ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 12 (439)

УДК 517.977

Л.Т. АЩЕПКОВ, Ю.Б. СТЕГОСТЕНКО

СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕРВАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Введение

Проблема реализации желаемых движений управляемой системы занимает важное место в теории автоматического регулирования. В линеаризованной форме она трактуется как задача стабилизации движений линейной системы в окрестности положения равновесия. Среди известных подходов к решению задачи отметим теорию устойчивости [1], динамическое программирование [2], оптимальное [3], адаптивное [4] и упреждающее [5] управления, аналитическое конструирование регулятора [6] и др.

В этой работе задача стабилизации решается с помощью методов упреждающего управления (predictive control) и интервального анализа. В основе концепции упреждающего управления [5] лежит представление о том, что значение управления в текущий момент времени t менее подвержено действию различного рода возмущений, если оно найдено с учетом будущего поведения системы на интервале времени $(t, t+h)$ с выбранным горизонтом планирования $h > 0$. Применительно к рассматриваемой системе рекуррентных уравнений это означает необходимость просчитывать ее фазовое состояние на несколько тактов времени вперед, т. е. оперировать с линейной комбинацией неопределенных векторов. Если потребовать, чтобы линейная комбинация "совпадала" с положением равновесия рекуррентного уравнения, то мы естественно приходим к системе линейных алгебраических уравнений с интервальными оценками коэффициентов и методам интервального анализа [7]–[9] для ее решения. В данном случае применяется понятие универсального решения [9], используемого в теории живучести [10]. Оно определяет одно детерминированное (вообще говоря, не единственное) решение интервальной системы уравнений для всей области значений ее коэффициентов или для некоторого "максимального" подмножества этой области. В результате удается найти стабилизирующее управление в виде линейной функции фазовых координат, оценить степень приближения решения рекуррентного уравнения к положению равновесия, получить условия на интервальные коэффициенты, гарантирующие притяжение траекторий замкнутой системы к положению равновесия, и выяснить возможные обобщения результатов.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему линейных рекуррентных уравнений

$$x_i^{t+1} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^t + \sum_{k=1}^{r} b_{ik} u_k^t, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad t = 0, 1, \dots, \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 97-01-00083) и Российского гуманитарного научного фонда (проект 1996-02-02010).

где x_i^t, u_k^t — переменные состояния и управления на шаге t, a_{ij}, b_{ik} — неопределенные коэффициенты, удовлетворяющие условиям

$$|a_{ij} - a_{ij0}| \le \Delta a_{ij}, \quad |b_{ik} - b_{ik0}| \le \Delta b_{ik}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n; \;\; k = 1, 2, \ldots, r, \tag{2}$$

a_{ij0}, b_{ik0} — произвольные, Δa_{ij}, Δb_{ik} — неотрицательные вещественные числа, n, r — целые положительные числа.

Составив из переменных, неопределенных коэффициентов и заданных чисел стандартным образом векторы (столбцы) x^t, u^t и матрицы A, B, A_0, B_0, ΔA, ΔB соответствующих размеров, перепишем (1), (2) в векторно-матричной форме

$$x^{t+1} = Ax^t + Bu^t, \quad t = 0, 1, \ldots, \tag{3}$$

$$|A - A_0| \le \Delta A, \quad |B - B_0| \le \Delta B. \tag{4}$$

Здесь и далее операции типа (4) над матрицами понимаются поэлементно в смысле (2).

Требуется найти управление $u^t(x) : R^n \to R^r$, $t = 0, 1, \ldots$, так, чтобы последовательность векторов $x^0, x^1, \ldots$, генерируемая рекуррентным уравнением

$$x^{t+1} = Ax^t + Bu^t(x^\tau), \quad t = \tau, \tau + 1, \ldots, \tau + p - 1; \;\; \tau = 0, p, 2p, \ldots, \tag{5}$$

сходилась к точке $x = 0$ для любых значений A, B, удовлетворяющих (4), и любых начальных векторов x^0 из шара $\|x\| \le R$ некоторого радиуса $R > 0$. Символом $\|x\| = (x'x)^{1/2}$ здесь и далее обозначается евклидова норма вектора $x \in R^n$.

При решении задачи будем предполагать существование натурального числа p, $pr \ge n$, для которого ранг матрицы $(B_0, A_0B_0, \ldots, A_0^{p-1}B_0)$ равен n.

2. Редукция задачи. Оценка коэффициентов

Для произвольного фиксированного шага t положим $x^t = x$. Применяя рекурсию (3) последовательно $p \ge 1$ раз, получим

$$\begin{aligned} x^{t+1} &= Ax + Bu^t, \\ x^{t+2} &= A^2x + ABu^t + Bu^{t+1}, \\ &\;\cdots\cdots\cdots \\ x^{t+p} &= A^px + A^{p-1}Bu^t + \cdots + ABu^{t+p-2} + Bu^{t+p-1}. \end{aligned}$$

Как видно, x^{t+p} представляет собой линейную комбинацию неопределенных векторов. В соответствии с постановкой задачи потребуем, чтобы выполнялось условие $x^{t+p} = 0$ или

$$A^{p-1}Bu^t + \cdots + ABu^{t+p-2} + Bu^{t+p-1} = -A^px, \tag{6}$$

т. е. неизвестные $u^t, u^{t+1}, \ldots, u^{t+p-1}$ удовлетворяли в указанном ниже смысле системе линейных алгебраических уравнений с неопределенными коэффициентами.

Займемся оценкой коэффициентов уравнения (6). Покажем, что в принятых обозначениях для любого натурального $k \ge 1$ справедливо матричное неравенство

$$|A^k - A_0^k| \le (|A_0| + \Delta A)^k - |A_0|^k. \tag{7}$$

Действительно, при $k = 1$ неравенство (7) выполняется в силу (4). Пусть оно верно при $k = m$, $m \ge 1$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} A^{m+1} = AA^m = [A_0 + (A - A_0)][A_0^m + (A^m - A_0^m)] = \\ = A_0^{m+1} + (A - A_0)A_0^m + A_0(A^m - A_0^m) + (A - A_0)(A^m - A_0^m). \end{aligned}$$

В силу очевидных свойств модуля матрицы и условия (4) имеем

$$|A| \le |A_0| + |A - A_0| \le |A_0| + \Delta A,$$
$$|(A - A_0)A_0^m| \le |A - A_0|\,|A_0^m| \le \Delta A|A_0|^m,$$
$$|(A - A_0)(A^m - A_0^m)| \le \Delta A|A^m - A_0^m|,$$

поэтому из последнего равенства получим

$$|A^{m+1} - A_0^{m+1}| \le \Delta A|A_0|^m + |A_0|\,|A^m - A_0^m| + \Delta A|A^m - A_0^m| =$$
$$= \Delta A|A_0|^m + (|A_0| + \Delta A)|A^m - A_0^m|.$$

Усилим данное неравенство, воспользовавшись индуктивным предположением о справедливости (7) при $k = m$. После очевидных преобразований убеждаемся, что оно примет вид (7) при $k = m + 1$. Утверждение доказано.

Из неравенства (7) при $k = p$ в качестве следствия вытекает оценка интервального вектора $A^p x$

$$|A^p x - A_0^p x| \le |A^p - A_0^p|\,|x| \le [(|A_0| + \Delta A)^p - |A_0|^p]|x|. \tag{8}$$

Точно так же получим поэлементную оценку матрицы $A^k B$

$$|A^k B - A_0^k B_0| \le |A^k B - A_0^k B| + |A_0^k B - A_0^k B_0| \le |A^k - A_0^k|\,|B| + |A_0^k|\,|B - B_0| \le$$
$$\le [(|A_0| + \Delta A)^k - |A_0|^k](|B_0| + \Delta B) + |A_0|^k \Delta B, \quad k = 1, 2, \ldots, p - 1. \tag{9}$$

В оценках (8), (9), как легко видеть, фигурируют “центры” и “полудлины” соответствующих интервальных оценок векторов и матриц

$$\begin{aligned} &(A^p x)_0 = A_0^p x, \quad (A^k B)_0 = A_0^k B_0,\\ &\Delta(A^p x) = [(|A_0| + \Delta A)^p - |A_0|^p]|x|,\\ &\Delta(A^k B) = [(|A_0| + \Delta A)^k - |A_0|^k](|B_0| + \Delta B) + |A_0|^k \Delta B,\\ &\qquad k = 1, 2, \ldots, p - 1. \end{aligned} \tag{10}$$

Отметим, что в классе всех интервальных матриц A, B размерности $n \times n$, $n \times r$ и неотрицательных векторов x из R^n оценки (8), (9) не улучшаемы. Это легко видно при $|A| \le \Delta A$, $|B| \le \Delta B$ и $x \ge 0$.

Перейдем к изложению вспомогательных сведений, связанных с уравнением (6).

3. Субуниверсальное решение системы линейных интервальных уравнений

Предметом нашего внимания будет система линейных алгебраических уравнений

$$Cy = d \tag{11}$$

с интервальной матрицей C и интервальным вектором d,

$$|C - C_0| \le \Delta C, \quad |d - d_0| \le \Delta d, \tag{12}$$

размерности $m \times n$, $m \times 1$ соответственно. Здесь C_0 — заданная матрица ранга $m \le n$, d_0 — заданный вектор, ΔC, Δd — заданные неотрицательные матрица и вектор соответствующих размерностей.

Уравнение (11) как самостоятельный объект исследования изучено достаточно обстоятельно (см., напр., [7]–[9]). В литературе приведены различные определения решений, рассмотрены их свойства и методы нахождения. Исходя из целей работы, удобно воспользоваться понятием универсального решения [9] системы (11) с необходимой модификацией. Приведем в конспективной форме нужные нам результаты.

Пусть ε — неотрицательный вектор из R^m. Назовем вектор $y \in R^n$ ε-решением системы уравнений (11), если для любых C, d, удовлетворяющих (12), выполнено неравенство $|Cy-d| \le \varepsilon$.

Очевидно, точка y будет ε-решением уравнения (11) в том и только том случае, если совместна система неравенств

$$\begin{aligned} C_0 y + \Delta C|y| - \varepsilon &\le d_0 - \Delta d, \\ -C_0 y + \Delta C|y| - \varepsilon &\le -d_0 - \Delta d. \end{aligned} \tag{13}$$

Складывая неравенства, получим

$$\varepsilon \ge \Delta C|y| + \Delta d.$$

Следовательно, для ε-решения уравнения (11)

$$\varepsilon(y) = \Delta C|y| + \Delta d \tag{14}$$

— наименьшая по норме невязка. Полагая в (13) $\varepsilon = \varepsilon(y)$ и учитывая (14), находим условие

$$C_0 y = d_0 \tag{15}$$

на соответствующие векторы y. С точки зрения уменьшения координат невязки (14) наибольший интерес имеет нормальное решение

$$\widehat{y} = C_0^+ d_0 \quad (C_0^+ = C_0'(C_0 C_0')^{-1}) \tag{16}$$

уравнения (15) с минимальной ([11], с. 36) евклидовой нормой. Это решение с соответствующей невязкой

$$\widehat{\varepsilon} = \Delta C|\widehat{y}| + \Delta d \tag{17}$$

назовем субуниверсальным решением интервального уравнения (11). По смыслу имеем $|C\widehat{y}-d| \le \widehat{\varepsilon}$ на множествах (12) значений C и d.

Выясним вопрос о близости субуниверсального решения к универсальному — наилучшему в смысле минимума суммы невязок ε-решению уравнения (11). Используя (13), сформулируем задачу нелинейного программирования для нахождения универсального решения:

$$\begin{gathered} e'\varepsilon \to \min, \\ C_0 y + \Delta C|y| - \varepsilon \le d_0 - \Delta d, \\ -C_0 y + \Delta C|y| - \varepsilon \le -d_0 - \Delta d, \\ \varepsilon \ge 0. \end{gathered} \tag{18}$$

Здесь y, ε — неизвестные векторы и e – вектор с единичными координатами.

Задача (18) в определенном смысле равносильна задаче линейного программирования

$$\begin{gathered} e'\varepsilon \to \min, \\ C_0 y + \Delta C s - \varepsilon \le d_0 - \Delta d, \\ -C_0 y + \Delta C s - \varepsilon \le -d_0 - \Delta d, \\ -s \le y \le s, \quad \varepsilon \ge 0 \end{gathered} \tag{19}$$

с неизвестными векторами y, ε, s.

Связь между задачами (18), (19) состоит в следующем. Множество планов (допустимых точек) (y, ε) задачи (18) есть ортогональная проекция множества планов (y, ε, s) задачи (19) на подпространство переменных y, ε. Задача (19) имеет оптимальный план, и каждому ее оптимальному плану $(y^*, \varepsilon^*, s^*)$ отвечает оптимальный план (y^*, ε^*) задачи (18).

Из теории линейного программирования известно ([12], с. 90), что разрешимость задачи (19) влечет разрешимость двойственной задачи

$$\begin{aligned}(-d_0 + \Delta d)'\lambda_1 + (d_0 + \Delta d)'\lambda_2 &\to \max,\\ -C_0'\lambda_1 + C_0'\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 &= 0,\\ -\Delta C\lambda_1 - \Delta C\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 &= 0,\\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_5 &= e,\\ \lambda_1 \geq 0,\ \ldots,\ \lambda_5 &\geq 0.\end{aligned} \tag{20}$$

Кроме того, на любых планах двойственных задач справедливо неравенство

$$(-d_0 + \Delta d)'\lambda_1 + (d_0 + \Delta d)'\lambda_2 \leq \mu^* \leq e'\varepsilon. \tag{21}$$

Здесь μ^* — минимум целевой функции в задаче (19). В частности, неравенства (21) выполняются для планов

$$\widehat{y} = C_0^+ d_0, \quad \widehat{\varepsilon} = \Delta C|\widehat{y}| + \Delta d, \quad \widehat{s} = |\widehat{y}|;$$
$$\widehat{\lambda}_1 = \widehat{\lambda}_2 = 0,5e, \quad \widehat{\lambda}_3 = \widehat{\lambda}_4 = 0,5\Delta C'e, \quad \widehat{\lambda}_5 = 0$$

задач (19),(20). Отсюда получим оценку близости по целевой функции плана $(\widehat{y}, \widehat{\varepsilon}, \widehat{s})$ к оптимальному в задаче (19)

$$e'\widehat{\varepsilon} - \mu^* \leq e'\widehat{\varepsilon} - e'\Delta d = e'\Delta C|\widehat{y}|. \tag{22}$$

Таким образом, отклонение субуниверсального решения (16) интервального уравнения (11) от универсального — наименьшего по сумме невязок — пропорционально норме матрицы ΔC.

4. Синтез управления

Вернемся к приближенному решению уравнения (6) с интервальными оценками коэффициентов (8), (9). Положим

$$C = (B, AB, \ldots, A^{p-1}B), \quad d = -A^p x.$$

Тогда уравнение (6) можно записать в виде (11), где вектор $y \in R^{pr}$ составлен последовательно из координат искомых векторов $u^{t+p-1}, u^{t+p-2}, \ldots, u^t$. Интервалы изменения C, d определяются параметрами

$$\begin{aligned}C_0 &= (B_0, A_0B_0, \ldots, A_0^{p-1}B_0), \quad d_0 = -A_0^p x,\\ \Delta C &= (\Delta B, \Delta(AB), \ldots, \Delta(A^{p-1}B)),\\ \Delta d &= [(|A_0| + \Delta A)^p - |A_0|^p]|x|\end{aligned} \tag{23}$$

и формулами (10). По предположению матрица C_0 имеет ранг n, поэтому по критерию Грама [11] матрица C_0C_0' неособенная. По формуле (16), полагая

$$K = (C_0C_0')^{-1} = \left(\sum_{k=0}^{p-1} A_0^k B_0 B_0' A_0^{k\prime}\right)^{-1}, \tag{24}$$

находим субуниверсальное решение интервального уравнения (6), (8), (9) в виде

$$\begin{aligned}\widehat{u}^{t+p-1}(x) &= -B_0'KA_0^p x,\\ \widehat{u}^{t+p-2}(x) &= -B_0'A_0'KA_0^p x,\\ &\ldots\ldots\ldots\\ \widehat{u}^t(x) &= -B_0'A_0^{p-1\prime}KA_0^p x.\end{aligned} \tag{25}$$

В силу формулы (17) соответствующая решению (25) невязка $\widehat{\varepsilon}(x)$ уравнения (6) равна

$$\widehat{\varepsilon}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \Delta(A^k B)|\widehat{u}^{t+p-k-1}(x)| + \Delta(A^p x). \tag{26}$$

Отсюда с учетом (10), (25) находим оценку невязки

$$\widehat{\varepsilon}(x) \le M_p |x|, \tag{27}$$

где неотрицательная матрица M_p порядка n имеет вид

$$M_p = L_p + N_p, \tag{28}$$
$$L_p = (|A_0| + \Delta A)^p - |A_0|^p,$$
$$N_p = \sum_{k=0}^{p-1} |L_k(|B_0| + \Delta B) + |A_0|^k \Delta B|\, |B_0' A_0^{k\prime} K A_0^p|.$$

Обозначим через $\nu^*(x)$ минимум суммы невязок уравнения (6) с интервальными коэффициентами (8), (9), т.е. аналог числа μ^* для уравнения (11). По формуле (22) с использованием (23), (26), (28) получим

$$e'\widehat{\varepsilon}(x) - \nu^*(x) \le e' N_p |x|. \tag{29}$$

Отметим, что решение (25) не зависит от t и, следовательно, может использоваться на любом шаге, например, начиная с $t = 0$. Кроме того, в оценках (27), (29) матричные коэффициенты L_p, M_p, N_p стремятся по норме к нулю, если $\|\Delta A\| + \|\Delta B\| \to 0$. В частности, при $\Delta A = 0$, $\Delta B = 0$ формулы (25) дают точное решение уравнения (6).

5. Стабилизация системы

Будем считать, что для уравнения (3) начальная точка $x^0 \in R^n$ выбрана произвольно и управления

$$u^\tau = \widehat{u}^\tau(x^\tau), \quad u^{\tau+1} = \widehat{u}^{\tau+1}(x^\tau), \dots, u^{\tau+p-1} = \widehat{u}^{\tau+p-1}(x^\tau) \tag{30}$$

вида (25) реализуются последовательно для $\tau = 0, p, 2p, \dots$ Соответствующую последовательность фазовых векторов системы (3), (30) обозначим $\widehat{x}^0, \widehat{x}^1, \widehat{x}^2, \dots$, где $\widehat{x}^0 \equiv x^0$. В силу определения управлений (30) и оценки (27) справедливы неравенства

$$|\widehat{x}^p - 0| \le \widehat{\varepsilon}(\widehat{x}^0) \le M_p |\widehat{x}^0|,$$
$$|\widehat{x}^{2p} - 0| \le \widehat{\varepsilon}(\widehat{x}^p) \le M_p |\widehat{x}^p|,$$
$$\dots\dots\dots$$

Отсюда

$$|\widehat{x}^{kp}| \le M_p^k |x^0|, \quad k = 1, 2, \dots,$$

следовательно, если евклидова норма $\|M_p\|$ матрицы M_p меньше 1, то $\widehat{x}^{kp} \to 0$ при $k \to \infty$ для любой точки $x^0 \in R^n$. В силу линейности управлений (30) по x^τ и линейности рекуррентной системы (3) из сходимости последовательности $\widehat{x}^0, \widehat{x}^p, \widehat{x}^{2p}, \dots$ к нулю вытекает сходимость последовательности $\widehat{x}^0, \widehat{x}^1, \widehat{x}^2, \dots$ к нулю.

Итак, установлена

Теорема. *Для того чтобы рекуррентное уравнение* (3) *с интервальными коэффициентами* (4)*, замыкаемое управлениями* (30) *при* $\tau = 0, p, 2p, \dots$*, имело асимптотически устойчивое в целом положение равновесия* $x = 0$*, достаточно, чтобы при некотором натуральном* p*,* $pr \ge n$*, были выполнены одновременно два условия*:

1) *ранг матрицы* $(B_0, A_0 B_0, \dots, A_0^{p-1} B_0)$ *равен* n*,*

2) $\|M_p\| \le 1$ *для матрицы* M_p, *определенной формулами* (28), (24).

Отметим, что условие 1) теоремы означает полную управляемость детерминированной системы

$$x^{\tau+1} = A_0 x^\tau + B_0 u^\tau, \quad \tau = 0, 1, \ldots, \tag{31}$$

за p тактов управления. Условие 2) выполняется для любых A_0, B_0, если матрицы ΔA, ΔB достаточно малы по норме.

Если в системе (3), (4) ранг матрицы B_0 равен n и выполнено условие

$$\|\Delta A + \Delta B |B_0' K A_0| \,\| \le 1 \quad (K = (B_0 B_0')^{-1}),$$

то для стабилизации системы можно использовать на каждом шаге управление типа обратной связи

$$u(x^t) = \widehat{u}(x^t) = -B_0' K A_0 x^t, \quad t = 0, 1, \ldots,$$

соответствующее $p = 1$. По теореме оно обеспечивает притяжение решений замкнутой системы (5) к началу координат для любой начальной точки $x^0 \in R^n$.

6. Обобщения результатов

Второе условие теоремы связывает стабилизируемость модели (3), (4) с ее точностью. В условиях управляемости невозмущенной системы (31) стабилизация возмущенной системы (3) гарантирована при малых диапазонах возмущений (4). Можно поставить вопрос в такой плоскости. Если невозмущенная система (31) управляема (за p тактов), но для заданных ΔA, ΔB условие стабилизируемости $\|M_p\| < 1$ не выполнено, то насколько надо повысить точность модели, т. е. уменьшить элементы матриц ΔA, ΔB, чтобы обеспечить стабилизируемость возмущенной системы (3). В случае, если элементы ΔA, ΔB уменьшать пропорционально, ответ на вопрос вытекает из теоремы. Действительно, заменим в постановке задачи и выводах матрицы ΔA, ΔB на $\gamma\Delta A$, $\gamma\Delta B$, где γ — неотрицательный параметр. Тогда в соответствии с (28) матрицы $L_p(\gamma)$, $N_p(\gamma)$, $M_p(\gamma)$ становятся матричными многочленами относительно γ, причем

$$L_p(0) = N_p(0) = M_p(0) = 0.$$

Следовательно, найдется такое максимальное число γ_0, $0 < \gamma_0 < 1$, что $\|M_p(\gamma)\| < 1$ для $0 < \gamma < \gamma_0$. Очевидно, число γ_0 и служит порогом точности модели, начиная с которого ее нельзя стабилизировать предложенным способом.

Второе направление обобщения результатов — отказ от предположения о полной наблюдаемости фазового вектора x^t. Тогда следует ввести уравнение наблюдения

$$y^t = Cx^t, \quad t = 0, 1, \ldots,$$

с интервальной $m \times n$-матрицей C, $|C - C_0| \le \Delta C$, $m \le n$, и дополнить систему уравнений (6) интервальным уравнением

$$Cx = y,$$

считая $y = y^t$ известным, а $x = x^t$ — неизвестным векторами. Записывая субуниверсальное решение данной системы, получим аналог формул (30), в которых управляющие воздействия будут выражены через вектор измерений y^t.

Третье направление — обобщение результатов на нестационарные системы вида

$$x^{t+1} = A_t x^t + B_t u^t, \quad t = 0, 1, \ldots,$$

с интервальными матрицами

$$|A_t - A| \le \Delta A, \quad |B_t - B| \le \Delta B, \quad t = 0, 1, \ldots,$$

значения которых лежат в одних и тех же интервалах изменения. В этом случае коэффициенты определяющего уравнения (6) меняются, но технология их оценки и метод решения уравнения остаются прежними. Наконец, комбинация третьего и четвертого направлений обобщения позволяет решить задачу стабилизации нестационарной многошаговой системы по результатам измерений фазового вектора.

Заключение

В работе предложен способ построения стабилизирующего управления типа обратной связи для многошаговой системы с мультипликативными интервальными неопределенностями. В теории автоматического регулирования такие модели традиционно считаются трудными для анализа, поскольку содержат произведения неопределенных коэффициентов на фазовые переменные и управления. Особенностью стабилизирующего управления является то, что оно зависит от одного фазового состояния системы в течение нескольких моментов квантования времени. Это дает определенные удобства для построения и использования управления в реальном масштабе времени. Установлены оценки близости и достаточные условия сходимости решений замкнутой системы к положению равновесия. Намечены пути обобщения результатов.

Литература

1. Барбашин Е.А. *Функции Ляпунова.* – М.: Наука, 1970. – 240 с.
2. Беллман Р. *Динамическое программирование.* – М.: Ин. лит., 1960. – 400 с.
3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* – М.: Физматгиз, 1961. – 388 с.
4. Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А. *Адаптивное управление динамическими объектами.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.
5. Kwon W.H. *Advances in predictive control*: *theory and applications.* – Seoul: Seoul National University, 1995. – 43 p.
6. Летов А.М. *Динамика полета и управление.* – М.: Наука, 1969. – 360 с.
7. Лакеев А.В., Носов С.И. *О множестве решений линейного уравнения с интервально заданным оператором и правой частью* // Сиб. матем. журн. – 1994. – Т. 35. – № 5. – С. 1074–1084.
8. Шарый С.П. *Алгебраический подход к анализу линейных статических систем с интервальной неопределенностью* // Актуальн. пробл. информатики, прикл. матем. и механ. – Красноярск, 1995. – С. 331–354.
9. Aschepkov L.T., Dolgy D.V. *The universal solutions of interval systems of linear algebraical equations* // Int. J. of Software Eng. and Knowledge Eng. – 1983. – V. 3. – № 4. – P. 477–485.
10. Ащепков Л.Т. *К проблеме повышения живучести управляемых систем* // Модели и мет. исслед. операций. – Новосибирск: Наука, 1988. – С. 69–85.
11. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1967. – 576 с.
12. Ашманов С.А. *Линейное программирование.* – М.: Наука, 1981.– 340 с.

Дальневосточный государственный университет (г. Владивосток)

Поступила 02.10.1997