ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 9 (436)

УДК 517.518.8

И.В. БОЙКОВ

ОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ И ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ НА ОДНОМ КЛАССЕ БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Введение

В [1] сформулирован ряд важных задач вычислительной математики, в число которых входят задачи вычисления поперечников и построения оптимальных кубатурных формул на различных классах функций. В частности, поставлены задачи вычисления поперечников на классах $Q_r(\Omega, M)$, $H_p(\{m_j\}, A)$ и построения оптимальных кубатурных формул на классе функций $H_p(\{m_j\}, A)$. Задача о вычислении поперечников на классе функций $Q_r(\Omega, M)$ была решена в [2] (см. также [3]). Оптимальные кубатурные формулы на классе функций $Q_r(\Omega, M)$ и на некоторых его обобщениях были построены автором [4] (см. также [3]).

В данной работе дается решение задач о вычислении поперечников и построении оптимальных кубатурных формул на классах бесконечно дифференцируемых функций $H_p(\{m_j\}, A)$. Так как в приводимых ниже построениях существенно используются величины m_n, то естественно выделить подкласс функций, для которого будут проводиться выкладки. Распространение полученных результатов на другие подклассы проводится практически дословно.

1. Вспомогательные предложения

Определение 1.1. Пусть $\Omega = [-1,1]^l$, $l = 1,2,\dots$, $r = 1,2,\dots$, $0 \le \gamma < 1$. Функция $f(x_1,\dots,x_l)$ принадлежит классу $B_{r,\gamma}(\Omega)$, если выполнены условия

$$\max_{x\in\Omega} |\partial^{|v|} f(x_1,\dots,x_l)/\partial {x_1}^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \le A^{|v|}|v|^{|v|}$$

при $0 \le |v| \le r$,

$$|\partial^{|v|} f(x_1,\dots,x_l)/\partial x_1^{v_1}\cdots\partial x_l^{v_l}| \le A^{|v|}|v|^{|v|}/(\rho(x,\Gamma))^{|v|-r-1+\gamma}$$

при $r < |v| < \infty$.

Здесь $x = (x_1,\dots,x_l)$, $|v| = v_1+\dots+v_l, \rho(x,\Gamma)$ — расстояние от точки x до границы Γ области Ω, вычисляемое по формуле

$$\rho(x,\Gamma) = \min_{1\le i\le l} \min(|-1-x_i|, |1-x_i|),$$

константа A не зависит от $|v|$.

Напомним определения поперечников Бабенко и Колмогорова.

Пусть B — банахово пространство, $\Pi : X \to \overline{X}$ — отображение компакта $X \subset B$ на конечномерное пространство $\overline{X}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-01-00621).

Определение 1.2 ([5]). Пусть L^n — множество n-мерных подпространств линейного пространства B. Поперечник Колмогорова $d_n(X,B)$ определяется выражением

$$d_n(X,B)=\inf_{L^n}\sup_{x\in X}\inf_{u\in L^n}\|x-u\|,$$

где последний инфимум вычисляется по всем n-мерным подпространствам L^n.

Определение 1.3 ([5]). Поперечник Бабенко $\delta_n(X)$ определяется выражением

$$\delta_n(X)=\inf_{\Pi:X\to R^n}\sup_{x\in X}\operatorname{diam}\Pi^{-1}\cdot\Pi(x),$$

где инфимум вычисляется по всем непрерывным отображениям $\Pi:X\to R^n$.

Напомним постановку задачи построения оптимальных кубатурных формул. Пусть Ψ — класс функций, для которых существует интеграл Римана

$$\int_\Omega \psi(t)dt,\quad \psi(t)\in\Psi,$$

где $\Omega=[-1,1]^l$, $t=(t_1,\dots,t_l)$. Рассмотрим кубатурную формулу

$$\int_\Omega \psi(t)dt=\sum_{k=1}^n p_k\psi(M_k)+R_n(\psi,p_k,M_k),\tag{1}$$

где коэффициенты p_k и узлы $M_k\in\Omega$, $k=1,\dots,n$, произвольны. Погрешность кубатурной формулы на классе функций Ψ определяется выражением $R_n(\Psi,p_k,M_k)=\sup\limits_{\psi\in\Psi}|R_n(\psi,p_k,M_k)|$. Кубатурная формула

$$\int_\Omega \psi(t)dt=\sum_{k=1}^n p_k^*\psi(M_k^*)+R_n(\psi,p_k^*,M_k^*)$$

называется [6] оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку среди всевозможных кубатурных формул вида (1), если

$$R_n(\Psi,p_k^*,M_k^*)/\zeta_n[\Psi]=1,\sim 1,\asymp 1,\quad \text{где}\quad \zeta_n[\Psi]=\inf_{p_k,M_k}R_n(\Psi,p_k,M_k).$$

На протяжении работы неоднократно понадобятся усреднения различных функций. В связи с этим приведем условия, налагаемые на ядра усреднения ([7], с. 104). При этом условие 4) (см. ниже) возьмем в более сильной форме, нежели в [7].

Наложим на функцию $\omega_h(x,y)$ переменных $x=(x_1,\dots,x_l)$, $y=(y_1,\dots,y_l)$, определенную в R^l и зависящую от параметра h, следующие условия:

1) $\operatorname{supp}\omega_h(x,y)\subset\{(x,y):|x-y|<Kh\}$, $K>0$, т. е. носитель функции ω_h лежит в “диагональной полоске”, ширина которой порядка h,
2) $0\le\omega_h(x,y)\le Kh^{-l}$,
3) $\int\limits_{R^l}\omega_h(x,y)dy=1$ (условие нормировки),
4) $\omega_h(x,y)$ имеет непрерывные производные до любого порядка по совокупности переменных x и y, причем
$$|D_x^\alpha D_y^\beta\omega_h(x,y)|\le KA^v v^v h^{-l-|\alpha|-|\beta|},$$
где $v=|\alpha|+|\beta|$,

Возьмем в качестве $\omega(x)$ функцию, имеющую непрерывные производные любого порядка, равную нулю вне куба $[-1,1]^l$ и удовлетворяющую условию нормировки. Потребуем, чтобы производные функции $\omega(x)$ удовлетворяли неравенствам

$$\left|\frac{\partial^{|v|}\omega(x)}{\partial_{x_1}^{v_1}\cdots\partial_{x_l}^{v_l}}\right|\le A^{|v|}|v|^{|v|},$$

где $v = (v_1, \dots, v_l)$, $|v| = v_1 + \dots + v_l$, $A = \mathrm{const}$.

Функцию $\omega_h(x,y)$ можно теперь определить по формуле $\omega_h(x,y) = h^{-l}\omega(\frac{x-y}{h})$.

2. Оптимальные по точности алгоритмы восстановления функций класса $B_{r,\gamma}([-1,1]^l)$, $l \geq 2$

Теорема 2.1. *Пусть* $\Omega = [-1,1]^l$, $l \geq 2$; $r = 1, 2, \dots$; $0 \leq \gamma < 1$. *Справедлива оценка*

$$\delta_n(B_{r,\gamma}(\Omega) \geq A n^{-r/(l-1)}. \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим через Δ_0 множество точек $x \in \Omega$, расстояние от которых $\rho(x,\Gamma)$ до границы Γ множества Ω удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq \rho(x,\Gamma) \leq 2^{-N}, \quad \rho(x,\Gamma) = \min_{1 \leq i \leq l} \min(|-1-x_i|, |1-x_i|),$$

а через Δ_k, $k = 1, 2, \dots, N$ — множество точек $x \in \Omega$, расстояние от которых до границы Γ множества Ω удовлетворяет неравенствам

$$2^{k-1}/2^N \leq \rho(x,\Gamma) \leq 2^k/2^N.$$

В каждой области Δ_k, $k = 0, 1, \dots, N$, разместим кубы $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ с гранями, параллельными граням куба Ω и с ребрами, имеющими длину $h_k = 2^k/2^N$, $k = 0, 1, \dots, N-1$. То обстоятельство, что в каждой области Δ_k, $k = 0, 1, \dots, N$, может оказаться 2^l параллелепипедов с гранями, паралельными граням куба Ω, не влияет на общность рассуждений. В каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, $k = 0, 1, \dots, N$, разместим куб $\Delta^{*k}_{i_1,\dots,i_l}$, $k = 0, 1, \dots, N$, с гранями, паралельными граням куба Ω, центр симметрии которого совпадает с центром симметрии куба $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, $k = 0, 1, \dots, N$, а длина ребра h^*_k которого равна $h_k/8$.

Каждому кубу $\Delta^{*k}_{i_1,\dots,i_l}$ поставим в соответствие функцию

$$\mathbf{L}^k_{i_1,\dots,i_l} = \begin{cases} 1, & x \in \Delta^{*k}_{i_1,\dots,i_l}, \\ 0, & x \notin \Delta^{*k}_{i_1,\dots,i_l} \end{cases}$$

и среднюю функцию

$$L^{*k}_{i_1,\dots,i_l}(x) = (h^*_k)^{-l+r} \int_\Omega \omega\left(\frac{(y-x)}{h^*_k}\right) L^k_{i_1,\dots,i_l}(y)dy, \tag{3}$$

где $\omega(\frac{x}{h^*_k})$ — ядро усреднения. Если ядро ω удовлетворяет перечисленным в первом параграфе условиям, то функция (3) принадлежит классу $B_{r,\gamma}(\Omega)$, равна нулю вне куба $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, в центре этого куба принимает значение $\geq C2^{-rN}$, причем С не зависит от кубов $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$.

Оценим n — количество кубов $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, образующих покрытие области Ω. Очевидно,

$$1 + m([2^{N+1}])^{l-1} + m\sum_{k=1}^{N-1}\left[\frac{2(1-2^{k-N})}{h_k}\right]^{l-1} \leq n \leq 1 + m([2^{N+1}]+1)^{l-1} + m\sum_{k=1}^{N-1}\left(\left[\frac{2(1-2^{k-N})}{h_k}\right]+1\right)^{l-1},$$

где $m = 2^l$. Нетрудно видеть, что

$$\sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{1-2^{k-N}}{h_k}\right)^{l-1} \leq \sum_{k=1}^{N-1}\left(\frac{2^N-2^k}{2^{k+1}-2^k}\right)^{l-1} \leq C2^{N(l-1)}.$$

Следовательно, $n \leq C2^{N(l-1)}$. Аналогичным образом доказывается обратное неравенство $n \geq C2^{N(l-1)}$. Поэтому

$$n = C2^{N(l-1)}. \tag{4}$$

Из результатов [5] о поперечниках Бабенко следует, что $\delta_n(B_{r,\gamma}(\Omega)) \geq A2^{-Nr}$. Учитывая связь между N и n, выраженную формулой (4), имеем

$$\delta_n(B_{r,\gamma}(\Omega)) \geq Cn^{-r/(l-1)}. \quad \square$$

Построим локальные сплайны, реализующие эту оценку. Один из таких сплайнов построен в ([3], с. 76–80). При его построении в каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ функция $f(x_1,\dots,x_l)$ аппроксимировалась отрезком ряда Тейлора. В результате локальный сплайн $f_N(x_1,\dots,x_l)$ был разрывным.

Построим локальный сплайн таким образом, чтобы в каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$ функция $f(x)$ аппроксимировалась интерполяционными полиномами. Это позволит построить в Ω непрерывный сплайн и тем самым оценить сверху поперечник Колмогорова.

Опишем построение интерполяционных полиномов. Обозначим через $\zeta_1,\dots,\zeta_r$ узлы полинома Чебышева 1 рода степени r, расположенные на сегменте $[-1,1]$. Отобразим сегмент $[\zeta_1,\zeta_r]$ на сегмент $[a,b]$ таким образом, чтобы точка ζ_1 перешла в точку a, а точка ζ_r перешла в точку b. Обозначим через $\zeta^*_1,\dots,\zeta^*_r$ образы точек $\zeta_1,\dots,\zeta_r$ при отображении сегмента $[\zeta_1,\zeta_r]$ на сегмент $[a,b]$. Полином степени $r-1$, интерполирующий функцию $g(t)$ в сегменте $[a,b]$ по узлам $\zeta^*_1,\dots,\zeta^*_r$, обозначим через $P_r(g,[a,b])$. Пусть $D=[a_1,b_1;\dots;a_l,b_l]$. Через $P_{r,\dots,r}(f,D)$ обозначим интерполяционный полином $P_{r,\dots,r}(f,D) = P^{x_1}_r(\dots(P^{x_l}_r(f,[a_l,b_l]),[a_{l-1},b_{l-1}]),\dots),[a_1,b_1])$, где верхние индексы в обозначениях $P^{x_i}_r$ обозначают переменную, по которой проводится интерполяция. Таким образом, интерполяционный полином $P_{r,\dots,r}(f,D)$ строится последовательным интерполированием функции $f(x)$ по переменным x_i, $i=1,\dots,l$, в сегментах $[a_i,b_i]$, $i=1,\dots,l$.

Пусть $\Omega=[-1,1]^l$. Покроем область Ω кубами $\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$, построение которых было описано выше при доказательстве теоремы 1. Построение локального сплайна начнем с куба Δ^N. В кубе Δ^N функция $f(x)$ интерполируется полиномом $P_{m,\dots,m}(f,\Delta^N)$, где $m=[2AN]+1$. Перейдем к области Δ^{N-1}. Эта область разбивается на такие кубы $\Delta^{N-1}_{i_1,\dots,i_l}$, чтобы вершины куба $\Delta^N_{i_1,\dots,i_l}$ входили в число точек разбиения. В каждом из кубов $\Delta^{N-1}_{i_1,\dots,i_l}$ функция $f(x)$ интерполируется полиномом $P_{m,\dots,m}(\overline{f},\Delta^{N-1}_{i_1,\dots,i_l})$, где $\overline{f}(x)=P_{m,\dots,m}(f,\Delta^N)$ на пересечении куба $\Delta^N_{i_1,\dots,i_l}$ и области Δ^{N-1} и $\overline{f}(x)=f(x)$ во всех остальных точках куба $\Delta^{N-1}_{i_1,\dots,i_l}$. Аналогичным образом проводятся построения в кубах $\Delta^k_{i_2,\dots,i_l}$, $k=0,1,\dots,N-2$.

Полученный в результате описанных построений сплайн обозначим через $f_N(x)$. Нетрудно видеть, что этот сплайн непрерывен в области Ω. Оценим погрешность аппроксимации функции $f(x)$ сплайном $f_N(x)$. При этом будем пользоваться следующими известными оценками точности аппроксимации интерполяционными полиномами.

Лемма 2.1 ([8], с. 273). *Если функция $f(t)$ имеет производные до r-го порядка, то при $r=1,3,5,\dots,$ и при $n\to\infty$*

$$|f(t)-P_n(f,[-1,1])| \leq \frac{K_r(1-t^2)^{r/2}}{2n^r}\ln n\omega\left(f^{(r)},\frac{\pi\sqrt{1-t^2}}{n}\right)+0(n^{-r}\omega(f^{(r)},n^{-1})),$$

где $\omega(f,\delta)$ — модуль непрерывности функции $f(t)$, K_r — константа Фавара.

Пусть $x\in\Delta^0_{i_1,\dots,i_l}$. Тогда

$$\|f(x)-f_N(x)\|_C \leq Ch^r_0 \leq C2^{-Nr}. \tag{5}$$

Пусть $x\in\Delta^k_{i_1,\dots,i_l}$. Используя при получении оценок производные до N-го порядка, имеем

$$\|f(x)-f_N(x)\|_C \leq \frac{A^N N^N 2^{k(r+1-\gamma)}}{2^{N(r+1-\gamma)}}\frac{1}{m^N}\ln^l N \leq C2^{-Nr}. \tag{6}$$

Из оценок (5), (6) имеем

$$\|f(x)-f_N(x)\|_C \leq C2^{-rN}. \tag{7}$$

Обозначим через n_1 число функционалов, используемых при построении локального сплайна $f_N(x)$. Очевидно, $n_1 = [Cm^l 2^{N(l-1)}] + 1$. Тогда $N = C(\frac{\log_2 n}{l-1} - \frac{l}{l-1}\log_2\log_2 n)$. Отсюда и из неравенства (7) следует оценка

$$\|f(x) - f_N(x)\|_C \leq Cn_1^{-r/(l-1)}. \qquad (8)$$

Таким образом, доказана

Теорема 2.2. *Пусть* $\Omega = [-1,1]^l$, $l \geq 2$; $r = 1, 2, \ldots,$; $0 \leq \gamma < 1$. *Справедлива оценка*

$$d_n(B_{r,\gamma}(\Omega), C) \leq Cn^{-r/(l-1)}.$$

Из сопоставления (2), (8) и известного [5] неравенства $\delta_n \leq 2d_n$, связывающего поперечники Бабенко и Колмогорова, вытекает

Теорема 2.3. *Пусть* $\Omega = [-1,1]^l$, $l \geq 2$; $r = 1, 2, \ldots,$; $0 \leq \gamma < 1$. *Справедлива оценка*

$$d_n(B_{r,\gamma}(\Omega), C) \asymp n^{-r/(l-1)}.$$

3. Кубатурные формулы

Будем вычислять интеграл

$$If = \int_\Omega f(x)dx,$$

где $\Omega = [-1,1]^l$, $l \geq 2$, $x = (x_1, \ldots, x_l)$, $M_k \in \Omega$, по кубатурным формулам

$$If = \sum_{k=1}^{n} p_k f(M_k) + R_n. \qquad (9)$$

Теорема 3.1. *Пусть* $\Omega = [-1,1]^l$, $l \geq 2$; $r = 1, 2, \ldots,$; $0 \leq \gamma < 1$. *Пусть* $\Psi = B_{r,\gamma}(\Omega)$. *Для всевозможных кубатурных формул вида* (9) *справедлива оценка*

$$\zeta_n(\Psi) \geq Cn^{-(r+1)/(l-1)}. \qquad (10)$$

Доказательство. Зафиксируем целое число N, величину которого определим ниже. Покроем область Ω кубами $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, построенными точно так же, как при доказательстве теоремы 2.1. Подберем число N таким образом, чтобы количество m кубов $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$, составляющих покрытие Ω, было не меньше $2n$. Так как кубатурная формула (9) имеет n узлов, то по крайней мере в n кубах $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ отсутствуют узлы кубатурной формулы (9). Обозначим эти кубы $\overline{\Delta}^k_{i_1,\ldots,i_l}$ и назовем их отмеченными. Обозначим через $f^*(x)$ функцию, равную нулю во всех неотмеченных кубах, а в каждом отмеченном кубе $\overline{\Delta}^k_{i_1,\ldots,i_l}$ равную функции $L^{*k}_{i_1,\ldots,i_l}(x)$, построение которой было описано в предыдущем параграфе. Нетрудно видеть, что $f^*(x) \in B_{r,\gamma}(\Omega)$ и что

$$\zeta_n(B_{r,\gamma}(\Omega)) \geq \int_\Omega f^*(x)dx \geq Cn \inf_k \left(\int_{\overline{\Delta}^k_{i_1,\ldots,i_l}} L^{*k}_{i_1,\ldots,i_l}(x)dx \right) \geq Cn \inf_k h_k^{r+l} \geq Cn2^{-N(r+l)}.$$

Учитывая установленную в предыдущем параграфе связь между n и N, имеем

$$\zeta_n(B_{r,\gamma}(\Omega)) \geq Cn^{-(r+1)/(l-1)}. \quad \square$$

Построим оптимальную по порядку кубатурную формулу.

Пусть N — целое число. Обозначим через Δ^k, $k = 1, 2, \ldots, N-1$, множество точек $x \in \Omega$, удовлетворяющих неравенствам $2^{k-N} \leq \rho(x, \Gamma) \leq 2^{k+1-N}$. Через Δ^0 обозначается множество точек $x \in \Omega$, удовлетворяющих неравенствам $0 \leq \rho(x, \Gamma) \leq 2^{1-N}$.

Области Δ^k, $k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, разобьем на кубы $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ способом, описанным выше. В каждом кубе $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ функцию $f(x)$ будем аппроксимировать интерполяционным полиномом $P_{m_k,\ldots,m_k}(f, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$, который построен в предыдущем параграфе. Здесь $m_k = [(k(l+r)+1)4A]+1$

при $k \geq 1$ и $m_0 = r$. Локальный сплайн, составленный из интерполяционных полиномов $P_{m_k,\ldots,m_k}(f, \Delta^k_{i_1,\ldots,i_l})$, обозначим через $f_N(x)$.

Теорема 3.2. *Пусть* $\Omega = [-1,1]^l$, $l \geq 2$; $r = 1,2,\ldots,$; $0 \leq \gamma < 1$. *Среди всевозможных кубатурных формул вида* (9) *кубатурная формула*

$$If = \int_\Omega f_N(x)dx + R_N \tag{11}$$

является оптимальной по порядку на классе $B_{r,\gamma}(\Omega)$.

Доказательство. Оценка снизу функционала $\zeta_n(B_{r,\gamma}(\Omega))$ была получена в теореме 3.1. Покажем, что оценка погрешности кубатурной формулы (11) совпадает (по порядку) с этой оценкой.

Нетрудно видеть, что

$$|R_N| \leq \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i_1,\ldots,i_l} \int_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}} |f(x) - f_N(x)|dx \leq \sum_{i_1,\ldots,i_l} \int_{\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}} |f(x) - f_N(x)|dx +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{i_1,\ldots,i_l} \int_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}} |f(x) - f_N(x)|dx = r_1 + r_2.$$

Оценим суммы r_1 и r_2 в отдельности. Очевидно,

$$r_1 \leq n_0 \int_{\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}} |f(x) - f_N(x)|dx \leq Cn_0 A^r r^r h_0^{r+l} \leq Cn_0 2^{-(r+l)N} \leq C2^{-(r+1)N}.$$

Здесь n_0 — число кубов $\Delta^0_{i_1,\ldots,i_l}$, размещенных в области Δ^0. Для r_2 оценка проводится сложнее

$$r_2 \leq C \sum_{k=1}^{N-1} n_k \int_{\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}} |f(x) - f_N(x)|dx \leq C \sum_{k=1}^{N-1} A^{s_k} s_k^{s_k} n_k h_k^{s_k+l} m_k^{-s_k} (\rho(\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}, \Gamma))^{-s_k+r+1-\gamma} \ln^l m_k.$$

Здесь $\rho(\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}, \Gamma)$ — расстояние от куба $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ до границы Γ области Ω, n_k — число кубов $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$ в области Δ^k, $s_k = [k(l+r)] + 1$ — число производных, используемое в оценке точности аппроксимации функции $f(x)$ локальным сплайном $f_N(x)$ в области $\Delta^k_{i_1,\ldots,i_l}$. Очевидно,

$$r_2 \leq C2^{-N(l+r)} \sum_{k=1}^{N-1} n_k \leq C2^{-N(l+r)} 2^{N(l-1)} = C2^{-(r+1)N}.$$

Из оценок для r_1 и r_2 следует $|R_N| \leq C2^{-(r+1)N}$.

Общее число функционалов n, используемое при построении локального сплайна $f_N(x)$ было оценено при доказательстве теоремы 2.3. Оно равно $n = O(2^{N(l-1)})$. Таким образом,

$$|R_N| \leq Cn^{-(r+1)/(l-1)}.$$

Из сопоставления этой оценки с неравенством (10) следует справедливость теоремы. □

Литература

1. Бабенко К.И. *О некоторых задачах теории приближений и численного анализа* // УМН. – 1985. – Т. 40. – № 1. – С. 3–28.
2. Бойков И.В. *Оптимальные по точности алгоритмы вычисления интегралов* // Оптимальн. методы вычисл. и их применение: Межвуз. сб. науч. тр. – Пенза: Пенз. политехн. ин-т, 1987. – № 8. – С. 4–22.
3. Бойков И.В. *Пассивные и адаптивные алгоритмы приближенного вычисления сингулярных интегралов.* – Пенза.: Изд-во Пенз. гос. техн. ун-та, 1995. – 214 с.
4. Бойков И.В. *Оптимальные кубатурные формулы вычисления многомерных интегралов на классе* $Q_{r,\gamma}(\Omega, 1)$ // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1990. – Т. 30. – № 8. – С. 1123–1132.

5. *Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов задач математической физики* / Под ред. К.И. Бабенко. – М.: Наука, 1979. – 296 с.
6. Бахвалов Н.С. *О свойствах оптимальных методов решения задач математической физики* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1970. – Т. 10. – № 3. – С. 555–568.
7. Соболев С.Л. *Введение в теорию кубатурных формул.* – М.: Наука, 1974. – 808 с.
8. Тиман А.Ф. *Теория приближения функций действительного переменного.* – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

Пензенский государственный технический университет

Поступила 23.01.1997