом рассмотрения различных наук, поэтому и существует различные трактовки: «Нет ничего более запутанного, чем понятие о понятии». В логике понятие рассматривается как форма абстрактного мышления, отражающая существенные признаки классов однородных предметов или отдельного предмета. С точки зрения философии понятие — это форма мышления о целостной совокупности существенных и несущественных свойств объектов реального мира.

В понятии отражены существенные свойства объектов и абстрагированы от несущественных. Методист Л.В. Виноградова выделяет, что существенные свойства составляют содержание понятия. Существенными свойствами понятия называются такие, каждый из которых необходим, а все вместе достаточны, чтобы виделись определенный класс объектов, чтобы некоторый объект отнести к определенному понятию [1, С.6].

Н.Л. Стефанова выделяет то, что свойство – это то, что каким-то образом характеризует вещь и не требует для своего описания более одной вещи. Существенными свойствами понятия являются те, без которых понятие (объект для понятия) не существует. При их помощи выделяются и обобщаются предметы интересующего нас множества [9, С.110].

Например, существенным свойством понятия «треугольник» являются: фигура, образованная тремя отрезками, которые соединяют три не лежащие на одной прямой точки. Несущественными свойствами понятия треугольника являются величины сторон и углов, цвет изображения, положение на плоскости.

В книге «Методология методики обучения математики» Г.И.Саранцева про свойства понятий не чего не сказано.

Существенные свойства составляют содержание понятия.

В понятиях кроме содержания можно выделить вторую характеристику – их объем.

Во всех трех учебниках приведено одинаковое понятие объема, т. е это множество объектов, подпадающих под это понятие. В объем понятия треугольник входят остроугольный, равнобедренный, тупоугольный, равносторонний и другие треугольники.

Если объем одного понятия входит в объем другого, то первое понятие называется видовым, а второе – родовым по отношению к первому.
Родовое и видовое понятия относительны.

Бывает, что объемы двух понятий полностью совпадают (отношение тождественного совпадения) например, треугольники с соответственно равными элементами и треугольники, совмещающиеся при движении.

Рассмотрим связь между объёмом и содержанием понятия. Если содержание соответствует действительности и не включает противоречивых признаков, то объём – это не пустое множество, что важно показать учащимся при введении понятия. Содержание вполне определяет объём и наоборот.

Значит, изменение одного влечёт изменение другого: если содержание увеличивается, то объём уменьшается [1, С.14].

Содержание понятия отождествляется с его определением, а объём раскрывается через классификацию.

По Л.В.Виноградовой процесс выяснения объема понятия называется классификацией.

Классификация предполагает выполнение ряда условий. Классификация проводится по определенному признаку, неизменному в процессе классификации. Сравните: треугольники бывают прямоугольные, равнобедренные и равносторонние.

Следующей важной характеристикой понятия является классификация понятий. Н.Л.Стефанова делает вывод, что классификация – систематическое распределение некоторого множества по классам, возникающее в результате последовательного деления.

Рассматривают два вида деления:

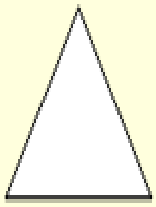
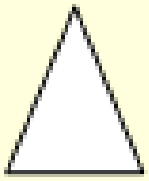
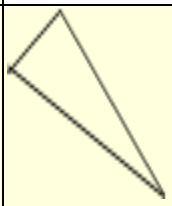
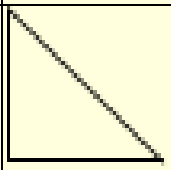
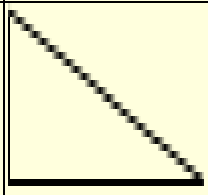
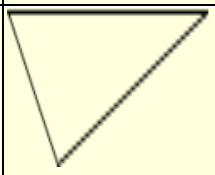
1) деление по видоизменению признака – это деление, при котором свойство – основание деления присуще объектам выделенных видов в разной степени;
2) дихотомическое деление – это деление, при котором данное понятие делится на два вида по наличию или отсутствие некоторого свойства.

Например, классификацию треугольников можно выполнить по двум основаниям. Например, первое деление – на классы остроугольных треугольников (все три угла острые), прямоугольных и тупоугольных. Второе деление — остроугольных треугольников и неостроугольных треугольников.

Разобьем треугольники на различные классы по различным основаниям и принципам деления, что является, несомненно, важным для введения понятия треугольника. В результате все треугольники будут сначала разбиты на остроугольные (все углы острые), прямоугольные (один угол прямой), тупоугольные (один угол тупой). Далее треугольники можно разбить на треугольники с двумя равными сторонами и все стороны различны. Тогда полу-

чим классов (табл. 1): остроугольное разносторонние, остроугольные равнобедренные, прямоугольные разносторонние, прямоугольные равнобедренные, тупоугольные разносторонние, тупоугольные равнобедренные [9, С.95]. Можно провести дихотомическое деление по основанию «ровно две стороны равны» в случае равнобедренного остроугольного треугольника (табл.1).

Таблица 1. Классификация треугольников по различным основаниям

Вид треугольника	**Две стороны равны**		**Нет равных сторон**
	Три стороны равны	**Ровно две стороны равны**	
Остроугольный	 Равносторонний	 Равнобедренный	
Прямоугольный	____	 равнобедренный	
Тупоугольный	____	 равнобедренный	

Оба вида классификации используются в школе. Как правило, сначала дихотомический, а затем по видоизменённому признаку. Общая картина классификации понятия треугольника необходима и важна для понимания места каждого класса при формировании понятия треугольника. Она показы-

вает сколько видов задач и в каком объеме необходимо давать учащихся для целостного представления и качественного понимания понятия треугольника. Что учителю важно исследовать с учащимися 7 случаев доказательства теорем, задач, целенаправленно выделять 7 видов задач на закрепление каждого вида треугольника. Например, рассмотреть теорему о центре описанной окружности в каждом из случаев, т.е. дать детям «Изобразите положение центра описанной окружности в случаях а) остроугольного, б) тупоугольного, в) прямоугольного; г) равнобедренного, д) равнобедренного тупоугольного; ж) равнобедренного прямоугольного, з) равностороннего треугольников.

Опишем **методические требования к формированию понятий**.

Начальным этапом является *мотивация*. Сущность этого этапа заключается в подчеркивании значимости рассматриваемого понятия, в возбуждении интереса к нему. Мотивация может осуществляться привлечением средств нематематического содержания, так и в ходе выполнения специальных упражнений, объясняющих необходимость развития математической теории. Здесь актуально:

- использовать создание проблемных ситуаций,
- рассматривать исторические факты, имеющие место в развитии изучаемого понятия,
- обсуждать теоретические вопросы с активным использованием контрпримеров.

Например, введение смежных углов можно вводить через решение задачи о нахождении углов в треугольниках, имеющих общую сторону и углы, образующие пару смежных углов.

Следующий этап – *выявление существенных свойств понятия*, которое позволит выделить определение или несколько возможных определений. Он реализуется в основном посредством упражнений, направленных на максимально возможное для данного уровня подготовки учащихся раскрытие существенных свойств, и контрпримерами, ограничивающими несущественные

свойства и ошибочные представления. Итогом этого этапа является формулировка определения понятия. Желательно обратить внимание учащихся, что определений у одного и того же понятия может быть несколько. Например, рассматривая равнобедренный треугольник, можно дать следующие определения: 1) треугольник с двумя равными сторонами («классическое»); 2) треугольник с двумя равными углами; 3) треугольник с совпадающими высотой и медианой. Конечно, для введения используется наиболее простое и иллюстративно понятное определение.

На этапе *усвоения определения* понятия объектом изучении должно стать каждое существенное свойство, которое используется в определении. Реализуется это требование с помощью упражнений, в частности, на распознавание объектов, принадлежащих понятию. Другим действием, является действие выведения следствий из принадлежности объекта понятию. Тут необходимы комплексные упражнения, выполнение которых основано не только на использовании существенных свойств понятия, но и на отыскании следствий.

Следующий этап – *использование понятия в конкретных ситуациях*. На этом этапе, прежде всего, осуществляется знакомство со свойствами и признаками понятия, с его определениями, эквивалентному принятому; используются изученные свойства и признаки понятия. Учащиеся усваивают умение, переходя от термина, обозначающего понятие, к его существенным свойствам и обратно, переосмысливают объекты с точки зрения разных понятий, в частности, учатся переосмысливать элементы чертежа с точки зрения с другой фигуры и так далее. Здесь важно использовать блоки задачи, объединенных какой-либо общей идеей.

Блоки задач могут конструироваться следующим образом:

1) результаты решения предыдущей задачи используется в решении последующей;
2) результаты решения предыдущей задачи используются в условии последующей;

3) предыдущие задачи являются элементами последующей;
4) решение совокупности задач осуществляется одним и тем же методом.

Важен *этап систематизации материала*, когда выяснятся место данного понятия в системе других понятий. Это достигается следующими путями: установлением связей между отдельными понятиями, теоремами: разноплановой систематизацией материала по различным основаниям; обобщением понятия; конкретизацией понятия.

В качестве средств представления информации в сжатом виде используются таблицы, графики, вопросники, диаграммы, рисунки, схемы и так далее.

Заключительным этапом являются *логические операции с понятием*, в результате чего появляются новые понятия. Среди операции: обобщение, аналогия, дополнение, пересечение, объединение и так далее.

Каждый этап формирование понятий реализуется посредством специальных упражнений.

Итак, процесс формирование математических понятий в средней школе является более сложным по сравнению с его ведением на основе логике и психологии.

Обобщив вышеизложенное, выстоим последовательно методические условия, соответствующие этапам усвоения понятия:

1) создание ситуации, создающей потребность в введении учащимся изучаемого понятия (проблемная ситуация);
2) рассмотрение существенных и несущественных свойств объекта (описание объекта; построение геометрических чертежей; наблюдение за объектом в различным положениях, с различными метрическими характеристиками);
3) выделение нескольких простых существенных свойств (системой контрпримеров) и выделение из них определения;

4) решение простейших задач, направленных на переход от введенного определения к другим существенным свойствам (использование определения при решении задач);
5) определение часто повторяющихся существенных свойств и представление их в виде теорем (доказательство теорем);
6) рассмотрение теорем-«существенных свойств» в различных видовых группах понятия;
7) использование определения и теорем при решении задач (конструктивное усложнение задач).[14, С.98]

Далее используем выделенные нами методические условия в формировании понятия треугольника.

Интересной и обоснованной является позиция Захаровой Т.В. [12], которая считает, что при изучении геометрических понятий важнейшими приемами являются обобщение и конкретизация. Обобщение и конкретизацию предлагает проводить с помощью систем задач, которые должны иметь следующие направленности:

1) На перечисление свойств понятий, содержащихся в их определении (на перечисление свойств, принадлежащих первичному содержанию понятия).
2) На выявление и перечисление свойств являющихся следствием первичного содержания понятия (т.е. на выработку представлений о производном содержании понятия).
3) На установление невозможности одновременного выполнения указанных свойств (на “противоречивые свойства”).
4) На установление непротиворечивости свойств.
5) На установление независимости свойств.

6) На усвоение необходимого и достаточного условия конкретизации и обобщения понятия в случае включения или исключения некоторого свойства.

7) На выяснение, является ли одно из двух данных понятий обобщением (конкретизацией) другого (является ли множество объектов, удовлетворяющих определению одного понятия, собственным подмножеством объектов, удовлетворяющих определению другой понятия).

8) Задачи на сравнение понятий, ни одно из которых не есть обобщение (следовательно, и конкретизация) другого [12].

Далее Захарова В.Т. обобщает: «система задач должна отражать в себе все доступные логически возможные способы обобщения и конкретизации понятий. Кроме этого требования, к системе задач на обучение обобщению и конкретизации необходимо предъявить еще два требования. Одно из них вытекает из теоретико-множественного подхода к истолкованию объема понятия, и доступности и наглядности сравнения конечных множеств: в задачах по обучению обобщению и конкретизации необходимо широкое использование конечных множеств. Другое требование следует из неразрывной связи обобщения и конкретизации и обязывает обеспечить единство работы по обучению этим мыслительным операциям».

Вышеизложенные методические условия, соответствующие этапам усвоения понятия, (С. 13-14) и перечисленные рекомендации к системе задач по совершенствованию понятия (С.14-15) будем использовать при формировании системы задач, направленных на формирование и диагностику геометрического понятия, в частности, треугольника.

1.2. Понятие треугольника в элементарной и школьной математике

Рассмотрим содержание материала по теме «Треугольник» в различных учебных пособиях элементарной математики, а именно Ж. Адамара «Элементарная геометрия. Планиметрия» и Р.К. Гордина «Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы». Выбор данных книг объясняется тем, что элементарная геометрия Ж. Адамара – это классический научно-методический труд, который послужил основой многим современным учебным пособиям по элементарной планиметрии. Второе учебное пособие Р.К. Гордина — современное, неоднократно переиздаваемое, популярное.

Первое рекомендовано для обучения студентов по элементарной геометрии, второе – для углубленной подготовки школьников. Такой выбор обусловлен тем, что при формировании понятия треугольника (а оно может формироваться всю жизнь) используются различные методические приемы. Именно особенности формирования геометрических понятий в каждом из этих пособий предлагаемые авторами для разного контингента обучающихся и являются объектом исследования в данном разделе.

Таблица 2. Содержание и порядок изложения материала в учебниках по элементарной математики

Последовательность этапов введения определений и существенных свойств треугольника	**«Ключевые» темы, определяющие формирование понятия треугольника**	
	Ж.Адамар «Элементарная геометрия. Планиметрия»	**Р.К. Гордин «Геометрия. Планиметрия 7–9 классы»**
1 этап	1)Многоугольники вообще; 2)Треугольники; 3)Свойства равнобедренного треугольника; 4)Признаки равенства тре-	1) Признаки равенства треугольников; 2) Сумма углов треугольников; 3)Геометрические не-

	угольников; 5)Внешний угол треугольника. Соотношение сторон и углов в треугольнике 6) Прямолинейный отрезок короче любой ломаной линии, имеющий с ним общие концы; 7) Если два треугольника имеют по неравному углу, заключенному между соответственно равными сторонами, то против большего угла лежит и большая сторона; 8) Признаки равенства треугольников.	равенства.
2 этап	1) Прямые в треугольнике, проходящие через одну; 2) Подобие треугольников; 3) Прямоугольные треугольники. Теорема Пифагора; 4) Произвольные треугольники. Теорема Стюарта; 5) Вычисление длин замечательных линий треугольника (медиана, биссектриса, высота)	1) Средняя линия треугольника; 2) Теорема Пифагора; 3) Подобные треугольники.
3 этап	1)Площадь треугольника;	1) Теорема косинусов;

	2) Отношение площадей двух треугольников, имеющие по равному углу.	2)Теорема синусов; 3)Площадь треугольника.

В целом изложение геометрических понятий у данных авторов полностью отвечает сложившемуся традиционному подходу изложения Евклидовой геометрии. Но существуют отличия в формулировках некоторых понятий и их существенных свойств, распределение теорем по учебному материалу (некоторые теоремы рассматриваются как задачи). Существенны различия в подходах, определяющих системы задач. Так у Гордина система упражнений трехуровневая: 1-й уровень для «хорошего» школьника, а остальные для мотивированных, заинтересованных школьников. У Адамара система упражнений от простого к сложному. Есть у авторов и общие подходы в расширении геометрических понятий — это система задач на построения, которая позволяет качественно повысить уровень изучаемого геометрического понятия и увидеть его в контексте иных задач.

Остановимся на определении треугольника. Ж.Адамар сначала рассматривает определение многоугольника, т. е многоугольником называется часть плоскости, ограниченная отрезками прямых линий. Отталкиваясь от этого определения, он классифицирует многоугольник по числу сторон, т. е простейший многоугольник с тремя сторонами – треугольник. Гордин определения треугольника не дает, поскольку пособие направлено на расширение школьных базовых знаний, сразу переходит к определениям равнобедренного, прямоугольного и равностороннего треугольника, признакам равенства треугольников, замечательных отрезков треугольника. Адамар Ж. так же дает определения видов треугольников. Далее дает определение высоты и медианы (высотой треугольника называет перпендикуляр, опущенный из вершины на противоположную сторону).

Свойства равнобедренного треугольника рассматриваются в трех теоремах.

- Теорема 1. Во всяком равнобедренном треугольнике углы, лежащие против равных сторон, равны между собой.
- Теорема 2. Если в треугольнике два угла равны, то треугольник равнобедренный.
- Теорема 3. Во всяком равнобедренном треугольнике биссектриса угла при вершине перпендикулярна к основанию и проходит через его середину.

Гордин Р.К. начинает сразу рассматривать признаки равенства треугольника, без доказательства У Р.К. Гордина и у Ж.Адамара все три признака изучаются последовательно. Лишь у Р.К. Гордина признаки идут без доказательств, а Ж.Адамар доказывает их с помощью наложения.

После признаков Р.К. Гордин вводит понятия медианы, высоты, биссектрисы, равнобедренного треугольника и равностороннего треугольника. Рассматривает свойства и признак равнобедренного треугольника. Разбирает подробно 3 задачи.

После каждой главы авторы предлагают упражнения для закрепления знаний. Например, Ж.Адамар предлагает 10 задач, из них на доказательство– 7. Гордин Р.К. предлагает 32 задачи (которые разделены на три уровня сложности)

Р.К. Гордин рассматривает две теоремы (об углах треугольника и о внешнем угле треугольника) без доказательств.

Ж.Адамар не затрагивает тему геометрические неравенства. Чего нельзя сказать про Р.К. Гордина. Он не только затрагивает эту тему, но и подробно рассматривает с доказательствами и разобранными примерами.

Однако в книги Ж.Адамара содержание выходит за рамки существующих программ. Это больше энциклопедия элементарной геометрии, стоящая на уровне современной науки и написанная выдающимся математиком. После каждого параграфа Ж.Адамар предлагает упражнения для самостоятельного решения, которые способствуют укреплению нового материала. Поэто-

му существенным достоинством книги является наличие большого числа задач, многие из которых могут дать материал для творческой работы.

Содержание соответствуют школьным учебникам по геометрии.

1.3. Анализ школьных учебников и методических материалов по теме «Треугольник» в 7–9 классах

Рассмотрим самые популярные учебники геометрии за 7-9 класс, в которых проанализируем подачу теоретического материала и системы упражнений. Обратимся к 4 школьным учебникам за 7–9 класс авторов:

1. Л.С.Атанасяна;
2. А.В.Погорелова;
3. А.П.Киселева;
4. И.Ф.Шарыгина.

Табл. 3. Содержание и порядок изложения материала школьных учебников.

Класс	Л.С.Атанасян Геометрия 7–9	А.В.Погорелов Геометрия 7–9	А.П.Киселев Геометрия 7–9	И.Ф.Шарыгин Геометрия 7–9
7 класс	1) Треугольник; 2) Первый признак равенства треугольников; 3) Перпендикуляр к прямой; 4) Медины, биссектрисы и	1)Основные свойства простейших геометрических фигур. Треугольник; 2)Существование треугольника, равного данному;	1)Треугольник2) Некоторые свойства р/б треугольника; 3)Признаки равенства треугольника; 4) Внешний угол	1)Треугольник; 2) Р/б треугольник; 3) Признаки равенства треугольников; 4) Неравенства

	высоты треугольника; 5) Свойства равнобедренного треугольника; 6) Второй признак равенства треугольников; 7) Третий признак равенства треугольников; 8) Сумма углов треугольника; 9) Соотношения между сторонами и углами треугольника; 10) Прямоугольные треугольник; 11) Построение треугольника по трем элементам.	3)Смежные и вертикальные углы; 4)Биссектриса угла. 5) Признаки равенства треугольников(1,2); 6) Равнобедренный треугольник; 7) Высота, биссектриса и медиана треугольников; 8) Свойство медианы равнобедренного треугольника; 9) Третий признак равенства треугольников; 10) Сумма углов треугольника; 11) Прямоугольный треугольник; 12)Построение треугольника с данными сторонами.	треугольника и его свойства; 5) Соотношения между сторонами и углами треугольника; 6)Признаки равенства прямоугольного треугольника.	в треугольнике.

8 класс	1) Площадь треугольника; 2) Определение подобных треугольников; 3)Признаки подобия треугольников; 4)Применение подобия к доказательству теорем и решению задач; 5)Соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника.	1) Теорема Пифагора; 2)Неравенство треугольник; 3) Соотношение между сторонами и углами прямоугольного треугольника.	1)Подобие треугольников; 2) Признаки подобия треугольников.	1) Подобные треугольники; 2) Признаки подобия треугольников; 3) Замечательные точки треугольники.
9 класс	1) Соотношения между сторонами и углами треугольника; 2)Теорема о площади треугольника.	1)Решение треугольников; 2)Площадь треугольников.	1)Площади многоугольников.	1)Площадь треугольника.

Содержание рассмотренных выше учебников соответствует содержанию образования. Определения треугольников Л.С.Атанасян и А.В.Погорелов вводят конструктивно, через конструирование трех точек и трех отрезков, но плоскость треугольника не вводится.

Так в учебнике А.В.Погорелова даётся следующее определение: "Треугольником называется фигура, которая состоит из трёх точек не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, попарно соединяющих эти точки". Для формирования понятия треугольника предлагается треугольник, вырезаемый детьми из цветной бумаги до 7 класса, приравнять к трем отрезкам, как-то попарно соединенным. Для семиклассника возникает новая и не совсем правильная конструкция из новых понятий "отрезок соединяет точки", "попарно соединяющих". У Л.С. Атанасяна определение аналогичное, но приемы введения, язык изложения легче воспринимаются школьниками.

Авторы А.П.Киселёв и И.Ф.Шарыгин понятие треугольника связывают с частным случаем многоугольника, но в этом понятии говорится не только о фигуре, образованной замкнутой линией, но и о части плоскости, ограниченной этой замкнутой линией. Здесь определение треугольника отдельно не рассматривается. При изучении темы «Многоугольники» Л.С.Атанасян и А.В.Погорелов упомянут это определение.

Определение равнобедренного и равностороннего треугольника одинаковое во всех учебниках. Такое определение является общепринятым в математике.

В учебниках А.П.Киселёва и И.Ф.Шарыгина свойства равнобедренного треугольника рассматриваются в одной теореме. Доказательства проводятся аналогично, с использованием осевой симметрии относительно биссектрисы треугольника и определения равных треугольников. В силу того, что ни Л.С.Атанасян, ни А.В.Погорелов не используют движения плоскости в 7 классе, основой для доказательства свойств равнобедренных треугольников являются признаки равенства треугольников.

Л.С.Атанасян в доказательстве свойств равнобедренного треугольника пользуется первым признаком равенства треугольников. В книге А.В.Погорелова свойства равнобедренного треугольника доказываются с использованием определения треугольника как упорядоченной тройки точек, но не поясняется, что ΔCAB и ΔCBA это разные треугольники, а не один и тот

же по-разному обозначенный. Такое доказательство учениками 7 класса понимается довольно трудно.

Признаки равнобедренного треугольника в учебнике Л.С. Атанасяна не рассматриваются, хотя эти теоремы очень полезные. В учебнике А.В. Погорелова приводится один признак (через равенство углов при основании). Полностью все признаки рассмотрены только у И.Ф. Шарыгина.

Во всех четырёх учебниках применяется один и тот же подход с использованием аксиомы существования треугольника равного данному. Но нигде ссылок на эту аксиому нет. Доказательства проводятся на основе наглядности с помощью наложения и приложения. В учебнике А.В. Погорелова эта аксиома формулируется. Автор при доказательстве на неё ссылки не делает.

Доказательства в учебниках Л.С. Атанасяна и А.П. Киселёва аналогичны. Но в учебнике А.П.Киселёва, исходя из определения треугольника, следовало бы ещё доказать, что плоскости треугольников так же совпадут при наложении (о чём в доказательствах даже не говорится). Благодаря использованию признаков равенства треугольников легче усваиваются основные теоремы планиметрии (свойства и признаки серединного перпендикуляра, свойства равнобедренного треугольника, теорема о внешнем угле треугольника, свойства и признаки параллельных прямых и параллелограмма, теорема Фалеса, признаки подобия треугольников и т.п.). В учебнике Л.С. Атанасяна первый признак рассматривается отдельно от двух других.

В учебниках А.П. Киселёва и И.Ф. Шарыгина все три признака изучаются последовательно.

В учебнике И.Ф.Шарыгина кроме наложения используются ещё и симметрия, что делает доказательство трудным. Доказательство третьего признака проводится с использованием элементов построения. Так же применяется движение (т.е. перенос), но нигде не указано как оно осуществляется и переводит ли одну точку в другую

Определение подобных треугольников даётся как треугольники, у которых углы соответственно равны, а стороны одного пропорциональны сход-

ственным сторонам другого треугольника. Л.С. Атанасян и А.П. Киселёв вводят понятие пропорциональных сходственных сторон. Доказательство признаков подобия треугольников в учебнике геометрии А.В. Погорелова основывается на свойствах гомотетии. Выводом которой является формула расстояния между точками на координатной плоскости. Теорема Фалеса рассматривают в начале 8 класса, а признаки подобия в конце 8 класса. В этом плане удобнее расположение материала в учебнике А.П.Киселёва. Но у него доказательство признаков подобия основано на лемме: прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному. При доказательстве А.П.Киселёв рассматривает отдельно случаи, когда отношение сторон треугольников является или рациональным, или иррациональным числом. Л.С.Атанасян рассматривает площади фигур раньше, чем в других учебниках.

Метод доказательства признаков подобия треугольников в учебнике Л.С.Атанасяна отличается от других. Так доказательство первого признака подобия треугольников основывается на теореме об отношении площадей треугольников, т.е. если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы A и A_1 равны, то $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{A_1B_1 \times A_1C_1}{AB \times AC}$. Эта теорема не является традиционной для школьного курса и скорее всего носит вспомогательный характер. С другой стороны на основе этой теоремы весьма просто доказывается, что отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. Эта теорема позволяет дать простое доказательство признаков подобия треугольников. У А.П.Погорелова такой теоремы нет, что делает невозможным решение его методами задач такого плана: Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, их соответствующие стороны относятся как 6: 5. Площадь Δ ABC больше площади Δ $A_1B_1C_1$ на 77 см^2. Найдите площади треугольников.

И.Ф.Шарыгин доказывает теорему о пропорциональных отрезках и свойства параллельных прямых. Все три признака подобия рассматривает друг за другом, и для всех приводится одно доказательство с пояснениями для каж-

дого из признаков. Об отношении площадей подобных фигур так же ничего не говорится [13].

Обратимся к опыту учителей по формированию понятия треугольник.

Учитель математики Сорокина Любовь Васильевна [15] предлагает следующие идеи в проведении урока по теме: «Признаки равенства треугольников» по развитию понятия треугольника. Тип урока: урок систематизации и обобщения знаний и умений.

Цель	Усвоение знаний в системе. Обобщение единичных знаний в систему.
Задачи	Образовательные: выявить уровень овладения учащимися комплексом знаний и умений по теме; научить в процессе реальной проблемной ситуации использовать определение равных треугольников, признаки равенства треугольников, продолжить формирование умений применять признаки равенства треугольников для решения задач, распознавать равные треугольники, доказывать их равенство, делать вывод о равенстве некоторых их элементов, формирование умения сознательного пользования основными понятиями; Развивающие: совершенствовать умение обрабатывать информацию, формировать коммуникативную компетенцию учащихся, развивать умение выбирать способы решения задач в зависимости от конкретных условий, развивать умения анализировать, сравнивать и обобщать, формировать логическое мышление; способствовать развитию познавательной активности; прививать интерес к геометрии. Воспитательные: умение слушать и вступать в диалог, умение интегрироваться в группы сверстников, воспитывать ответственность и аккуратность.
УУД	Личностные УУД: умение выделять нравственный аспект поведения; уважать и принимать чужое мнение; формировать адекватную самооценку и чувство собственного достоинства. Регулятивные УУД: работа по алгоритму, с памятками; прогнозирование своей деятельности для решения поставленных задач, целеполагание и выдвижение гипотез,

	умение выделять необходимую информацию для решения базовых задач и задач в измененной ситуации. Коммуникативные УУД: умение слушать и вступать в диалог, умение выражать свои мысли, умение интегрироваться в группу, поддержание здорового духа соперничества. Познавательные УУД: формирование представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления; овладение геометрическим языком; развитие умения использовать его; развитие пространственных представлений; развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера.
Планируемые результаты	Предметные: Знать понятия равных треугольников, равнобедренного треугольника, свойства равнобедренного треугольника, признаки равенства треугольников. Уметь применить признаки равенства треугольников при решении задач. Личностные: умение слушать и вступать в диалог, умение интегрироваться в группы, через взаимодействие с математическим содержанием учиться уважать и принимать чужое мнение и поднимать самооценку. Метапредметные: применять полученные знания при решении проблемных ситуаций, связанных с признаками равенства треугольников.
Основные понятия	Треугольники, виды треугольников, равные треугольники, высота, медиана, биссектриса.
Межпредметные связи	Формирование у школьников конструктивных умений и навыков (например, таких как измерение, построение плоской фигуры, равной данной, геометрическое моделирование и конструирование) позволяет значительно ускорить процесс формирования некоторых умений при обучении изобразительному искусству. Применение материала урока для решения задач с практическим содержанием.
Ресурсы: основные	Геометрия. 7-9 классы: учебник для общеобразовательных учреждений/ Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов,

дополнительные	С.Д.Кадомцев и др. - М.: Просвещение, 2013.- 383с.:ил. Карточки, линейки, карандаши, компьютер с комплектующими.
Формы работы учащихся	Фронтальная, индивидуальная, парная, групповая

Для начала учитель проводит организационный момент, смотрит, все ли ученики готовы к уроку. Чтобы заинтересовать учащихся она рассказывает историю, ответ на которую они должны дать сами в конце урока. Ученики ставят перед собой проблемные вопросы, на которые они должны будут дать ответ.

Учитель так же подготовила карточки с заданиями. Далее она проводит блиц–опрос на отдельных листочках. Она дает возможность заработать хорошую оценку. В этот блиц-опрос входят следующие вопросы:

1. Верно ли, что если треугольники равны, то все соответствующие элементы равны?

2. Верно ли, что если две стороны и угол одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники равны?

3. Верно ли, что если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны?

4. Верно ли, что если треугольники равны, то каждому углу первого треугольника можно найти угол, равный ему во втором треугольнике?

5. Верно ли, что если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то такие треугольники равны?

6. Верно ли, что если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны?

7. Верно ли, что если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны?

Далее она предлагает 4 задачи. Учащиеся чертеж не копируют, только решения пишут в тетрадь. Совместное обсуждение решения задач, взаимопомощь, демонстрируют умение договариваться. Предлагают различные варианты решения задачи. Поиск и выделение необходимой информации.

На уроках обязательно нужно проводить физкультминутку, для того чтобы учащиеся могли отвлечься и отдохнуть от решения задач. Любовь Васильевна предлагает следующую физкультминутку:

1. Вдох-выдох, потянулись.

2. Руки - вверх, поработали пальчиками - составить различные треугольники.

3. Левой рукой нарисовать в воздухе треугольник, затем - правой, и - обеими.

4. Нарисовать на полу треугольник каждой ногой.

5. Стряхнули усталость с рук, ног. Сели.

Далее проводит самостоятельную работу (состоит из двух вариантов, по две задачи в каждой) и знакомит со способом решения задачи с использованием прибора дальномера. Учащиеся делают вывод о практическом приложение второго признака равенства треугольников. Далее учитель проводит рефлексию с помощью 12 вопросов вида: 1. Сегодня я узнал… 2. Было интересно… 3. Было трудно…и т.п.

Задает интересное, творческое домашнее задание: 1) индивидуально или в группах подготовить сообщения об известных треугольниках (например, о египетском треугольнике, Бермудском треугольнике и др.); 2) придумать паркеты из треугольников.

Выполняя домашнее задание, дети узнают немало полезной информации и наглядно видят практическое применение признаков равенства треугольников.

Изучая подобные материалы можно обратить внимание на то, что некоторые учителя придают большое значение при бучении треугольникам таким системообразующим, мотивационным идеям как прикладное значение геометрии, историческому аспекту в развитии понятия треугольника, решению задачи по готовым чертежам. Но ни в одном из материалов мы не нашли, например, идей обращения к тупоугольным треугольникам и их элементам, которые принципиально важны при формировании понятия треугольника.

ГЛАВА 2. Экспериментальная работа по формированию геометрических понятий у учащихся 7–9 классов (на примере понятия «треугольник»)

2.1. Диагностика сформированности понятия «треугольник»

Первым шагом в исследовании процесса формирования геометрических понятий необходимо понять реальную картину уровня сформированности понятия треугольника у школьников. Для этого необходимо составить несложную для учеников, но удобную для научной интерпретации систему заданий, направленных на определение существования различных существенных свойств изучаемого понятия «треугольник».

Данная система заданий предназначена для учеников 7-го класса по теме «Треугольник». Может быть использована на уроках систематизации и обобщения, после изучения диагностируемых свойств треугольника. Время прохождения — 40 минут.

Инструкция к выполнению заданий. Изобразите геометрический чертеж к задаче, подпишите соответственные обозначения, данные по условию и все другие привычные для вас обозначения (равных углов, сторон). В общем, чертеж выполните так, как если далее Вам придется с его использованием решать задачу далее.

Задания

1. Постройте равнобедренные треугольники так, чтобы угол, лежащий против основания, был: а) острым, б) прямым, в) тупым.

Комментарии: данное задание определяет сформированность понятий разных видов треугольников с двумя равными сторонами.

Нужно проанализировать:

1) число попыток при построении, например, тупоугольного равнобедренного треугольника;
2) какова мера тупого угла (близка к прямому или более 120°)
3) не изображают ли учащиеся равносторонний треугольник в случае остроугольного равнобедренного треугольника;
4) размеры рисунка (если рисунок менее 2 см × 3 см, то ребенок не имеет не сформированное представление о представлении на чертеже существенных свойств, не указанных в задаче)

Таблица 4. Результаты тестирования учащихся 7 классов по заданию 1.

Учащийся	Верный геом. чертеж			Размеры рисунка		Число попыток			Мера тупого угла		Наличие равностор. Δ	ИТОГО (баллов)
	1) Остроуг. Δ	2) Прямоу. Δ	3) Тупоуг. Δ	Менее 2×3см	Более 2×3 см	1) Остроуг. Δ	2) Прямоу. Δ	3) Тупоуг. Δ	Ближе 90°	Ближе и более120°		
Ученик 1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	6
Ученик 2	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	6
Ученик 3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	8
Ученик 4	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	6
Ученик 5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8
Ученик 6	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	6
Ученик 7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	8
Ученик 8	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	6
Ученик 9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	8
Ученик 10	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	6
Ученик 11	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	6
Ученик 12	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	6
Ученик 13	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	6
Ученик 14	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	6
Ученик 15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	8
«идеальный» результат	да	да	да	нет	да	1	1	1	нет	да	нет	
баллы	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8

2. Постройте в тупоугольном треугольнике *ABC* (угол *B* тупой) высоту из угла А.

Комментарии: данное задание направлено на определение сформированности понятия «тупоугольный треугольник».

Нужно проанализировать:

1) правильно ли учащийся ввел обозначения (чтобы не выполнять «неудобное» задание, учащийся может поменять обозначения углов А и В);

2) число попыток при выполнении задания;

3) какова мера тупого угла (ближе к прямому или более 120°);

4) изобразили ли учащиеся равнобедренный треугольник (тупоугольный треугольник должен быть общего вида, т.е. разносторонний);

5) размеры рисунка;

6) высота лежит вне треугольника;

7) высота перпендикулярна продолжению стороны ВС или она стремиться к вершине В;

8) высота лежит внутри треугольника, несмотря на то, что она проведена из вершины острого угла (т.е. высота не перпендикулярна ВС).

Таблица 5. Результаты тестирования учащихся 7 классов по заданию 2.

Учащийся	Верный геом. чертеж			Размеры рисунка		Число попыток			Мера тупого угла		Правильное обозначение	Высота изобр. верно	ИТОГО (баллов)
	1) Тупоуг. Δ	2) ∠В тупой	3)Высота из ∠А	Менее 2×3см.	Более 2×3 см	1) Тупоуг. Δ	2) ∠В тупой	3)Высота из ∠А	Ближе к 90°	Ближе и более 120°			
Ученик 1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	7
Ученик 2	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	7
Ученик 3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	9
Ученик 4	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	6
Ученик 5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	9
Ученик 6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	8

Ученик 7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10
Ученик 8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	8
Ученик 9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	9
Ученик 10	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	8
Ученик 11	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	8
Ученик 12	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	8
Ученик 13	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	7
Ученик 14	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	7
Ученик 15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	9
«идеальный» результат	да	да	да	нет	да	1	1	1	нет	да	да	да	
баллы	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10

3. В остроугольном и тупоугольном треугольниках *ABC* и *ABM* сторона *AB* общая. Найдите площадь треугольника *ABC*, если площадь треугольника *ABM* равна 10 и в два раза больше площади треугольника *ABC*.

***Комментарий*:** это конструктивно сложная и нестандартная задача, поскольку в чертеже необходимо изобразить два треугольника с общей стороной, учащийся должен знать понятие остроугольного, тупоугольного треугольников, чтобы правильно начертить чертеж. Треугольники можно изобразить в разных полуплоскостях или одной относительно прямой *AB*.

Нужно проанализировать:

1) правильно ли учащийся ввел обозначения;
2) число попыток при выполнении задания;
3) какова мера тупого угла (ближе к прямому или более 120°);
4) какова мера острого угла;
5) изобразили ли учащиеся равнобедренные треугольники (как тупоугольный, так и остроугольный треугольники);
6) размеры рисунка;
7) построили ли учащиеся высоты к АВ и верно ли это сделали;
8) как много дополнительных линий, отрезков было построено дополнительно.

Таблица 6. Результаты тестирования учащихся 7 классов по заданию 3

Учащийся	Верный геом. чертеж			Размеры рисунка		Число попыток			Мера тупого угла		Правильное обозначение	ИТОГО (баллов)
	1)Тупоуг. Δ	2)остроуг. Δ	3) сторона *AB* общая	Менее 2×3см.	Более 2×3 см	1)Тупоуг. Δ	2) остроуг. Δ	3) сторона *AB* общая	Ближе к 90°	Ближе и более 120°		
Ученик 1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	3
Ученик 2	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	8
Ученик 3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9
Ученик 4	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	3
Ученик 5	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	8
Ученик 6	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	5
Ученик 7	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	7
Ученик 8	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	2
Ученик 9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	8
Ученик 10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Ученик 11	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	6
Ученик 12	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	4
Ученик 13	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	3
Ученик 14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9
Ученик 15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9
«идеальный» результат	да	да	да	нет	да	1	1	1	нет	да	да	
баллы	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9

4. В прямоугольном треугольнике *ABC* радиус описанной окружности равен 6, чему равна медиана *AM*, проведенная из вершины прямого угла.

   ***Комментарий*:** данное задание определяет сформированности понятия прямоугольного треугольника и описанной окружности. Так же учащийся должен знать, что такое радиус.

   Нужно проанализировать:

   1) число попыток при выполнении задания;

2) размеры рисунка;

3) построили ли учащиеся радиус и верно ли это сделали;

4)изобразили ли учащиеся описанную окружность;

5)правильно ли учащийся ввел обозначения;

6)правильно ли учащийся изобразил медиану АМ.

Таблица 7. Результаты тестирования учащихся 7 классов по заданию 4.

Учащийся	Верный геом. чертеж			Размеры рисунка		Число попыток			Окруж-ность		Правильное обозначение	ИТОГО (баллов)
	1) Прямоуг. Δ	2)Медиана АМ	3) Радиус	Менее 2×3 см.	Более 2×3 см	1) Прямоуг. Δ	2)Медиана АМ	3) Радиус	1) Описанная	2) Вписанная		
Ученик 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9
Ученик 2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	8
Ученик 3	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	6
Ученик 4	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	3
Ученик 5	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	6
Ученик 6	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	3
Ученик 7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Ученик 8	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	3
Ученик 9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	8
Ученик 10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Ученик 11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9
Ученик 12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Ученик 13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9
Ученик 14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	8
Ученик 15	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	6
«идеальный» результат	да	да	да	нет	да	1	1	1	да	нет	да	
баллы	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	9

5. В треугольнике *ABC* углы *A* и *B* равны 100° и 50°. Сторона АВ = 7. Найдите площадь треугольника.

***Комментарий*:** учащиеся должны понимать и изображать на чертеже градусную сетку, без транспортира.

Нужно проанализировать:

1) число попыток при выполнении задания;
2) изобразил ли ученик на чертеже градусную сетку, без транспортира.
3) размеры рисунка;

Таблица 8. Результаты тестирования учащихся 7 классов по заданию 5.

Учащийся	Верный геометрический чертеж		Размеры рисунка		Число попыток		Правильное обозначение	ИТОГО (баллов)
	1)∠ A=100°	2) ∠ B=50°	Менее 2×3 см.	Более 2×3 см	1)∠ A=100°	2) ∠ B=50°		
Ученик 1	1	1	1	1	1	1	0	5
Ученик 2	1	0	1	1	1	0	0	4
Ученик 3	1	1	1	1	1	1	1	6
Ученик 4	1	1	1	1	1	1	0	5
Ученик 5	1	1	1	1	1	1	1	6
Ученик 6	1	1	1	1	1	1	0	5
Ученик 7	0	0	1	1	0	0	0	1
Ученик 8	1	1	1	1	1	1	0	5
Ученик 9	1	1	1	1	1	1	1	6
Ученик 10	1	1	1	1	1	1	1	6
Ученик 11	1	1	1	1	1	1	1	6
Ученик 12	0	1	1	1	0	1	0	3
Ученик 13	1	1	1	1	1	1	0	5
Ученик 14	1	0	1	1	1	0	0	4
Ученик 15	1	1	1	1	1	1	1	6
«идеальный» результат	да	да	нет	да	1	1	да	
баллы	1	1	1	1	1	1	1	6

6. В треугольнике ABC проведены из вершины A медиана, биссектриса и высота. Чему равны стороны треугольника, если BC=5.

Комментарий: вводится использование медианы, биссектрисы и высоты, которые проведены из вершины угла треугольника. Учащиеся должны знать теорему, что в равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианной и высотой. Зная эту теорему, учащийся с легкостью сможет построить чертеж.

Нужно проанализировать:

1) число попыток при выполнении задания;
2) изобразили ли учащиеся равнобедренные треугольники;
3) размеры рисунка;

Таблица 9. Результаты тестирования учащихся 7 классов по заданию 6.

Учащийся	Верный геом. чертеж	Число попыток	Размеры рисунка		Наличие р/бΔ	ИТОГО (баллов)
			Менее 2×3 см.	Более 2×3 см		
Ученик 1	1	1	1	1	1	4
Ученик 2	0	0	1	1	1	2
Ученик 3	1	1	1	1	1	4
Ученик 4	1	1	1	1	1	4
Ученик 5	1	1	1	1	1	4
Ученик 6	1	1	1	1	1	4
Ученик 7	1	1	1	1	1	4
Ученик 8	1	1	1	1	1	4
Ученик 9	1	1	1	1	1	4
Ученик 10	1	1	1	1	1	4
Ученик 11	1	1	1	1	1	4
Ученик 12	1	1	1	1	1	4
Ученик 13	1	1	1	1	1	4
Ученик 14	0	0	1	1	1	2
Ученик 15	1	1	1	1	1	4
«идеальный» результат	да	1	нет	да	да	
баллы	1	1	1	1	1	4

Таблица 10. Выводы тестирования.

Номер задачи	Сколько было опрошено	Сколько правильных ответов	Вывод по каждой задаче
1	15	8	Не у всех учеников сформировано понятия разных видов треугольников с двумя равными сторонами. С остроугольным треугольником проблем не у кого не вызвало, чего нельзя сказать про тупоугольный треугольник. Половина учащихся начертили чертеж правильно.
2	15	11	Больше половины у учащихся сформировано понятие «тупоугольный треугольник». Все учащиеся изобразили тупоугольный треугольник. 10 учащихся провели высоту в внутри треугольника, и только один ученик провел высоту вне треугольника.
3	15	10	Общую сторону начертили все правильно, а дальше начали путать виды треугольников. Большинство чертили прямоугольный треугольник.
4	15	9	В этом задании начали путать описанную и вписанную окружности. Многие путаю радиус с диаметром. Не внимательно читают условие задачи, путают обозначения.
5	15	15	Единственный минус, что учащиеся не ввели обозначения. Сформировано понятие градусной сет-

			ки. Учащиеся могут без затруднений начертить 100° и 50°.
6	15	13	Учащиеся знают теорему, что в равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианной и высотой. Зная эту теорему, учащийся с легкостью смогли построить чертеж.

Проанализировав тесты можно сделать вывод, что у учащихся не сформировано понятие «Треугольник». Учащиеся различают виды треугольников, но не умеют связывать их с важнейшими составляющими треугольника.

Путают вписанную и описанную окружности. Не могут нарисовать высоты тупоугольного треугольника. Кроме этого, не обозначают углы и стороны (учащиеся должны обязательно обозначать стороны и углы) и др.

2.2. Особенности формирования понятия «треугольник» в 7–9 классах

Как было сказано ранее, в силу возрастных особенностей в среднем в 7 классе учащиеся впервые начинают сознательно учиться абстрагировать в планиметрии, в результате чего к 9 классу у них должно сформировать понятийное мышление. Поэтому в соответствии с методическими требованиями [п. 1.1., С.] необходимо выделить содержательную составляющую и методические приемы обучения.

В соответствии с проведенным логико-математическим анализом понятия и сравнительным анализом представления его в различных учебных пособиях выделим существенные свойства понятия и взаимосвязи между элементами треугольника.

Обратимся к 7 классу в рамках раскрытия понятия треугольника.

Схема 1. Порядок формирования понятия треугольника в 7 классе		
Треугольник		
Тупоугольный	Прямоугольный	Остроугольный
↓	Высота или их продолжения пересекаются в одной точке ↓	↓
2 высоты падают на продолжение сторон и лежат вне треугольника . Третья внутри треугольника.	Катеты служат высотами	Все три высоты лежат внутри треугольника.
Любой треугольник имеет три медианы, три биссектрисы, три высоты		
Признаки равенства треугольников		
Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника		

В треугольнике против большей стороны лежит больший угол и обратно **Сумма углов треугольника равна 180°** **Вписанная и описанная окружности**		
	В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета. Признаки равенства треугольников Сумма 2 острых углов равна 90° Катет, лежащий против угла 30° равна половине гипотенузе, и обратно.	Если 2 угла треугольника равны , то треугольник равнобедренный.

Обратимся к 8 классу.

Схема 2. Порядок формирования понятия треугольника в 8 классе		
Схема 1 +		
Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту **+**		
	Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов Терема Пифагора	
Если высоты 2-х треугольников равны, то их площади относятся как основания		

Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы		
	Подобные треугольники Признаки подобия треугольников Средняя линия треугольника	

Обратимся к 9 классу

Схема 3. Порядок формирования понятия треугольника в 8 классе		
Схема 1+ Схема 2 **+**		
	Синус, косинус и тангенса острого угла прям. треугольника	

Обращаясь к схемам 1, 2 и 3 видно как развивается понятие треугольника от класса к классу, что некоторые клеточки схем прорабатываются с учащимися.

2.3.Система задач уроков по решению треугольников

Предлагаемые системы задач позволяют, как расширить, так и обобщить и систематизировать знания учащихся по теме треугольник, но и провести диагностику знаний учащихся по уровню сформированности понятия треугольник.

Таблица 11. Задачи, предлагаемы на проверку сформированности существенных свойств понятия треугольника

Класс	Существенные свойства	Задача
7	Первый признак треугольника, т. е если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.	97. Отрезки AC и BD точкой пересечения делятся пополам. Докажите, что Δ ABC=Δ CDA.
	Медиана– это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны. Любой треугольник имеет три медианы. Медианы пересекаются в одной точке.	101. Начертите Δ. С помощью масштабной линейки отметьте середины сторон и проведите медианы треугольника.
	Биссектриса – это отрезок соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны. Биссектрисы пересекаются в одной точке.	102. Начертите Δ. С помощью транспортира и линейки проведите его биссектрисы.
	Высота – это перпендикуляр, про-	103. Начертите ΔABC с тремя

	веденный из вершины треугольника к прямой, содержащий противоположную сторону. Высоты пересекается в одной точке.	острыми углами и Δ MNP, у которого ∠M тупой. С помощью чертежного угольника проведите высоты каждого Δ.
	Свойства равнобедренного треугольника В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой.	115. Медиана AM Δ ABC равна отрезку BM. Докажите , что один из углов треугольника ABC равен сумме двух другихуглов.
	Второй признак треугольника, т. е если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и 2-м прилежащим к ней углам др. треугольника, то такие треугольники равны.	130. В Δ ABC и $A_1B_1C_1$ отрезки CO и C_1O_1 – медианы, $BC=B_1C_1$, $\angle B=\angle B_1$ и $\angle C=\angle C_1$. Докажите, что $\Delta ACO = \Delta A_1C_1O_1$.
	Третий признак равенства треугольника, т. е если три стороны одного треугольника соотв. равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.	141. В Δ- ках ABC и $A_1B_1C_1$ отрезки AD и A_1D_1 - биссектрисы,$AB=A_1B_1$, $BD=B_1D_1$ и $AD=A_1D_1$. Докажите, что $\Delta ABC=\Delta A_1B_1C_1$.
	Сумма углов треугольников равна 180°.	Найдите ∠C ΔABC, если ∠A=65°, ∠B=57°.

	Если все три угла треугольника острые, то треугольник называется остроугольным.	226. Докажите, что ∠ при основании р/б Δ острые.
	Если один из углов треугольника тупой, то треугольник называется тупоугольным.	228. Найдите ∠ р/б Δ, если один из ∠= 100°
	Если один из углов треугольника прямой, то треугольник называется прямоугольным.	231. Медиана АМ Δ АВС = половине стороны ВС. Докажите, что Δ АВС прямоугольный.
	В треугольнике: 1) против большей стороны лежит больший угол; 2) обратно, против большего угла лежит большая сторона.	1)В ΔАВС сторона АВ больше стороны АС. Доказать, что ∠С=∠В. 2) В ΔАВС ∠С>∠В. Доказать, что АВ>АС.
	Если два угла треугольника равны , то треугольник равнобедренный.	242. Докажите, что если биссектриса внешнего ∠Δ параллельна стороне Δ, то Δ р/б.
	Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.	237. Сравните стороны ΔАВС, если ∠А>∠В>∠С.
	Сумма двух острых углов прям. Треугольника равна 90°. Катет прям. треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузе, и наоборот.	В прямоугольном Δ АВС, в котором ∠А – прямой, ∠В=30°. Доказать, что АС=1/2 ВС.

8	Площадь треугольника равна половине произведения его основания на высоту.	468. Пусть a- основание, h- высота, а S- площадь треугольника. Найдите S, если, a=7см, h=11см.
	Площадь прям. треугольника равна половине произведения его катетов.	471. Найдите S прям. Δ, если его катеты равны: 4 см и 11 см.
	В прям. треугольнике квадрат гипотенузе равен сумме квадратов катетов.	483. Найдите гипотенузу прям. Δ по данным катетам a=6, b=8.
	Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого.	541. Подобны ли треугольники ABC и DEF, если ∠A=106°, ∠B=34°,∠E=106°, ∠F=40°, AC=4,4см,AB=5,2 см, BC=7,6 см,DE=15,6 см, DF=22,8 см, EF=13,2 см.
	Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.	544. S двух подобных Δ равна 75 $м^2$ и 300$м^2$. Одна из сторон второго Δ= 9м. Найдите сходственную ей сторону первого Δ.
	Первый признак подобия треугольника, т. е если 2 угла одного треугольника соответственно равны 2 углам другого, то такие треугольники подобны.	Даны ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$,у которых $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$. Доказать, что ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ подобны.

	Второй признак подобия треугольника, т. е если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны .	Дано ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, у которых $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $\angle A=\angle A_1$.Доказать, что ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ подобны.
	Третий признак подобия треугольника, т. е если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.	Дано ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, у которых $AB=A_1B_1$, $AC=A_1C_1$, $BC=B_1C_1$. Доказать, что ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ подобны.
	Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.	В Δ ABC,MN- средняя линия Δ ABC. Доказать, что MN||AC, MN=1/2AC.
9	Синусом острого угла прям. треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе. Косинусом острого угла прям. треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе. Тангенсом острого угла прям. треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету.	591. Найдите синус, косинус и тангенс углов Аи В ΔABC с прямым углом С, если BC=8,AB=17.

	В любом треугольнике можно вписать окружность.	691. Точка касания окружности, вписанной в р/бΔ, делит одну из боковых сторон на отрезки, равные 3 см и 4 см, считая от основания. Найдите периметр Δ.
	Около любого треугольника можно описать окружность.	706. Найдите сторону равностороннего Δ, если радиус описанной около него окружности равен 10 см.
	Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними.	1020. Найдите SΔABC, если AB=6√8 см, AC=4 см, ∠A=60°.
	Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними.	1025. С помощью теорем синусов и косинусов решите Δ ABC, если: а) ∠A=60°, ∠B=40°, C=14 б) а=6,3 , б=6,3 , ∠C=54° в) а=6, б=7,3, с=4,8

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Процесс формирования понятий — это постепенный процесс, состоящий из нескольких последовательных этапов, на каждом из которых необходимо учитывать методические особенности обучения детей данного возраста. Целями данной квалификационной работы ставились изучение математической, методической литературы по теме «Треугольник» и определить условия формирования математических понятий в 7–9 классах;

В первой главе на основе учебных пособий по методике рассматривались основы методики изучения математических понятий. В частности, разобраны такие вопросы, как содержание и объём математических понятий, их классификация; способы определения понятий, методические требования к определению понятия. А так же рассмотрели самые популярные учебники геометрии за 7-9 класс, в которых проанализировали подачу теоретического материала и системы упражнений.

Благодаря этому анализу пособий и учебников был разработан и проведён тест. В ходе, которого мы выявили, как сформированы геометрические понятия по теме «Треугольник».

Следовательно, цель данной дипломной работы достигнута.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. Виноградова Л.В. Методика преподавания математики в средней школе: учебное пособие / Л.В.Виноградова.– Ростов н/Д.: Феникс, 2005.–252 с.
2. Геометрия: Учеб. для 7—9 классы: учеб. для общеобразовательных учреждений/ [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. — М.: Просвещение, 2010. — 384 с.
3. Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы.– 3 изд., испр.–М: МЦНМО, 2006.–416 с.
4. Гусев В.А. и др. Практикум по элементарной математике: Геометрия: Учебное пособие для студентов физ–мат. спец. пед.ин–тов и учителей / В. А. Гусев, Н. В. Литвиненко, А. Г. Мордкович. — М.: Просвещение, 1992. — 352 с.
5. Гусев В.А. Каким должен быть курс школьной геометрии //Математика в школе. — 2002. — № 3. —4-8 с.
6. Киселев А. П. Геометрия / Под ред. Н.А. Глаголева. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 328с.
7. Пойа Д. Как решать задачу. — М.: Госучпедиз, 1959. — 207 с.
8. Погорелов А.В. Геометрия: Учеб. для 7-11 кл. сред.шк. – М.: Просвещение, 1993. – 383 с.
9. Стефанова Н.Л. и др. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под науч. ред. Н.Л.Стефановой, Н.С.Подходовой.– М: Дрофа, 2005.–416 с.
10. Фалилеева М.В. Точные чертежи в обучении планиметрии // Современные проблемы науки и образования. – 2013.– №2;URL: http://www.science-education.ru/108-8653 (дата обращения: 22.03.2013)
11. Шарыгин И.Ф. Геометрия. 7—9 кл.: Учеб. для общеобразоват. учеб. завед. — М.: Дрофа, 2002. — 368 с.

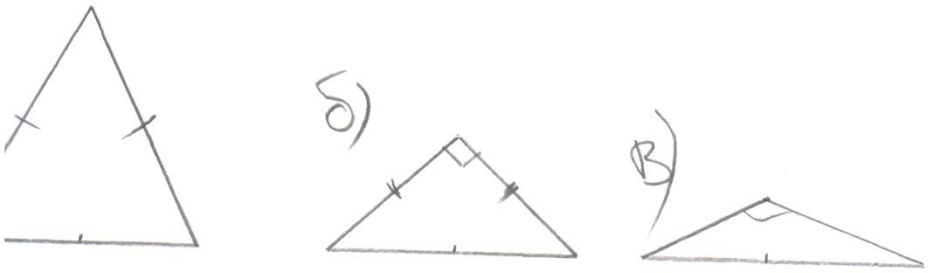
Ресурсы удаленного доступа

12. Захарова В.Т. Обучение обобщению и конкретизации при изучении геометрических понятий. Система задач и четыре требования к ней: http://festival.1september.ru/articles/211197
13. Михеева М.А. http://imap.bestreferat.ru/referat-376541.html
14. Саранцев Г.И “Методология методики обучения математики” http://www.twirpx.com/file/583820
15. Сорокина Л.В. Признаки равенства треугольников. http://festival.1september.ru/articles/643594

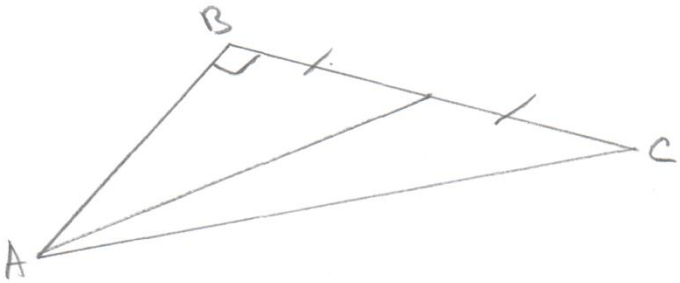
ПРИЛОЖЕНИЯ

3

1) Постройте равнобедренные треугольники так, чтобы угол, лежащий против основания, был: а) острым, б) прямым, в) тупым.

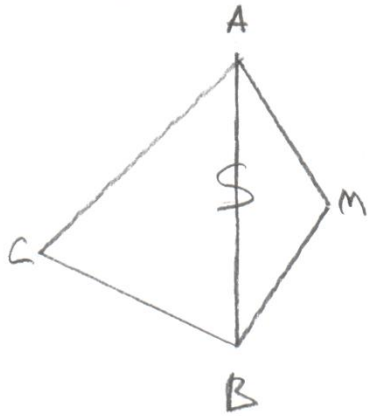


2) Постройте тупоугольном треугольнике АВС, угол В тупой, проведена высота из угла А.



Постройте геометрические чертежи к задачам так, как если бы вы ее решали.

3) В остроугольном и тупоугольном треугольниках ABC и ABM сторона AB общая. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника ABM равна 10 и в два раза больше площади треугольника *ABC*.

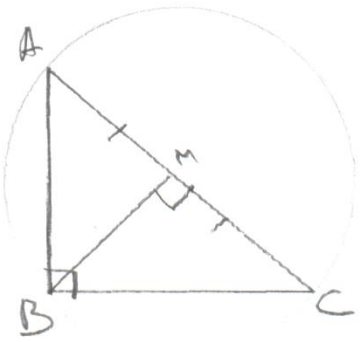


$S_{ABC} = 10$

$S_{ABM} = 10 \times 2$

$S_{ABM} = 20$

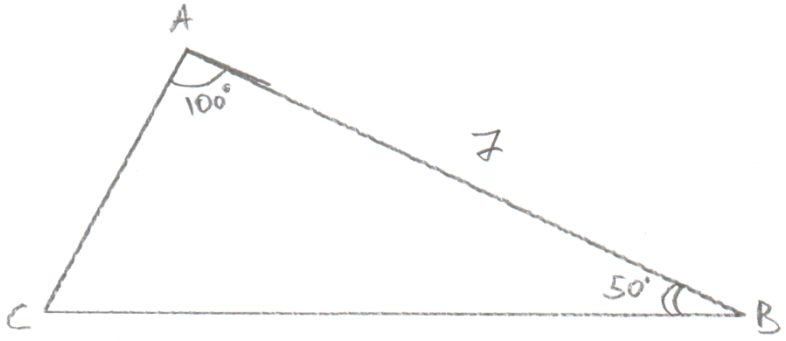
4) В прямоугольном треугольнике ABC радиус описанной окружности равен 6, чему равна медиана AM, проведенная из вершины прямого угла.



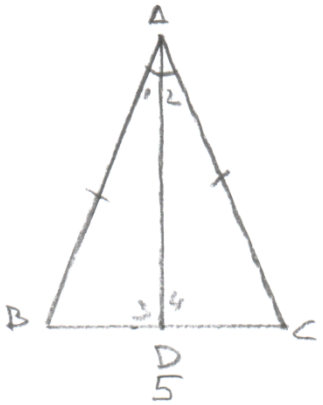
$AC = 6$

$AM = 3$

5) В треугольнике ABC углы A и B равны 100° и 50°. Сторона AB=7. Найдите площадь треугольника.



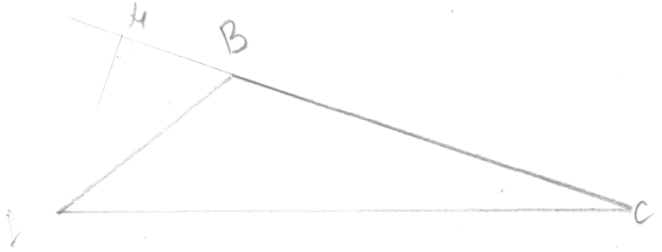
6) В треугольнике ABC проведены из вершины A медиана, биссектриса и высота. Чему равны стороны треугольника , если BC=5.



7

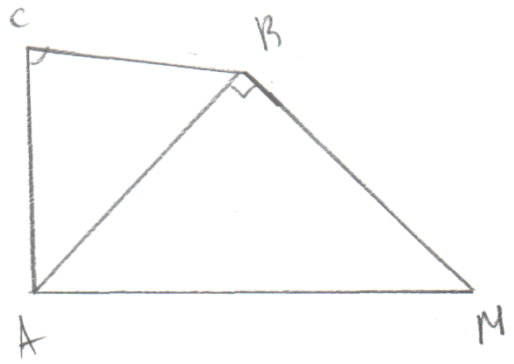
1) Постройте равнобедренные треугольники так, чтобы угол, лежащий против основания, был: а) острым, б) прямым, в) тупым.

2) Постройте тупоугольном треугольнике ABC, угол B тупой, проведена высота из угла A.



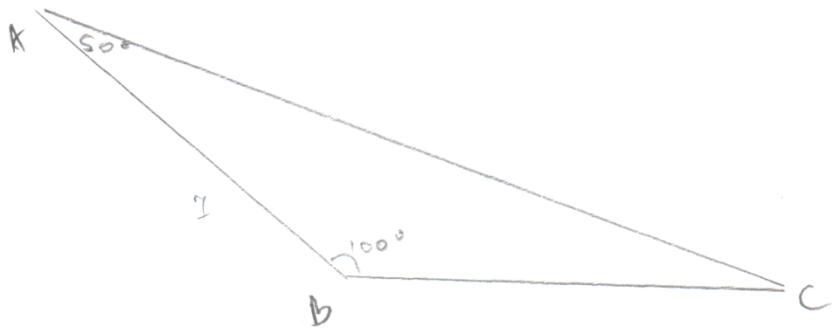
Постройте геометрические чертежи к задачам так, как если бы вы ее решали.

3) В остроугольном и тупоугольном треугольниках ABC и ABM сторона AB общая. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника ABM равна 10 и в два раза больше площади треугольника *ABC*.

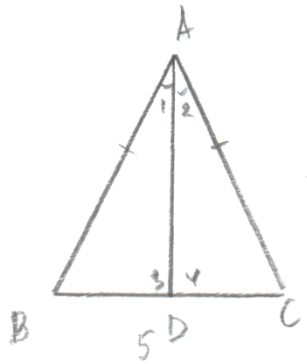


4) В прямоугольном треугольнике ABC радиус описанной окружности равен 6, чему равна медиана AM, проведенная из вершины прямого угла.

5) В треугольнике ABC углы A и B равны 100° и 50°. Сторона AB=7. Найдите площадь треугольника.



6) В треугольнике ABC проведены из вершины A медиана, биссектриса и высота. Чему равны стороны треугольника , если BC=5.



Заключительный лист

Подпись автора_____

Дата_____

Квалификационная работа допущена к защите

Назначен рецензент: Лукоянова М.А., кандидат педагогических наук, старший преподаватель кафедры математической лингвистики и информационных систем в филологии Института филологии и межкультурной коммуникации

Заведующий кафедрой _____

Дата _____

Защита в ГАК

с оценкой «_____»

Дата _____

Секретарь ГАК _____