ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 1 (476)

УДК 517.55+517.962.22

Д.Е. ЛЕЙНАРТАС

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Данная работа посвящена решению многомерных разностных уравнений с постоянными коэффициентами с соответствующими начальными данными. По аналогии с дифференциальными уравнениями можно сказать, что решается задача Коши для указанных уравнений. Для однородных дифференциальных уравнений с частными производными известен так называемый фундаментальный принцип [1], [2] об общем виде решений. Применительно к задаче Коши, в работе [3] приведена явная реализация фундаментального принципа в виде интегрального представления с интегрированием по пространству $\mathbb{C}^n$ для решения указанной задачи. Можно сказать, что в данной статье представлена другая версия для реализации фундаментального принципа (с интегрированием по циклу $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ вещественной размерности n), причем для многомерного разностного уравнения.

В данной работе даны обобщения некоторых результатов теории линейных однородных разностных уравнений ([4], гл. 5, с. 332) на многомерный случай.

Обозначим $\mathbb{N}_0^n$ — пространство целочисленных n-мерных векторов с неотрицательными компонентами, $x = (x_1, \dots, x_n)$ — точки этого пространства, $A = \{\alpha\} = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)\}$ — конечное множество мультииндексов, $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$, $I = (1, \dots, 1)$.

Рассмотрим разностное уравнение

$$\sum_{\alpha \in A} a_\alpha f(x + \alpha) = 0, \tag{1}$$

где a_α — коэффициенты уравнения, $f(x)$ — неизвестная функция целочисленного аргумента. Многочлен

$$P(\lambda) = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha \lambda^\alpha \tag{2}$$

назовем характеристическим многочленом для уравнения (1). Здесь $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda^\alpha = \lambda_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \lambda_n^{\alpha_n}$.

Многогранником Ньютона N_P многочлена P называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ множества мультииндексов A.

Предположим, что многогранник Ньютона N_P многочлена (2) имеет специальный вид:

$$\text{точка } (m, 0, \dots, 0) = (m, {}'0) \text{ является вершиной } N_P, \tag{3}$$

причем $m > \alpha_1$ для всех $\alpha \in A$, $\alpha \neq (m, {}'0)$. Введем начальные данные для уравнения

$$f(i, {}'x) = \varphi_i({}'x), \quad i = 0, \dots, m-1. \tag{4}$$

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований поддержки ведущих научных школ (грант № 00-15-96140).

Здесь $'x = (x_2, \dots, x_n)$ — точки пространства $\mathbb{N}_0^{n-1}$. Потребуем также, чтобы ряды Лорана

$$\check{\varphi}_k('\lambda) = \sum_{'x \in \mathbb{N}_0^{n-1}} \frac{\varphi_k('x)}{'\lambda^{('x+'I)}}, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{5}$$

сходились в окрестности бесконечно удаленной точки вида $'U_{'\sigma} = \{'\lambda \in \mathbb{C}^{n-1} : |\lambda_2| > \sigma_2 > 0, \dots, |\lambda_n| > \sigma_n > 0\}$.

Сформулируем следующую задачу: *найти функцию* $f(x)$, *удовлетворяющую уравнению* (1) *и начальным данным* (4).

Теорема. *Задача* (1), (4) *при выполнении условий* (3), (5) *имеет единственное решение, которое можно найти по формуле*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{K(\lambda)}{P(\lambda)} \lambda^x \, d\lambda. \tag{6}$$

Контур интегрирования имеет вид $\Gamma = \Gamma_1 \times {'\Gamma}$, *где* $\Gamma_1 = \{|\lambda_1| = \sigma_1\}$, $'\Gamma = \{|\lambda_2| = \sigma_2, \dots, |\lambda_n| = \sigma_n\}$, *причем* σ_1 *выбирается так, чтобы для всех* $'\lambda \in {'\Gamma}$ *корни характеристического многочлена* (2) *лежали внутри окружности* $|\lambda_1| = \sigma_1$, *а* $K(\lambda) = A_0 \check{\varphi}_0 \lambda_1^{m-1} + [A_0 \check{\varphi}_1 + A_1 \check{\varphi}_0] \lambda_1^{m-2} + \dots + [A_0 \check{\varphi}_{m-1} + \dots + A_{m-1} \check{\varphi}_0]$.

Доказательство. Подставляя определенную формулой (6) функцию $f(x)$ в разностное уравнение (1) и начальные данные (4) и проведя несложные вычисления с учетом соотношения (5), можно убедиться, что эта функция действительно является решением поставленной задачи.

Покажем, что полученное решение уравнения (1) с начальными данными (4) является единственным. Действительно, используя свойство (3), перепишем уравнение (1) в следующем виде: $f(x_1 + m, 'x + '\alpha) + \sum_{\alpha \in A, \alpha_1 < m} a_\alpha f(x + \alpha) = 0$ и положим $x_1 = 0$. Тогда имеем равенство

$$f(m, 'x + '\alpha) = -\sum_{\alpha \in A, \alpha_1 < m} a_\alpha f(\alpha_1, 'x + '\alpha).$$

Так как для $\alpha_1 < m$ согласно соотношениям (4) выполняется $f(\alpha_1, 'x + '\alpha) = \varphi_{\alpha_1}('x + '\alpha)$, видим, что $f(m, 'x + '\alpha)$ представляется в виде линейной комбинации функций $\varphi_j('x)$, $j = 0, \dots, m-1$. Полагая далее $x_1 = 1, 2, \dots$, можно получить значение функции $f(x)$ в любой точке x в виде линейной комбинации начальных данных $\varphi_j('x)$, что и означает единственность построенного решения. □

Автор благодарит А.К. Циха за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. Паламодов В.П. *Линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.* – М.: Наука, 1967. – 487 с.
2. Berenstein C.A., Yger A. *About Ehrenpreis' fundamental principle* // Geom. and algeb. aspects in several complex variables, Editel, Rende. – 1991. – P. 47–61.
3. Rigat S. *Application of the fundamental principle to complex Cauchy problem* // Arkiv för Matematik. – 2000. – V. 38. – № 2. – P. 355–380.
4. Гельфонд А.О. *Исчисление конечных разностей.* Учеб. пособие. – 2-е изд. – М.: Физматгиз, 1959. – 400 с.

Красноярский государственный университет

Поступили
полный текст 05.01.2001
краткое сообщение 03.05.2001