ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 4 (467)

УДК 517.547.2

О.М. СУМЫК, М.Н. ШЕРЕМЕТА

ОЦЕНКИ МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА РЯДА ДИРИХЛЕ СНИЗУ

1°. Пусть $0 = \lambda_0 < \lambda_n \uparrow \infty$, $n \to \infty$, а ряд Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}, \quad s = \sigma + it, \tag{1}$$

имеет абсциссу абсолютной сходимости $\sigma_a = A \in (-\infty, +\infty]$. Для $\sigma < A$ пусть $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} : n \geq 0\}$ — максимальный член ряда (1). Через $\Omega(A)$ обозначим класс положительных неограниченных на $(-\infty, A)$ функций Φ таких, что производная Φ' непрерывная, положительная и возрастает к $+\infty$ на $(-\infty, A)$. Пусть φ — функция, обратная к Φ', а $\Psi(x) = x - \Phi(x)/\Phi'(x)$ — функция, ассоциированная с Φ по Ньютону. Тогда функция φ непрерывная и возрастающая к A на $(0, +\infty)$, а функция Ψ непрерывная и возрастающая к A на $(-\infty, A)$ [1]. В [1] доказано, что если $\ln |a_n| \leq -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всех $n \geq 0$, то $\ln \mu(\sigma, F) \leq \Phi(\sigma)$ для всех $\sigma < A$. Здесь рассмотрим случай, когда $\ln |a_n| \geq -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всех $n \geq 0$, и для $\ln \mu(\sigma, F)$ получим оценки снизу. Они зависят как от плотности показателей ряда (1), так и от роста функции Φ.

2°. Для $\Phi \in \Omega(A)$ и чисел $0 \leq a < b < +\infty$ положим

$$G_1(a, b; \Phi) = \frac{ab}{b-a} \int_a^b \Phi(\varphi(t)) \frac{dt}{t^2}, \quad G_2(a, b; \Phi) = \Phi\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \varphi(t) dt\right).$$

Тогда [2] $G_1(a, b; \Phi) < G_2(a, b; \Phi)$, а основной в этой статье является

Теорема 1. *Пусть $A \in (-\infty, +\infty]$, $\Phi \in \Omega(A)$, ряд Дирихле* (1) *имеет абсциссу абсолютной сходимости $\sigma_a = A$ и $\ln |a_n| \geq -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всех $n \geq 0$. Тогда, если $\sigma \in [\varphi(\lambda_n), \varphi(\lambda_{n+1})]$, то*

$$\ln \mu(\sigma, F) \geq \Phi(\sigma) + G_1(\lambda_n, \lambda_{n+1}; \Phi) - G_2(\lambda_n, \lambda_{n+1}; \Phi). \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим ряд Дирихле

$$F^{(1)}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)} \exp\{s\lambda_n\}, \quad a_n^{(1)} = \exp\{-\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n))\}. \tag{3}$$

Согласно приведенному выше результату из [1] $\ln \mu(\sigma, F^{(1)}) \leq \Phi(\sigma)$ для всех $\sigma \in (-\infty, A)$, а с другой стороны, $\ln a_n^{(1)} + \varphi(\lambda_n)\lambda_n = -\lambda_n \Psi(\varphi(\lambda_n)) + \varphi(\lambda_n)\lambda_n = \Phi(\varphi(\lambda_n))$, так что $\ln \mu(\varphi(\lambda_n), F^{(1)}) = \Phi(\varphi(\lambda_n))$. Отметим еще справедливое для всех $\sigma < A$ неравенство $\ln \mu(\sigma, F) \geq \ln \mu(\sigma, F^{(1)})$.

Поскольку $(x\Psi(\varphi(x)))' = (x\varphi(x) - \Phi(\varphi(x)))' = \varphi(x) + x\varphi'(x) - \Phi'(\varphi(x))\varphi'(x) = \varphi(x)$, то, если положим $\varkappa_n^{(1)} = \frac{\ln a_n^{(1)} - \ln a_{n+1}^{(1)}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$, имеем

$$\varkappa_n^{(1)} = \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \varphi(t) dt = \Phi^{-1}(G_2(\lambda_n, \lambda_{n+1}; \Phi)). \tag{4}$$

Так как функция φ возрастает к A на $(-\infty, A)$, то $\varphi(\lambda_n) < \varkappa_n^{(1)} < \varphi(\lambda_{n+1})$. Легко видеть, что $\ln a_n^{(1)} + \varkappa_n^{(1)}\lambda_n = \ln a_{n+1}^{(1)} + \varkappa_n^{(1)}\lambda_{n+1}$, $\ln a_n^{(1)} + \sigma\lambda_n \geq \ln a_{n+1}^{(1)} + \sigma\lambda_{n+1}$ при $\sigma \in [\varphi(\lambda_n), \varkappa_n^{(1)}]$ и $\ln a_n^{(1)} + \sigma\lambda_n \leq \ln a_{n+1}^{(1)} + \sigma\lambda_{n+1}$ при $\sigma \in [\varkappa_n^{(1)}, \varphi(\lambda_{n+1})]$. Поэтому

$$\ln \mu(\sigma, F^{(1)}) = \begin{cases} \ln a_n^{(1)} + \sigma\lambda_n, & \sigma \in [\varphi(\lambda_n), \varkappa_n^{(1)}]; \\ \ln a_{n+1}^{(1)} + \sigma\lambda_{n+1}, & \sigma \in [\varkappa_n^{(1)}, \varphi(\lambda_{n+1})]. \end{cases} \tag{5}$$

Предположим сначала, что $\varphi(\lambda_n) \leq \sigma \leq \varkappa_n^{(1)}$. Тогда, учитывая (5), имеем $\{\ln \mu(\sigma, F^{(1)}) - \Phi(\sigma)\}' = \{\ln a_n^{(1)} + \sigma\lambda_n - \Phi(\sigma)\}' = \lambda_n - \Phi'(\sigma) \leq \lambda_n - \Phi'(\varphi(\lambda_n)) = 0$, и в силу (4)

$$\begin{aligned} \ln \mu(\sigma, F^{(1)}) - \Phi(\sigma) &\geq \ln \mu(\varkappa_n^{(1)}, F^{(1)}) - \Phi(\varkappa_n^{(1)}) = \\ &= \ln a_n^{(1)} + \varkappa_n^{(1)}\lambda_n - \Phi(\varkappa_n^{(1)}) = \\ &= \frac{\lambda_{n+1}\ln a_n^{(1)} - \lambda_n \ln a_{n+1}^{(1)}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} - \Phi(\varkappa_n^{(1)}) = \\ &= \frac{-\lambda_{n+1}\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n)) + \lambda_n\lambda_{n+1}\Psi(\varphi(\lambda_{n+1}))}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} - \Phi(\varkappa_n^{(1)}) = \\ &= \frac{\lambda_{n+1}\lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}(\Psi(\varphi(\lambda_{n+1})) - \Psi(\varphi(\lambda_n))) - \Phi(\varkappa_n^{(1)}) = \\ &= \frac{\lambda_{n+1}\lambda_n}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} \Phi(\varphi(x))\frac{dx}{x^2} - \Phi(\varkappa_n^{(1)}) = \\ &= G_1(\lambda_n, \lambda_{n+1}; \Phi) - G_2(\lambda_n, \lambda_{n+1}; \Phi). \end{aligned} \tag{6}$$

Пусть теперь $\varkappa_n^{(1)} \leq \sigma \leq \varphi(\lambda_{n+1})$. Снова, учитывая (5), имеем $\{\ln \mu(\sigma, F^{(1)}) - \Phi(\sigma)\}' = \{\ln a_{n+1}^{(1)} + \sigma\lambda_{n+1} - \Phi(\sigma)\}' = \lambda_{n+1} - \Phi'(\sigma) \geq \Phi'(\varphi(\lambda_{n+1})) - \Phi'(\varphi(\lambda_{n+1})) = 0$, и поэтому, как при доказательстве (6), $\ln \mu(\sigma, F^{(1)}) - \Phi(\sigma) \geq \ln \mu(\varkappa_n^{(1)}, F^{(1)}) - \Phi(\varkappa_n^{(1)}) = G_1(\lambda_n, \lambda_{n+1}; \Phi) - G_2(\lambda_n, \lambda_{n+1}; \Phi)$. Таким образом, неравенство (6), а с ним и неравенство (2) выполняется для всех $\sigma \in [\varphi(\lambda_n), \varphi(\lambda_{n+1})]$. $\square$

Замечание 1. Оценка (2) точная, т. к. для удовлетворяющего условию теоремы 1 ряда (3), как видно из ее доказательства,

$$\ln \mu(\varkappa_n^{(1)}, F^{(1)}) = \Phi(\varkappa_n^{(1)}) + G_1(\lambda_n, \lambda_{n+1}; \Phi) - G_2(\lambda_n, \lambda_{n+1}; \Phi).$$

3°. Налагая те или иные условия на (λ_n) и используя ту или иную шкалу роста, из теоремы 1 можно получать оценки вида $\ln \mu(\sigma, F) \geq \Phi(\sigma) - \Phi_1(\sigma)$ для всех $\sigma < A$, где функция Φ_1 убывающая или растет медленнее, чем Φ. С этой целью для фиксированных $0 \leq a < b < +\infty$ обозначим $G_*(x) = G_2(a, x; \Phi) - G_1(a, x; \Phi)$, $G^*(x) = G_2(x, b; \Phi) - G_1(x, b; \Phi)$ и докажем следующую лемму.

Лемма. *Функция G_* возрастает на $(a, +\infty)$, а функция G^* убывает на $[0, b)$.*

Доказательство. Поскольку возрастание функции G_* фактически доказано в [2], то осталось доказать лишь убывание функции G^*. Так как

$$\begin{aligned} G_1'(x, b; \Phi) &= \frac{b}{(b-x)^2}\left\{b\int_x^b \Phi(\varphi(t))d\left(-\frac{1}{t}\right) - \frac{b}{x}\Phi(\varphi(x)) + \Phi(\varphi(x))\right\} = \\ &= \frac{b}{(b-x)^2}\left\{-\Phi(\varphi(b)) + \frac{b}{x}\Phi(\varphi(x)) + b\int_x^b \frac{\Phi'(\varphi(t))\varphi'(t)}{t}dt - \frac{b}{x}\Phi(\varphi(x)) + \Phi(\varphi(x))\right\} = \\ &= \frac{b}{(b-x)^2}\left\{-\Phi(\varphi(b)) + \Phi(\varphi(x)) + b\int_x^b \varphi'(t)dt\right\} = \frac{b}{(b-x)^2}\int_x^b (b-t)\varphi'(t)dt \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
&G_2'(x,b;\Phi) = \\
&\qquad = \Phi'\biggl(\frac{1}{b-x}\int_x^b \varphi(t)dt\biggr)\frac{1}{(b-x)^2}\biggl\{-(b-x)\varphi(x)+\int_x^b \varphi(t)dt\biggr\} = \\
&\qquad = \Phi'\biggl(\frac{1}{b-x}\int_x^b \varphi(t)dt\biggr)\frac{1}{(b-x)^2}\int_x^b (b-t)\varphi'(t)dt,
\end{aligned}$$

а в силу возрастания функции φ

$$\Phi'\biggl(\frac{1}{b-x}\int_x^b \varphi(t)dt\biggr) < b,$$

то $G_2'(x,b;\Phi) - G_1'(x,b;\Phi) < 0$ и функция G^* убывает на $[0,b)$. $\square$

Пусть функция f положительная, непрерывная, возрастающая к $+\infty$ на $[0,+\infty)$ и $f(x) > x$. Из леммы вытекает, что если $\lambda_{n+1} \le f(\lambda_n)$, то $G_2(\lambda_n,\lambda_{n+1};\Phi)-G_1(\lambda_n,\lambda_{n+1};\Phi) \le G_2(\lambda_n,f(\lambda_n);\Phi)-G_1(\lambda_n,f(\lambda_n);\Phi)$ и $G_2(\lambda_n,\lambda_{n+1};\Phi)-G_1(\lambda_n,\lambda_{n+1};\Phi) \le G_2(f^{-1}(\lambda_{n+1}),\lambda_{n+1};\Phi)-G_1(f^{-1}(\lambda_{n+1}),\lambda_{n+1};\Phi)$. Здесь будем рассматривать только случай, когда $f(x) = x+h$, т. е. $\lambda_{n+1}-\lambda_n \le h$, где $h \equiv \mathrm{const} > 0$, а функцию Φ будем подбирать так, чтобы она соответствовала классическим шкалам роста (положительному нижнему R-порядку и положительному логарифмическому порядку).

Следствие 1. Если ряд Дирихле (1) целый (т. е. $A=+\infty$), $\lambda_{n+1}-\lambda_n \le h < +\infty$ $(n \ge 0)$ и $\ln|a_n| \ge -\frac{\lambda_n}{\varrho}\ln\frac{\lambda_n}{eT\varrho}$, $0<\varrho,T<+\infty$, для всех $n \ge 0$, то

$$\ln\mu(\sigma,F) \ge Te^{\varrho\sigma} - \frac{(1+o(1))h^2}{8T\varrho^2}e^{-\varrho\sigma}, \quad \sigma\to+\infty. \tag{7}$$

Действительно, выберем $\Phi(\sigma) = Te^{\varrho\sigma}$. Тогда $\varphi(x) = \frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho}$, $\Psi(\sigma) = \sigma - \frac{1}{\varrho}$, $x\Psi(\varphi(x)) = \frac{x}{\varrho}\ln\frac{x}{eT\varrho}$, а

$$G_1(a,b;\Phi) = \frac{1}{\varrho}\frac{ab}{b-a}\ln\frac{b}{a}, \quad G_2(a,b;\Phi) = \frac{1}{e\varrho}\exp\biggl\{\frac{b\ln b - a\ln a}{b-a}\biggr\}.$$

Поэтому в силу убывания функции G^* имеем

$$\begin{aligned}
&G_2(\lambda_n,\lambda_{n+1};\Phi) - G_1(\lambda_n,\lambda_{n+1};\Phi) \le \\
&\le G_2(\lambda_{n+1}-h,\lambda_{n+1};\Phi) - G_1(\lambda_{n+1}-h,\lambda_{n+1};\Phi) = \\
&= \frac{1}{e\varrho}\exp\biggl\{\frac{\lambda_{n+1}\ln\lambda_{n+1} - (\lambda_{n+1}-h)\ln(\lambda_{n+1}-h)}{h}\biggr\} - \\
&- \frac{1}{\varrho}\frac{(\lambda_{n+1}-h)\lambda_{n+1}}{h}(\ln\lambda_{n+1} - \ln(\lambda_{n+1}-h)) = \\
&= \frac{\lambda_{n+1}}{\varrho}\biggl\{1 - \frac{h}{2\lambda_{n+1}} - \frac{h^2}{24\lambda_{n+1}^2} + O\biggl(\frac{1}{\lambda_{n+1}^3}\biggr)\biggr\} - \\
&- \frac{\lambda_{n+1}}{\varrho}\biggl\{1 - \frac{h}{2\lambda_{n+1}} - \frac{h^2}{6\lambda_{n+1}^2} + O\biggl(\frac{1}{\lambda_{n+1}^3}\biggr)\biggr\} = \frac{(1+o(1))h^2}{8\varrho\lambda_{n+1}}, \quad n\to\infty.
\end{aligned} \tag{8}$$

Поэтому по теореме 1 для всех $\sigma \in [\frac{1}{\varrho}\ln\frac{\lambda_n}{T\varrho}, \frac{1}{\varrho}\ln\frac{\lambda_{n+1}}{T\varrho}]$ имеем

$$\ln\mu(\sigma,F) \ge Te^{\varrho\sigma} - \frac{(1+o(1))h^2}{8\varrho\lambda_{n+1}} = Te^{\varrho\sigma} - \frac{(1+o(1))h^2}{8T\varrho^2}e^{-\varrho\sigma}, \quad \sigma\to+\infty.$$

Следствие 2. Если ряд Дирихле (1) целый, $\lambda_{n+1}-\lambda_n\le h<+\infty$ $(n\ge 0)$ и $\ln|a_n|\ge -(p-1)T^{-1/(p-1)}p^{-p/(p-1)}\lambda_n^{p/(p-1)}$, $1<p<+\infty$, $0<T<+\infty$, для всех $n\ge n_0$, то

$$\ln\mu(\sigma,F)\ge T\sigma^p-\frac{(1+o(1))h^2}{8Tp(p-1)}\sigma^{2-p},\quad \sigma\to+\infty. \tag{9}$$

Действительно, выберем $\Phi\in\Omega(+\infty)$ так, чтобы $\Phi(\sigma)=T\sigma^p$ для всех достаточно больших σ. Тогда $\varphi(x)=(\frac{x}{Tp})^{1/(p-1)}$, $\Psi(\sigma)=\frac{p-1}{p}\sigma$, $x\Psi(\varphi(x))=(p-1)T^{-1/(p-1)}p^{-p/(p-1)}x^{p/(p-1)}$, а

$$G_1(a,b;\Phi)=(p-1)T^{-1/(p-1)}p^{-p/(p-1)}\frac{ab}{b-a}\{b^{1/(p-1)}-a^{1/(p-1)}\},$$
$$G_2(a,b;\Phi)=(p-1)^pT^{-1/(p-1)}p^{-p^2/(p-1)}\left\{\frac{b^{p/(p-1)}-a^{p/(p-1)}}{b-a}\right\}^p.$$

Поэтому, как и выше,

$$\begin{aligned}&G_2(\lambda_n,\lambda_{n+1};\Phi)-G_1(\lambda_n,\lambda_{n+1};\Phi)\le\\&\le(Tp^p)^{-1/(p-1)}\lambda_{n+1}^{p/(p-1)}\left\{1-\frac{p}{p-1}\frac{h}{2\lambda_{n+1}}-\frac{p(p-5)h^2}{24(p-1)^2\lambda_{n+1}^2}+O\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}^3}\right)\right\}-\\&-(Tp^p)^{-1/(p-1)}\lambda_{n+1}^{p/(p-1)}\left\{1-\frac{p}{p-1}\frac{h}{2\lambda_{n+1}}-\frac{p(p-2)h^2}{6(p-1)^2\lambda_{n+1}^2}+O\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}^3}\right)\right\}=\\&=(Tp)^{-1/(p-1)}\frac{(1+o(1))h^2}{8(p-1)}\lambda_{n+1}^{-(p-2)/(p-1)},\quad n\to\infty,\end{aligned}\tag{10}$$

и в силу теоремы 1 легко получаем неравенство (9).

Следствие 3. Если ряд Дирихле (1) имеет нулевую абсциссу абсолютной сходимости, $\lambda_{n+1}-\lambda_n\le h<+\infty$ $(n\ge 0)$ и $\ln|a_n|\ge(p+1)T^{1/(p+1)}p^{-p/(p+1)}\lambda_n^{p/(p+1)}$, $0<p,T<+\infty$, для всех $n\ge 0$, то

$$\ln\mu(\sigma,F)\ge\frac{T}{|\sigma|^p}-\frac{(1+o(1))h^2}{8(p+1)}(Tp)^{-1}|\sigma|^{p+2},\quad\sigma\to 0. \tag{11}$$

Действительно, выберем $\Phi(\sigma)=T|\sigma|^{-p}$. Тогда $\Phi'(\sigma)=Tp|\sigma|^{-p-1}$, $\varphi(x)=-(Tp/x)^{1/(p+1)}$, $\Psi(\sigma)=\sigma(p+1)/p$, $x\Psi(\varphi(x))=-(p+1)T^{1/(p+1)}p^{-p/(p+1)}x^{p/(p+1)}$, а

$$G_1(a,b;\Phi)=(p+1)T^{1/(p+1)}p^{-p/(p+1)}\frac{ab}{b-a}\{a^{-1/(p+1)}-b^{-1/(p+1)}\},$$
$$G_2(a,b;\Phi)=(p+1)^{-p}T^{1/(p+1)}p^{p^2/(p+1)}\left\{\frac{b^{p/(p+1)}-a^{p/(p+1)}}{b-a}\right\}^{-p}.$$

Поэтому, как и выше,

$$\begin{aligned}&G_2(\lambda_n,\lambda_{n+1};\Phi)-G_1(\lambda_n,\lambda_{n+1};\Phi)\le\\&\le(Tp^{-p})^{1/(p+1)}\lambda_{n+1}^{p/(p+1)}\left\{1-\frac{ph}{2(p+1)\lambda_{n+1}}-\frac{p(p+5)h^2}{24(p+1)^2\lambda_{n+1}^2}+O\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}^3}\right)\right\}-\\&-(Tp^{-p})^{1/(p+1)}\lambda_{n+1}^{p/(p+1)}\left\{1-\frac{ph}{2(p+1)\lambda_{n+1}}-\frac{p(p+2)h^2}{6(p+1)^2\lambda_{n+1}^2}+O\left(\frac{1}{\lambda_{n+1}^3}\right)\right\}=\\&=(Tp)^{1/(p+1)}\frac{(1+o(1))h^2}{8(p+1)}\lambda_{n+1}^{-(p+2)/(p+1)},\quad n\to\infty,\end{aligned}\tag{12}$$

и, как обычно, из теоремы 1 получаем неравенство (11).

Замечание 2. Оценки (7), (9) и (11) неулучшаемые в силу точности оценки (2) и того, что в случае, когда $\lambda_{n+1}=\lambda_n+h$, все неравенства (8), (10) и (12) превращаются в равенства.

4°. Используя теорему 1 и лемму для определенных классов функций Φ довольно общего вида, можно получить оценки вида $\ln\mu(\sigma, F) \geq \Phi(\sigma) - \Phi_1(\sigma)$. Мы ограничимся здесь только следующим утверждением.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *функция* $\Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ *невозрастающая на* $(-\infty, A)$ *и* $\lambda_{n+1} - \lambda_n \leq h < +\infty$, $n \geq 0$. *Тогда*

$$\ln\mu(\sigma, F) \geq \Phi(\sigma) - \frac{h}{2}\frac{\Phi(\sigma)}{\Phi'(\sigma)}(1 + o(1)), \quad \sigma \uparrow A.$$

Действительно, в силу леммы и невозрастания функции $\Phi(\varphi(t))/t$ имеем

$$\begin{aligned}
&G_2(\lambda_n, \lambda_{n+1}; \Phi) - G_1(\lambda_n, \lambda_{n+1}; \Phi) \leq \\
&\leq \Phi\Big(\frac{1}{h}\int_{\lambda_{n+1}-h}^{\lambda_{n+1}} \varphi(t)dt\Big) - \frac{(\lambda_{n+1} - h)\lambda_{n+1}}{h}\int_{\lambda_{n+1}-h}^{\lambda_{n+1}} \frac{\Phi(\varphi(t))}{t}\frac{dt}{t} \leq \\
&\leq \Phi(\varphi(\lambda_{n+1})) - \frac{(\lambda_{n+1} - h)\lambda_{n+1}}{h}\frac{\Phi(\varphi(\lambda_{n+1}))}{\lambda_{n+1}}\ln\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - h} = \\
&= \Phi(\varphi(\lambda_{n+1}))\Big\{1 - \frac{\lambda_{n+1} - h}{h}\ln\Big(1 + \frac{h}{\lambda_{n+1} - h}\Big)\Big\} = \\
&= \Phi(\varphi(\lambda_{n+1}))\Big\{1 - \frac{\lambda_{n+1} - h}{h}\Big(\frac{h}{\lambda_{n+1} - h} - \frac{h^2}{2(\lambda_{n+1} - h)^2} + O\Big(\frac{1}{\lambda_{n+1}^3}\Big)\Big)\Big\} = \\
&= \frac{(1 + o(1))h}{2}\frac{\Phi(\varphi(\lambda_{n+1}))}{\lambda_{n+1}}, \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Так как при $\varphi(\lambda_n) \leq \sigma \leq \varphi(\lambda_{n+1})$ в силу невозрастания функции $\Phi(\varphi(t))/t$ выполняется неравенство $\Phi(\varphi(\lambda_{n+1}))/\lambda_{n+1} \leq \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$, то из теоремы 1 легко получаем требуемое неравенство.

Литература

1. Шеремета М.Н., Федыняк С.И. *О производной ряда Дирихле* // Сиб. матем. журн. – 1998. – Т. 39. – № 1. – С. 206–223.
2. Заболоцький М.В., Шеремета М.М. *Узагальнення теореми Лiндельофа* // Укр. матем. журн. – 1998. – Т. 50. – № 9. – С. 1177–1192.

Львовский государственный университет (Украина)

Поступила
03.11.1998