ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 11 (534)

УДК 517.12.2

Н.А. ЕРЗАКОВА

АСИМПТОТИЧЕСКИ ПРАВИЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Введение

Для произвольного банахова пространства X обозначим через $B(X) = \{x \in X : \|x\| \leqslant 1\}$ замкнутый шар. По теореме Брауэра о неподвижной точке непрерывное отображение $f : B(\mathbb{R}^N) \to B(\mathbb{R}^N)$ имеет неподвижную точку. Однако это не так, если $\dim(X) = \infty$. Первый пример непрерывного оператора без неподвижных точек, переводящего шар в шар, был построен Какутани [1] в пространстве последовательностей l_2. Особый интерес представляют примеры непрерывных операторов без неподвижных точек, наделенных дополнительно каким-либо свойством.

Пусть (X, d) — метрическое пространство, M — подмножество X. Отображение $T : M \to M$ называется асимптотически правильным на M, если

$$\lim_{n\to\infty} d(T^{n+1}x, T^n x) = 0$$

для каждого $x \in M$. Впервые понятие асимптотически правильного отображения введено Браудером и Петришиным в [2].

В данной статье доказано, что в произвольном бесконечномерном банаховом пространстве существует асимптотически правильное отображение $f : B(X) \to B(X)$ без неподвижных точек. Полученные результаты обобщают аналогичные результаты, полученные ранее (см. [3]–[5]) для частных случаев банаховых пространств.

Формулировка результатов

По теореме Банаха (см., напр., [6], с. 4, теорема 1.a.5) в каждом бесконечномерном банаховом пространстве можно найти бесконечномерное замкнутое подпространство $X_0 \subseteq X$ с базисом Шаудера $\{u_i\}$, $\|u_i\| = 1$, т. е. каждый элемент в X_0 однозначно представим в виде

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) u_i, \quad |\varphi_i(x)| \leqslant c\|x\| \tag{1}$$

для всех $x \in X_0$ и $i \in \mathbb{N}$, где φ_i — двойственный базис в X_0^*, $c > 0$ – некоторая постоянная. Зададим на X_0 функцию $p_0(x) := \sum\limits_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x)|$, вообще говоря, неограниченную. Пусть $\mathcal{N} := \{x \in X_0 : p_0(x) \leqslant 1\}$. Нетрудно видеть, что $\mathcal{N}$ — замкнутое выпуклое подмножество $B(X)$, содержащее нуль. По теореме 18.1 из ([7], с. 118) для произвольного числа $\alpha > 0$ существует проектор P_α на $\mathcal{N}$, причем $\|x - P_\alpha x\| \leqslant (1+\alpha) d(x, \mathcal{N})$ $(x \in X)$, где $d(x, \mathcal{N})$ — расстояние от x до $\mathcal{N}$.

Напомним, что непрерывный оператор P_α, определенный на всем X, называется проектором на $\mathcal{N}$, если $P_\alpha X = \mathcal{N}$ и $P_\alpha x = x$ при $x \in \mathcal{N}$.

Обозначим $p(x) := p_0(P_\alpha x)$.

Теорема 1. *Пусть X — произвольное бесконечномерное банахово пространство, фиксирована последовательность чисел*

$$\alpha_i > 0, \quad \alpha_i \downarrow, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \leqslant 1, \tag{2}$$

$u := \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i u_i$; $G(x) := -\sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i(P_\alpha x) u_i$; $F(x) := P_\alpha x + G(x)$; $w(x) := F(x) + (1 - p(x))u$.

Тогда

a) *G является компактным оператором;*

b) *$w : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$, $p_0(w(x)) < 1$ для всех $x \in \mathcal{N}$;*

c) *$f(x) := P_\alpha(w(x))$ является непрерывным отображением $B(X)$ в $\mathcal{N}$ без неподвижных точек и $f^n(x) = w^{n-1}(f(x))$.*

Теорема 2. *Пусть X — произвольное бесконечномерное банахово пространство. Тогда существует асимптотически правильное отображение на $B(X)$ без неподвижных точек.*

Доказательство результатов, комментарий

Доказательство теоремы 1. a) Покажем, что оператор G является компактным.

Действительно, для произвольного $\varepsilon > 0$ в силу (1) и ограниченности P_α существует такое $N(\varepsilon) > 0$, что $\sum\limits_{i=N(\varepsilon)+1}^{\infty} \alpha_i |\varphi_i(P_\alpha x)| \leqslant \varepsilon$ для всех $x \in X$. Поэтому $\left\| G(x) + \sum\limits_{i=1}^{N(\varepsilon)} \alpha_i \varphi_i(P_\alpha x) u_i \right\| \leqslant \varepsilon$. Таким образом, G аппроксимируется с любой точностью конечномерным оператором и, следовательно, это компактный оператор.

b) Пусть $x \in \mathcal{N}$ и, следовательно, $P_\alpha x = x$. Поэтому $p_0(w(x)) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{\infty} (1 - \alpha_i)|\varphi_i(x)| + 1 - p_0(x) < p_0(x) + 1 - p_0(x) = 1$. Следовательно, $p_0(w(x)) < 1$ для всех $x \in \mathcal{N}$ и $w(x) \in \mathcal{N}$, т. е. $w : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$.

c) Покажем, что $f(x)$ не имеет неподвижных точек. Действительно, предположим противное, пусть $f(x) = x$ для некоторого $x \in B(X)$. Так как $f(x) \in \mathcal{N}$, то $x \in \mathcal{N}$ и $x = w(x) = f(x)$. Отсюда получаем равенство $-\alpha_i \varphi_i(x) + (1 - p(x))\alpha_i = 0$ для всех i. Последнее противоречит стремлению $\varphi_i(x)$ к нулю с ростом i для $x \in \mathcal{N}$.

Равенство $f^n(x) = w^{n-1}(f(x))$ является следствием b) и определений f и w. $\square$

Доказательство теоремы 2. Покажем, что $f(x)$ из теоремы 1 задает асимптотически правильное отображение на $B(X)$ без неподвижных точек.

В силу утверждений b), c) из теоремы 1 достаточно показать асимптотическую правильность w на $\mathcal{N}$. Заметим, что $w(x) = x + G(x) + (1 - p_0(x))u$ для всех $x \in \mathcal{N}$. Кроме того, из компактности G следует предкомпактность множества $\{\lambda u + G\mathcal{N} : \lambda \in [0, 1]\}$. Отсюда равенство $w^{n+1}(x) - w^n(x) = F(w^n(x)) + (1 - p_0(w^n(x)))u - w^n(x) = G(w^n(x)) + (1 - p_0(w^n(x)))u$ влечет компактность $w^{n+1} - w^n$ на $\mathcal{N}$ для всех $n \geqslant 1$. Более того, $p_0(w^{n+1}(x) - w^n(x)) \leqslant 1$, т. е. $w^{n+1}(x) - w^n(x) \in \mathcal{N}$. Поэтому

$$w^{n+1}(x) - w^n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (\varphi_i(w^{n+1}) - \varphi_i(w^n)) u_i.$$

Из компактности $w^{n+1}(x) - w^n(x)$ в силу критерия компактности в пространстве с базисом следует

$$\lim_{k \to \infty} \sup_n \left\| \sum_{i=k}^{\infty} (\varphi_i(w^{n+1}) - \varphi_i(w^n)) u_i \right\| = 0.$$

Таким образом, для доказательства асимптотической правильности достаточно показать, что

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_i(w^n(x)) = 0 \tag{3}$$

для любого i.

По индукции получим $w^n(x) = F^n(x) + \sum\limits_{j=1}^{n}(1 - p_0(w^{j-1}(x)))F^{n-j}u$. Отсюда

$$\varphi_i(w^n(x)) = \varphi_i(F^n(x)) + \sum_{j=1}^{n}(1 - p_0(w^{j-1}(x)))\varphi_i(F^{n-j}u)$$

для любого функционала φ_i. Из определений F и u следует равенство

$$\varphi_i(w^n(x)) = \varphi_i(F^n(x)) + \sum_{j=1}^{n}(1 - p_0(w^{j-1}(x)))(1-\alpha_i)^{n-j}\alpha_i. \tag{4}$$

Так как для всех i

$$\sum_{j=1}^{n}(1-\alpha_i)^{n-j}\alpha_i \leqslant \alpha_i \sum_{j=0}^{\infty}(1-\alpha_i)^j = 1 \tag{5}$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_i(F^n(x)) = \lim\limits_{n\to\infty}(1-\alpha_i)^n\varphi_i(x) = 0$, то в силу (4) и теоремы Теплица будет справедливо (3), если покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} p_0(w^n(x)) = 1 \tag{6}$$

для произвольного $x \in \mathcal{N}$, и тем самым завершим доказательство асимптотической правильности w.

Доказывая равенство (6) от противного, предположим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ существует бесконечная последовательность таких номеров $\{n_m(\varepsilon)\}_{m=1}^{\infty}$, для которых

$$1 - p_0(w^{n_m(\varepsilon)}(x)) > \varepsilon \tag{7}$$

при всех m.

Для $\varepsilon > 0$, i и n обозначим

$$\beta(\varepsilon, i, n) := \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ (1-p_0(w^{j-1}(x)))>\varepsilon}} (1-\alpha_i)^{n-j}\alpha_i.$$

Заметим, что при $n_m(\varepsilon) - n_{m-1}(\varepsilon) > 2$

$$\beta(\varepsilon, i, n_m - 1) = (1-\alpha_i)^{-1}\beta(\varepsilon, i, n_m(\varepsilon)) = \sum_{j=1}^{m-1}(1-\alpha_i)^{n_m(\varepsilon)-n_j(\varepsilon)-2}\alpha_i. \tag{8}$$

Отсюда, принимая во внимание (5),

$$\beta(\varepsilon, i, n_m - 1) \leqslant (1-\alpha_i)^{n_m(\varepsilon)-n_{m-1}(\varepsilon)-2}. \tag{9}$$

Из (4) следует, что для всех n и i

$$\varepsilon\beta(\varepsilon, i, n) \leqslant \varphi_i(w^n(x)) - (1-\alpha_i)^n\varphi_i(x) \leqslant \beta(\varepsilon, i, n) + \varepsilon. \tag{10}$$

Будем предполагать существование таких чисел $c > 0$ и $\varepsilon > 0$, что для всех m имеет место неравенство

$$n_m(\varepsilon) - n_{m-1}(\varepsilon) \leqslant c. \tag{11}$$

В противном случае для некоторой подпоследовательности номеров из $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$, обозначаемой для простоты так же, получим

$$\lim_{m\to\infty} p_0(w^{n_m-1}(x)) = 1, \tag{12}$$

т.к. $1 - p_0(w^{n_m}(\varepsilon)) > \varepsilon > \varepsilon_1$ при $\varepsilon_1 < \varepsilon$ и последовательность номеров $\{n_m(\varepsilon_1)\}$ включает последовательность $\{n_m(\varepsilon)\}$.

Более того, из (9), в частности, для этой же подпоследовательности номеров будем иметь $\lim\limits_{m\to\infty}\beta(\varepsilon,i,n_m-1)=0$ при всех $\varepsilon>0$. Отсюда, полагая в (10) ε сколь угодно малым, приходим к заключению

$$\lim_{m\to\infty}\varphi_i(w^{n_m-1}(x))=0, \tag{13}$$

что вместе с (12) противоречит (7).

Действительно, по определению w для всех i имеем

$$\varphi_i(w^{n_m}(x))=(1-\alpha_i)\varphi_i(w^{n_m-1}(x))+(1-p_0(w^{n_m-1}(x)))\alpha_i.$$

Для произвольного $\varepsilon>0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что

$$\sum_{i=N(\varepsilon)+1}^{\infty}\alpha_i<\varepsilon/3.$$

В силу (12) найдется такой номер M_1, что для всех $m>M_1$ выполнено неравенство $1-p_0(w^{n_m-1}(x))<\varepsilon/3$. Согласно (13) найдется такой номер $M_2>M_1$, что для всех $m>M_2$ и номеров $1\leqslant i\leqslant N$ имеет место $|\varphi_i(w^{n_m-1}(x))|<\varepsilon/3$. Отсюда для всех $m>M_2$

$$\begin{aligned}
p_0(w^{n_m}(x)-w^{n_m-1}(x))&=\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_i(w^{n_m}(x)-w^{n_m-1}(x))|=\\
&=\sum_{i=1}^{\infty}|(1-\alpha_i)\varphi_i(w^{n_m-1}(x))+(1-p_0(w^{n_m-1}(x)))\alpha_i-\varphi_i(w^{n_m-1}(x))|\leqslant\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|-\alpha_i\varphi_i(w^{n_m-1}(x))|+(1-p_0(w^{n_m-1}(x)))\leqslant\\
&\leqslant\sum_{i=1}^{N}|-\alpha_i\varphi_i(w^{n_m-1}(x))|+\sum_{i=N+1}^{\infty}\alpha_i+(1-p_0(w^{n_m-1}(x)))\leqslant\varepsilon.
\end{aligned}$$

В силу произвольности выбора ε получим $\lim\limits_{m\to\infty}p_0(w^{n_m}(x)-w^{n_m-1}(x))=0$, откуда в силу (12) $\lim\limits_{m\to\infty}p_0(w^{n_m}(x))=1$, что противоречит (7).

Итак, пусть справедливо (11), тогда в силу (8) при всех i величина $\beta(\varepsilon,i,n)$ с ростом n оценивается снизу суммой геометрической прогрессии

$$\alpha_i\sum_{t=0}^{\infty}(1-\alpha_i)^{ct+k}=\frac{(1-\alpha_i)^k\alpha_i}{1-(1-\alpha_i)^c}$$

для $c\geqslant 1$ и некоторого $k\geqslant 1$. Так как $\lim\limits_{i\to\infty}\frac{(1-\alpha_i)^k\alpha_i}{1-(1-\alpha_i)^c}=\frac{1}{c}$ для всех i, то в силу (10) получим $\varphi_i(w^n(x))\geqslant\varepsilon/c$ для достаточно больших n и всех i. Последнее противоречит неравенству

$$p_0(w^n(x))<1 \tag{14}$$

для всех n, вытекающему из b) теоремы 1.

Действительно, выберем номер I с условием $\varepsilon I/c>4$. Для каждого $1\leqslant i\leqslant I$ в силу вышесказанного найдется такое натуральное число $N(i)$, что $|\varphi_i(w^n(x))|>\varepsilon/(2c)$ при $n\geqslant N(i)$. Поэтому при всех $n\geq N=\max\{N(1),\dots,N(I)\}$ получим противоречивое с (14) неравенство

$$p_0(w^n(x))=\sum_{i=1}^{\infty}|\varphi_i(w^n(x))|>(\varepsilon I)/c>2,$$

что завершает доказательство (6) и асимптотической правильности w. □

Замечание. Конструкция, аналогичная f из теоремы 1, использовалась для построения примера непрерывного отображения без неподвижных точек, переводящего шар в шар, в [3] для гильбертова пространства, в [4] для банаховых пространств с базисом и монотонной нормой и в [5] для произвольного бесконечномерного банахова пространства. Здесь приводится другое обобщение на случай произвольного бесконечномерного банахова пространства. Асимптотическая правильность f утверждалась в [4], [5] для банаховых пространств с базисом и монотонной нормой. В данной работе асимптотическая правильность f доказывается для произвольного бесконечномерного банахова пространства.

Литература

1. Kakutani S. *A generalization of Brouwer's fixed point theorem* // Duke Math. J. – 1941. – № 8. – P. 457–459.
2. Browder F.E., Petryshyn W.V. *The solution by iteration of nonlinear functional equations in Banach spaces* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1966. – № 72. – P. 571–576.
3. Ерзакова Н.А. *О некоторых отображениях нелинейного анализа* // Современ. методы теории краевых задач. – Воронеж, 2004. – С. 82–83.
4. Ерзакова Н.А. *О ретракции и других отображениях связанных с ней* // Геометрич. анализ и его прилож. – Волгоград, 2004. – С. 50–52.
5. Appell J., Erzakova N.A., Santana S.F., Väth M. *On some Banach space constants arising in nonlinear fixed point and eigenvalue theory* // Fixed Point Theory and Applications. – 2004. – № 4. – P. 317–336.
6. Lindenstrauss J., Tzafriri L. *Classical Banach Spaces* I. *Sequence Spaces.* – Berlin: Springer, 1977. – 190 p.
7. Красносельский М.А., Забрейко П.П. *Геометрические методы нелинейного анализа.* – М.: Наука, 1975. – 512 с.

Московский государственный
институт электронной техники

Поступила
08.05.2005