ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 1 (476)

УДК 517.958

А. МАХЕР, Н.Б. ПЛЕЩИНСКИЙ

ЗАДАЧА О СКАЧКЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ПЛОСКОСЛОИСТОЙ СРЕДЕ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

В теории краевых задач для аналитических функций важное значение имеет задача о скачке: найти кусочно-аналитическую функцию по разности ее предельных значений на особой линии. Частное решение этой задачи — интеграл типа Коши — дает интегральное представление кусочно-аналитических функций, которое применяется при решении многих других задач. Потенциалы простого и двойного слоя, широко используемые в математической физике, также являются частными решениями задач о скачке для уравнений с частными производными.

В данной работе исследована двумерная задача о скачке для уравнения Гельмгольца в плоскопараллельной слоистой среде, при этом скачки искомого решения и его нормальной производной задаются на прямых, разделяющих соседние слои. В качестве вспомогательной задачи рассмотрена задача Коши для уравнения Гельмгольца в случае полуплоскости и полосы, их решения получены методом преобразования Фурье. Указаны условия, при которых существует единственное решение этой переопределенной задачи. Задача Коши для уравнения Гельмгольца в случае полуплоскости и полуполосы (при нулевых граничных условиях на параллельных сторонах), а также задача о скачке на стыке двух полуплоскостей или полуполос аналогичным методом изучались ранее в [1] (см. также [2], [3]).

Актуальным направлением электродинамики и механики сплошных сред (акустики) является изучение волновых процессов в слоистых средах [4], [5]. Непосредственно к задаче о скачке для уравнения Гельмгольца приводится задача о падении плоской TE-поляризованной электромагнитной волны на многослойную диэлектрическую структуру. Если на границах раздела сред заданы нулевые скачки, то задача о скачке может быть интерпретирована как задача о собственных волнах планарного диэлектрического волновода (напр., [6]).

В работе показано, как с помощью интегрального представления решения задачи о скачке для уравнения Гельмгольца приводится к интегральному уравнению с логарифмической особенностью в ядре задача дифракции электромагнитной волны на системе металлических лент в плоскослоистой среде. В настоящее время задачи дифракции электромагнитных волн на проводящих тонких экранах наиболее часто приводятся к интегральным или интегро-дифференциальным уравнениям с помощью потенциалов для уравнения Гельмгольца [7] (или специальных векторных потенциалов в трехмерном случае [8]). Метод задачи о скачке позволяет получить аналогичные интегральные уравнения. Отличие этого метода от методов теории потенциала состоит в том, что фундаментальные решения уравнения Гельмгольца для слоистых сред непосредственно не используются.

1. Постановка задачи о скачке

Пусть $h_1 < h_2 < \cdots < h_n$. Прямые $z = h_j$ разделяют плоскость (x, z) на области: полуплоскости $D_0 : z < h_1$, $D_n : z > h_n$ и полосы $D_j : h_j < z < h_{j+1}$, $j = 1, \dots, n-1$. В каждой из областей D_j найти решения уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k_j^2 u(x, z) = 0, \quad (x, z) \in D_j, \tag{1}$$

удовлетворяющие условиям

$$u(x,h_j+0)-u(x,h_j-0)=a_j(x),\quad \frac{\partial u}{\partial z}(x,h_j+0)-\frac{\partial u}{\partial z}(x,h_j-0)=b_j(x),\quad j=1,\dots,n; \tag{2}$$

здесь k_j — вещественные числа.

Доопределим функции $u_j(x,z)$ нулем вне областей D_j. Будем искать решения задачи в классе распределений медленного роста на бесконечности. Чтобы имели смысл следы искомых распределений и их производных по z на границах $z=h_j$ областей D_j, нужно предполагать, что $u_j(x,z)$ принадлежат пространству Соболева $H_s(D_j)$, $s>3/2$ ([9], гл. I, § 3). Для решений уравнения Гельмгольца достаточно считать [8], что $u_j(x,z)\in H_1^{\mathrm{loc}}(D_j)$. После того, как будут получены формулы, дающие решения рассматриваемых задач, можно показать, что при гладких граничных функциях обобщенные решения совпадают с классическими.

Запишем $u_j(x,z)$ как обратное преобразование Фурье

$$u_j(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}U_j(\xi,\zeta)\,e^{-i\xi x}\,e^{-i\zeta z}\,d\xi\,d\zeta; \tag{3}$$

здесь $U_j(\xi,\zeta)$ — образ Фурье распределения $u_j(x,z)$. Будем говорить, что решение задачи (1), (2) в областях D_0 и D_n принадлежит классу уходящих на бесконечность решений или классу приходящих с бесконечности решений в зависимости от того, какие распространяющиеся плоские волны присутствуют в разложениях (3) при $j=0$ и при $j=n$. В [1] показано, что определения таких классов решений могут быть даны на языке сингулярных носителей распределений $U_0(\xi,\zeta)$ и $U_n(\xi,\zeta)$ соответственно. Также будем говорить, что решение задачи (1), (2) удовлетворяет условию излучения, если это решение в областях D_0 и D_n принадлежит классу уходящих на бесконечность решений.

Получим в каждом слое D_j представления решений уравнения Гельмгольца (1) через образы Фурье граничных функций задачи Коши. Известно, что задача Коши для эллиптических уравнений является переопределенной. Поэтому граничные функции не могут быть заданы произвольно.

2. Задача Коши для полуплоскости

Пусть в разрезанной по отрезку $[-k_j,k_j]$ комплексной плоскости $\dot\xi$ выбрана однозначная ветвь аналитической функции

$$\gamma(\dot\xi)=\sqrt{k_j^2-\dot\xi^2},$$

принимающая положительные значения на верхнем береге разреза. Обозначим ее предельное значение из верхней полуплоскости на вещественной оси

$$\gamma_j^+(\xi)=\{\xi<-k_j: i\sqrt{\xi^2-k_j^2};\ -k_j<\xi<k_j:\sqrt{k_j^2-\xi^2};\ \xi>k_j:-i\sqrt{\xi^2-k_j^2}\,\}.$$

Пусть также

$$\gamma_j^0(\xi)=\{|\xi|>k_j: i\sqrt{\xi^2-k_j^2};\ |\xi|<k_j:-\sqrt{k_j^2-\xi^2}\,\}$$

(эта функция уже не является предельным значением функции, аналитической в верхней полуплоскости).

Лемма 1. *Распределение $u_n(x,z)$ является решением уравнения* (1) *в области D_n, удовлетворяет граничным условиям*

$$u_n(x,h_n+0)=u_n^+(x),\quad \frac{\partial u_n}{\partial z}(x,h_n+0)=v_n^+(x) \tag{4}$$

и принадлежит классу уходящих на бесконечность решений тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$V_n^+(\xi)-i\gamma_n^0(\xi)U_n^+(\xi)=0. \tag{5}$$

При этом $U_n(\xi,\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$(k_n^2-\xi^2-\zeta^2)\,U_n(\xi,\zeta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ih_n\zeta}\,\left[V_n^+(\xi)-i\zeta U_n^+(\xi)\right]. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $u_n(x,z)$ — решение задачи (1), (4). Перейдем в уравнении (1) к образу Фурье по обеим переменным с учетом граничных условий (4). Получим, что образ Фурье $U_n(\xi,\zeta)$ удовлетворяет уравнению (6).

При $\xi<-k_n$ и $\xi>k_n$ полином $k_n^2-\xi^2-\zeta^2$ как функция ζ имеет комплексные корни $\pm\gamma_n^+(\xi)$. Поэтому

$$U_n(\xi,\zeta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ih_n\zeta}\,\frac{P(\xi)}{\zeta-\gamma_n^+(\xi)}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ih_n\zeta}\,\frac{Q(\xi)}{\zeta+\gamma_n^+(\xi)},$$
$$P(\xi)=\frac{-V_n^+(\xi)+i\gamma_n^+(\xi)\,U_n^+(\xi)}{2\gamma_n^+(\xi)},\quad Q(\xi)=\frac{V_n^+(\xi)+i\gamma_n^+(\xi)\,U_n^+(\xi)}{2\gamma_n^+(\xi)}.$$

При $-k_n<\xi<k_n$ корни полинома вещественные. Методом выхода в комплексную плоскость (в верхнюю полуплоскость) получим

$$U_n(\xi,\zeta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ih_n\zeta}\,\frac{P(\xi)}{\zeta+i0-\gamma_n^+(\xi)}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ih_n\zeta}\,\frac{Q(\xi)}{\zeta+i0+\gamma_n^+(\xi)}.$$

Вычислим обратное преобразование Фурье. При $z>h_n$

$$u_n(x,z)=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-k_n}Q(\xi)\,e^{i\gamma_n^+(\xi)(z-h_n)}\,e^{-i\xi x}\,d\xi+\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{k_n}^{+\infty}P(\xi)\,e^{-i\gamma_n^+(\xi)(z-h_n)}\,e^{-i\xi x}\,d\xi+$$
$$+\int_{-k_n}^{k_n}\left[P(\xi)\,e^{-i\gamma_n^+(\xi)(z-h_n)}+Q(\xi)\,e^{i\gamma_n^+(\xi)(z-h_n)}\right]e^{-i\xi x}\,d\xi \tag{7}$$

и при $z<h_n$

$$u_n(x,z)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-k_n}P(\xi)\,e^{-i\gamma_n^+(\xi)(z-h_n)}\,e^{-i\xi x}d\xi+\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{k_n}^{+\infty}Q(\xi)\,e^{i\gamma_n^+(\xi)(z-h_n)}\,e^{-i\xi x}d\xi.$$

Но распределение $U_n(\xi,\zeta)$ аналитически продолжимо с вещественной оси в верхнюю комплексную полуплоскость по переменной ζ. Тогда выполняются равенства $V_n^+(\xi)-i\gamma_n^+(\xi)U_n^+(\xi)=0$ при $\xi<-k_n$ и $V_n^+(\xi)+i\gamma_n^+(\xi)U_n^+(\xi)=0$ при $\xi>k_n$. Следовательно, $P(\xi)=0$ при $\xi<-k_n$ и $Q(\xi)=0$ при $\xi>k_n$. Тогда $u_n(x,z)=0$ при $z<h_n$.

Далее, в правой части формулы (7) первые два слагаемых содержат волны, затухающие в направлении оси z, причем плотности интегралов $P(\xi)=iU_n^+(\xi)=-V_n^+(\xi)/\gamma_n^+(\xi)$ при $\xi>k_n$ и $Q(\xi)=iU_n^+(\xi)=V_n^+(\xi)/\gamma_n^+(\xi)$ при $\xi<-k_n$. Чтобы в третьем слагаемом не содержалось приходящих с бесконечности волн, должно выполняться условие

$$Q(\xi)=0\quad\text{или}\quad V_n^+(\xi)+i\gamma_n^+(\xi)U_n^+(\xi)=0,\quad -k_n<\xi<k_n.$$

Тогда $P(\xi)=iU_n^+(\xi)=-V_n^+(\xi)/\gamma_n^+(\xi)$ при $-k_n<\xi<k_n$.

При окончательной формулировке результата удобнее использовать функцию $\gamma_n^0(\xi)$ вместо $\gamma_n^+(\xi)$.

С другой стороны, если $U_n(\xi,\zeta)$ — решение уравнения (6) и выполняется условие (5), то формула (7) дает решение задачи Коши

$$u_n(x,z)=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-k_n}Q(\xi)\,e^{i\gamma_n^+(\xi)(z-h_n)}\,e^{-i\xi x}\,d\xi+\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-k_n}^{+\infty}P(\xi)\,e^{-i\gamma_n^+(\xi)(z-h_n)}\,e^{-i\xi x}\,d\xi=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}U_n^+(\xi)\,e^{i\gamma_n^0(\xi)(z-h_n)}\,e^{-i\xi x}\,d\xi=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{V_n^+(\xi)}{\gamma_n^0(\xi)}\,e^{i\gamma_n^0(\xi)(z-h_n)}\,e^{-i\xi x}\,d\xi,\quad z>h_n, \tag{8}$$

в классе уходящих на бесконечность решений. □

Замечание 1. Легко видеть, что правая часть (7) удовлетворяет граничным условиям (4) и в том случае, когда при $-k_n < \xi < k_n$ условие (5) не выполняется. Если вместо (5) взять условие

$$V_n^+(\xi) + i\gamma_n^0(\xi)\, U_n^+(\xi) = 0, \tag{9}$$

то получим решение задачи Коши в классе приходящих с бесконечности решений (при этом правая часть уравнения (6) изменится).

Точно так же доказывается

Лемма 2. *Распределение $u_0(x,z)$ является решением уравнения* (1) *в области D_0, удовлетворяет граничным условиям*

$$u_0(x,h_1-0) = u_1^-(x), \quad \frac{\partial u_0}{\partial z}(x,h_1-0) = v_1^-(x) \tag{10}$$

и принадлежит классу уходящих на бесконечность решений тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$V_1^-(\xi) + i\gamma_0^0(\xi)\, U_1^-(\xi) = 0. \tag{11}$$

При этом $U_0(\xi,\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$(k_0^2 - \xi^2 - \zeta^2)\, U_0(\xi,\zeta) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ih_1\zeta}\, [V_1^-(\xi) - i\zeta U_1^-(\xi)]. \tag{12}$$

Из (12) следует, что при $z < h_1$

$$u_0(x,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U_1^-(\xi)\, e^{-i\gamma_0^0(\xi)(z-h_1)}\, e^{-i\xi x}\, d\xi = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{V_1^-(\xi)}{\gamma_0^0(\xi)}\, e^{-i\gamma_0^0(\xi)(z-h_1)}\, e^{-i\xi x}\, d\xi. \tag{13}$$

3. Задача Коши для полосы

Обозначим $\Delta h_j = h_{j+1} - h_j$. Рассмотрим задачу Коши для уравнения Гельмгольца в случае полосы.

Лемма 3. *Распределение $u_j(x,z)$ является решением уравнения* (1) *в области D_j, $j = 1,\ldots,n-1$, и удовлетворяет граничным условиям*

$$\begin{aligned} u_j(x,h_j+0) &= u_j^+(x), & \frac{\partial u_j}{\partial z}(x,h_j+0) &= v_j^+(x), \\ u_j(x,h_{j+1}-0) &= u_{j+1}^-(x), & \frac{\partial u_j}{\partial z}(x,h_{j+1}-0) &= v_{j+1}^-(x) \end{aligned} \tag{14}$$

тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$[V_j^+(\xi) - i\gamma_j^0(\xi)U_j^+(\xi)] - e^{i\Delta h_j \gamma_j^0(\xi)}\, [V_{j+1}^-(\xi) - i\gamma_j^0(\xi)U_{j+1}^-(\xi)] = 0, \tag{15}$$

$$e^{i\Delta h_j \gamma_j^0(\xi)}\, [V_j^+(\xi) + i\gamma_j^0(\xi)U_j^+(\xi)] - [V_{j+1}^-(\xi) + i\gamma_j^0(\xi)U_{j+1}^-(\xi)] = 0. \tag{16}$$

При этом $U_j(\xi,\zeta)$ удовлетворяет уравнению

$$(k_j^2 - \xi^2 - \zeta^2)\, U_j(\xi,\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ih_j\zeta}\, [V_j^+(\xi) - i\zeta U_j^+(\xi)] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{ih_{j+1}\zeta}\, [V_{j+1}^-(\xi) - i\zeta U_{j+1}^-(\xi)]. \tag{17}$$

Доказательство. Перейдем в (1) к образу Фурье по двум переменным с учетом условий (14). Получим уравнение (17). Любое его решение в классе распределений медленного роста на бесконечности будет образом Фурье искомого решения задачи (1), (14), если только при обратном преобразовании Фурье получим, что $u_j(x,z)=0$ при $z>h_{j+1}$ и $z<h_j$.

Так как $u_j(x,z)=0$ при $z<h_j$, то распределение $e^{-ih_j\zeta}\,U_j(\xi,\zeta)$ по ζ аналитически продолжимо в верхнюю полуплоскость. Тогда, если полином $k_j^2-\xi^2-\zeta^2$ обращается в нуль при некотором ζ, лежащем в верхней полуплоскости, то и правая часть уравнения (17) обращается в нуль при этом ζ. При $|\xi|>k_j$ полином имеет в верхней полуплоскости нуль $\gamma_j^0(\xi)$, поэтому равенство (15) выполняется при $|\xi|>k_j$. Аналогично, т.к. $u_j(x,z)=0$ при $z>h_{j+1}$, то распределение $e^{-ih_{j+1}\zeta}\,U_j(\xi,\zeta)$ по ζ аналитически продолжимо в нижнюю полуплоскость. Поэтому при $|\xi|>k_j$ выполняется равенство (16).

Если $u_j(x,z)$ – решение задачи (1), (14), то

$$u_j(x,z)=u_{j,1}(x,z)+u_{j,2}(x,z),$$

где

$$u_{j,1}(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|>k_j}\Bigl(\int_{-\infty}^{+\infty}U_j(\xi,\zeta)\,e^{-i\zeta z}\,d\zeta\Bigr)e^{-i\xi x}\,d\xi,$$
$$u_{j,2}(x,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{|\xi|<k_j}\Bigl(\int_{-\infty}^{+\infty}U_j(\xi,\zeta)\,e^{-i\zeta z}\,d\zeta\Bigr)e^{-i\xi x}\,d\xi.$$

При $|\xi|>k_j$ полином $k_j^2-\xi^2-\zeta^2$ по ζ не имеет вещественных корней, поэтому

$$U_j(\xi,\zeta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ih_j\zeta}\,\frac{V_j^+(\xi)-i\zeta U_j^+(\xi)}{[\gamma_j^0(\xi)-\zeta][\gamma_j^0(\xi)+\zeta]}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ih_{j+1}\zeta}\,\frac{V_{j+1}^-(\xi)-i\zeta U_{j+1}^-(\xi)}{[\gamma_j^0(\xi)-\zeta][\gamma_j^0(\xi)+\zeta]}.$$

Разлагая на простые дроби, получим

$$U_j(\xi,\zeta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ih_j\zeta}\Bigl[\frac{P(\xi)}{\zeta-\gamma_j^0(\xi)}+\frac{Q(\xi)}{\zeta+\gamma_j^0(\xi)}\Bigr]-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{ih_{j+1}\zeta}\Bigl[\frac{R(\xi)}{\zeta-\gamma_j^0(\xi)}+\frac{S(\xi)}{\zeta+\gamma_j^0(\xi)}\Bigr],$$

где

$$P(\xi)=\frac{-V_j^+(\xi)+i\gamma_j^0(\xi)U_j^+(\xi)}{2\gamma_j^0(\xi)},\qquad Q(\xi)=\frac{V_j^+(\xi)+i\gamma_j^0(\xi)U_j^+(\xi)}{2\gamma_j^0(\xi)},$$
$$R(\xi)=\frac{-V_{j+1}^-(\xi)+i\gamma_j^0(\xi)U_{j+1}^-(\xi)}{2\gamma_j^0(\xi)},\quad S(\xi)=\frac{V_{j+1}^-(\xi)+i\gamma_j^0(\xi)U_{j+1}^-(\xi)}{2\gamma_j^0(\xi)}.$$

Теперь равенства (15) и (16) можно переписать в виде

$$P(\xi)=e^{i\Delta h_j\gamma_j^0(\xi)}\,R(\xi),\quad e^{i\Delta h_j\gamma_j^0(\xi)}\,Q(\xi)=S(\xi). \tag{18}$$

Вычислим внутренний интеграл в $u_{j,1}(x,z)$. Получим при $z<h_j$

$$i\sqrt{2\pi}\bigl[P(\xi)\,e^{-i\gamma_j^0(\xi)(z-h_j)}-R(\xi)\,e^{-i\gamma_j^0(\xi)(z-h_{j+1})}\bigr]$$

и при $z>h_{j+1}$

$$i\sqrt{2\pi}\bigl[-Q(\xi)\,e^{i\gamma_j^0(\xi)(z-h_j)}+S(\xi)\,e^{i\gamma_j^0(\xi)(z-h_{j+1})}\bigr],$$

оба эти выражения равны нулю, если выполняются условия (18); при $h_j<z<h_{j+1}$

$$-i\sqrt{2\pi}\bigl[Q(\xi)\,e^{i\gamma_j^0(\xi)(z-h_j)}+R(\xi)\,e^{-i\gamma_j^0(\xi)(z-h_{j+1})}\bigr].$$

Тогда с учетом (18) при $h_j < z < h_{j+1}$

$$u_{j,1}(x,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|\xi|>k_j} \left[\frac{iV_j^+(\xi) + \gamma_j^0(\xi) U_j^+(\xi)}{2\gamma_j^0(\xi)} \, e^{-i\gamma_j^0(\xi)(z-h_j)} + \right. \\ \left. + \frac{-iV_j^+(\xi) + \gamma_j^0(\xi) U_j^+(\xi)}{2\gamma_j^0(\xi)} \, e^{i\gamma_j^0(\xi)(z-h_j)} \right] e^{-i\xi x} \, d\xi \tag{19}$$

или

$$u_{j,1}(x,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|\xi|>k_j} \left[\frac{iV_{j+1}^-(\xi) + \gamma_j^0(\xi) U_{j+1}^-(\xi)}{2\gamma_j^0(\xi)} \, e^{-i\gamma_j^0(\xi)(z-h_{j+1})} + \right. \\ \left. + \frac{-iV_{j+1}^-(\xi) + \gamma_j^0(\xi) U_{j+1}^-(\xi)}{2\gamma_j^0(\xi)} \, e^{i\gamma_j^0(\xi)(z-h_{j+1})} \right] e^{-i\xi x} \, d\xi. \tag{20}$$

При $|\xi| < k_j$ полином $k_j^2 - \xi^2 - \zeta^2$ по ζ имеет вещественные корни $\pm\gamma_j^0(\xi)$. Поэтому методом выхода в комплексную плоскость (в верхнюю полуплоскость) получим

$$U_j(\xi,\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ih_j\zeta} \left[\frac{P(\xi)}{\zeta + i0 - \gamma_j^0(\xi)} + \frac{Q(\xi)}{\zeta + i0 + \gamma_j^0(\xi)} \right] - \\ - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ih_{j+1}\zeta} \left[e^{+ih\zeta} \frac{R(\xi)}{\zeta + i0 - \gamma_j^0(\xi)} + e^{+ih\zeta} \frac{S(\xi)}{\zeta + i0 + \gamma_j^0(\xi)} \right].$$

Вычислим внутренний интеграл в $u_{j,2}(x,z)$. Получим нуль при $z < h_j$ и

$$-2\pi i \left[P(\xi) \, e^{-i\gamma_j^0(\xi)(z-h_j)} + Q(\xi) \, e^{i\gamma_j^0(\xi)(z-h_j)} - R(\xi) \, e^{-i\gamma_j^0(\xi)(z-h_{j+1})} - S(\xi) \, e^{i\gamma_j^0(\xi)(z-h_{j+1})} \right]$$

при $z > h_{j+1}$ (но это выражение равно нулю, если выполнены условия (18) при $|\xi| < k_j$); наконец,

$$-2\pi i \left[P(\xi) \, e^{-i\gamma_j^0(\xi)(z-h_j)} + Q(\xi) \, e^{i\gamma_j^0(\xi)(z-h_j)} \right]$$

при $h_j < z < h_{j+1}$. Тогда при $h_j < z < h_{j+1}$

$$u_{j,2}(x,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|\xi|<k_j} \left[\frac{iV_j^+(\xi) + \gamma_j^0(\xi) U_j^+(\xi)}{2\gamma_j^0(\xi)} \, e^{-i\gamma_j^0(\xi)(z-h_j)} + \right. \\ \left. + \frac{-iV_j^+(\xi) + \gamma_j^0(\xi) U_j^+(\xi)}{2\gamma_j^0(\xi)} \, e^{i\gamma_j^0(\xi)(z-h_j)} \right] e^{-i\xi x} \, d\xi \tag{21}$$

или

$$u_{j,2}(x,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|\xi|<k_j} \left[\frac{iV_{j+1}^-(\xi) + \gamma_j^0(\xi) U_{j+1}^-(\xi)}{2\gamma_j^0(\xi)} \, e^{-i\gamma_j^0(\xi)(z-h_{j+1})} + \right. \\ \left. + \frac{-iV_{j+1}^-(\xi) + \gamma_j^0(\xi) U_{j+1}^-(\xi)}{2\gamma_j^0(\xi)} \, e^{i\gamma_j^0(\xi)(z-h_{j+1})} \right] e^{-i\xi x} \, d\xi. \tag{22}$$

Точно такие же выражения можно получить и методом выхода в нижнюю полуплоскость. $\square$

Замечание 2. Будем говорить, что решение задачи (1), (14) удовлетворяет условию излучения, если все приходящие на прямую $z = h_j$ гармоники являются уходящими от прямой $z = h_{j+1}$ и, наоборот, все приходящие на прямую $z = h_{j+1}$ гармоники являются уходящими от прямой $z = h_j$. Легко видеть, что $u_j(x,z)$ удовлетворяет условию излучения тогда и только тогда, когда при $|\xi| < k_j$ выполняются равенства (15), (16).

Замечание 3. Из формул (15), (16) можно выразить $V_j^+(\xi)$, $V_{j+1}^-(\xi)$ через $U_j^+(\xi)$, $U_{j+1}^-(\xi)$ или, наоборот, $U_j^+(\xi)$, $U_{j+1}^-(\xi)$ через $V_j^+(\xi)$, $V_{j+1}^-(\xi)$. Если подставить полученные выражения в формулы (19), (21) или (20), (22), то получим явные решения задач Дирихле и Неймана для полосы D_j. Преобразуя полученные формулы, можно найти выражения фундаментального решения уравнения Гельмгольца и функций Грина задач Дирихле и Неймана для полосы. То же самое можно было сделать и в случае полуплоскости.

4. Решение задачи о скачке

Непосредственно из лемм 1–3 следует

Теорема 1. *Решение задачи о скачке в плоскослоистой среде в областях D_j дают формулы* (8), (13) *и* (19)–(22), *где образы Фурье граничных распределений $V_j^\pm(\xi), U_j^\pm(\xi)$ удовлетворяют системе уравнений* (5), (11), (15), (16) *и*

$$U_j^+(\xi) - U_j^-(\xi) = A_j(\xi), \quad V_j^+(\xi) - V_j^-(\xi) = B_j(\xi), \quad j = 1, \dots, n. \tag{23}$$

Действительно, будем искать решения задачи о скачке в областях D_j как решения переопределенных задач Коши для полуплоскостей или полос. Образы Фурье граничных распределений должны удовлетворять условиям (5), (11), (15) и (16) из лемм 1 – 3. Из граничных условий (2) после преобразования Фурье получим равенства (23). □

Рассмотрим задачу о скачке при $n = 1$. Пусть $h_1 = h$. В этом случае на прямой $z = h$ условия (2) имеют вид

$$u(x, h+0) - u(x, h-0) = a(x), \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, h+0) - \frac{\partial u}{\partial z}(x, h-0) = b(x), \tag{24}$$

а теорема 1 дает систему из четырех уравнений

$$\begin{gathered} V_1^+(\xi) - i\,\gamma_1^0(\xi)\,U_1^+(\xi) = 0, \qquad V_1^-(\xi) + i\,\gamma_0^0(\xi)\,U_1^-(\xi) = 0, \\ U_1^+(\xi) - U_1^-(\xi) = A(\xi), \qquad V_1^+(\xi) - V_1^-(\xi) = B(\xi). \end{gathered}$$

Ее решение

$$U_1^+(\xi) = \frac{-i\,B(\xi) + \gamma_0^0(\xi)\,A(\xi)}{\gamma_0^0(\xi) + \gamma_1^0(\xi)}, \quad U_1^-(\xi) = \frac{-i\,B(\xi) - \gamma_1^0(\xi)\,A(\xi)}{\gamma_0^0(\xi) + \gamma_1^0(\xi)},$$

и тогда из формул (8) и (13)

$$u_1(x,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i\,B(\xi) + \gamma_0^0(\xi)\,A(\xi)}{\gamma_0^0(\xi) + \gamma_1^0(\xi)}\, e^{i\gamma_1^0(\xi)(z-h)} e^{-i\xi x}\, d\xi, \quad z > h, \tag{25}$$

$$u_0(x,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i\,B(\xi) - \gamma_1^0(\xi)\,A(\xi)}{\gamma_0^0(\xi) + \gamma_1^0(\xi)}\, e^{-i\gamma_0^0(\xi)(z-h)}\, e^{-i\xi x}\, d\xi, \quad z < h. \tag{26}$$

Легко проверить, что условия задачи о скачке выполнены.

Задачу о скачке при $n = 1$ легко интерпретировать как задачу о падении электромагнитных TE-волн на плоскую границу раздела сред. Легко видеть, что поле от внешних источников может быть задано как в верхней, так и в нижней полуплоскостях. При этом функции $a(x), b(x)$ определяются как разности предельных значений на $z = h$ потенциальных функций падающих полей и их нормальных производных.

Замечание 4. Если на плоскую границу раздела двух сред падает плоская электромагнитная волна, то из формул (25) и (26) легко получить, что отраженная и преломленная волны тоже плоские и определяются однозначно.

Замечание 5. В общем случае решение задачи о скачке не единственно. Покажем, что однородная задача о скачке может иметь ненулевые решения.

Рассмотрим случай $n = 2$. Пусть $h_1 = 0, h_2 = \Delta h$ и скачки искомого решения на прямых $z = 0$ и $z = \Delta h$ (в образах Фурье)

$$U_1^+(\xi) - U_1^-(\xi) = A_1(\xi), \quad V_1^+(\xi) - V_1^-(\xi) = B_1(\xi),$$
$$U_2^+(\xi) - U_2^-(\xi) = A_2(\xi), \quad V_2^+(\xi) - V_2^-(\xi) = B_2(\xi).$$

Из условий (5) и (11)

$$V_2^+(\xi) = i\,\gamma_2^0(\xi)\,U_2^+(\xi), \quad V_1^-(\xi) = -i\,\gamma_0^0(\xi)\,U_1^-(\xi),$$

а условия (15), (16) при $j = 1$ имеют вид

$$[V_1^+(\xi) - i\,\gamma_1^0(\xi)\,U_1^+(\xi)] - e^{i\Delta h\gamma_1^0(\xi)}\,[V_2^-(\xi) - i\,\gamma_1^0(\xi)\,U_2^-(\xi)] = 0,$$
$$e^{i\Delta h\gamma_1^0(\xi)}\,[V_1^+(\xi) + i\,\gamma_1^0(\xi)\,U_1^+(\xi)] - [V_2^-(\xi) + i\,\gamma_1^0(\xi)\,U_2^-(\xi)] = 0.$$

Последовательно исключая неизвестные, легко получим систему только из двух уравнений, например,

$$\begin{aligned} &[\gamma_0^0(\xi) + \gamma_1^0(\xi)]\,U_1^+(\xi) + e^{i\Delta h\gamma_1^0(\xi)}\,[\gamma_2^0(\xi) - \gamma_1^0(\xi)]\,U_2^-(\xi) = \\ &= \gamma_0^0(\xi)\,A_1(\xi) - i\,B_1(\xi) - e^{i\Delta h\gamma_1^0(\xi)}\,[\gamma_2^0(\xi)\,A_2(\xi) + i\,B_2(\xi)], \\ &e^{i\Delta h\gamma_1^0(\xi)}\,[\gamma_0^0(\xi) - \gamma_1^0(\xi)]\,U_1^+(\xi) + [\gamma_2^0(\xi) + \gamma_1^0(\xi)]\,U_2^-(\xi) = \\ &= e^{i\Delta h\gamma_1^0(\xi)}\,[\gamma_0^0(\xi)\,A_1(\xi) - i\,B_1(\xi)] - \gamma_2^0(\xi)\,A_2(\xi) - i\,B_2(\xi). \end{aligned} \tag{27}$$

Пусть $k_2 \leq k_0 < k_1$. Определитель системы (27)

$$\Delta(\xi) = [\gamma_0^0(\xi) + \gamma_1^0(\xi)]\,[\gamma_2^0(\xi) + \gamma_1^0(\xi)] - e^{i2\Delta h\gamma_1^0(\xi)}\,[\gamma_0^0(\xi) - \gamma_1^0(\xi)]\,[\gamma_2^0(\xi) - \gamma_1^0(\xi)]$$

может обращаться в нуль в конечном числе точек интервала (k_0, k_1). Действительно, преобразуем уравнение $\Delta(\xi) = 0$ к виду

$$\left(1 + \frac{\gamma_0^0(\xi)}{\gamma_1^0(\xi)}\right)\left(1 + \frac{\gamma_2^0(\xi)}{\gamma_1^0(\xi)}\right)e^{-i\Delta h\gamma_1^0(\xi)} - \left(1 - \frac{\gamma_0^0(\xi)}{\gamma_1^0(\xi)}\right)\left(1 - \frac{\gamma_2^0(\xi)}{\gamma_1^0(\xi)}\right)e^{i\Delta h\gamma_1^0(\xi)} = 0$$

или

$$i\,\mathrm{tg}\,[\Delta h\gamma_1^0(\xi)] = \frac{\dfrac{\gamma_0^0(\xi)}{\gamma_1^0(\xi)} + \dfrac{\gamma_2^0(\xi)}{\gamma_1^0(\xi)}}{1 + \dfrac{\gamma_0^0(\xi)}{\gamma_1^0(\xi)}\,\dfrac{\gamma_2^0(\xi)}{\gamma_1^0(\xi)}}. \tag{28}$$

Как известно, это уравнение является характеристическим (дисперсионным) уравнением для определения эффективных показателей преломления TE-поляризованных волноводных мод планарного диэлектрического волновода [6]. Уравнение (28) имеет корни, если над интервалом (k_0, k_1) пересекаются графики функций, стоящих в левой и правой частях уравнения. Известно, что существует не более чем конечное число таких корней. Это число тем больше, чем больше толщина волноводного слоя Δh и чем больше разность $k_1 - k_0$.

Замечание 6. Следовательно, при корректной постановке граничных задач для уравнения Гельмгольца в слоистой среде нужно в ряде случаев сужать класс искомых решений так, чтобы не возникало собственных волн в волноводной диэлектрической структуре.

Покажем, как можно упростить систему линейных алгебраических уравнений (5), (11), (15), (16) и (23) при любом n и привести ее к системе всего из двух уравнений. Введем векторы $W_j^\pm(\xi) = (V_j^\pm(\xi), U_j^\pm(\xi))$, $C_j(\xi) = (B_j(\xi), A_j(\xi))$, $j = 1, \ldots, n$, и матрицы

$$M_j(\xi) = \begin{pmatrix} \cos[\Delta h_j\gamma_j^0(\xi)] & -\sin[\Delta h_j\gamma_j^0(\xi)] \\ \sin[\Delta h_j\gamma_j^0(\xi)] & \cos[\Delta h_j\gamma_j^0(\xi)] \end{pmatrix}, \quad \Gamma_j(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma_j^0(\xi) \end{pmatrix}.$$

Тогда условия (23) можно записать в виде

$$W_j^+(\xi) = W_j^-(\xi) + C_j(\xi), \quad j = 1, \ldots, n, \tag{29}$$

а условия (15), (16) — в виде

$$W_{j+1}^-(\xi) = \Gamma_j^{-1}(\xi)\, M_j(\xi)\, \Gamma_j(\xi)\, W_j^+(\xi). \tag{30}$$

С помощью равенства (29) можно переносить граничные условия для искомых распределений с одной стороны прямой $z = h_j$ на другую, а с помощью равенства (30) — с одной границы полосы D_j на другую, т. е. с нижней стороны прямой $z = h_{j+1}$ на верхнюю сторону прямой $z = h_j$.

Действительно, пусть на прямой $z = h_{j+1}$ задано условие

$$\langle G_{j+1}(\xi), W_{j+1}^+(\xi)\rangle = h_{j+1}(\xi);$$

здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — сумма произведений компонент векторов (скалярное произведение в вещественном случае). Тогда из равенства (29)

$$\langle G_{j+1}(\xi), W_{j+1}^-(\xi)\rangle = h_{j+1}(\xi) - \langle G_{j+1}(\xi), C_{j+1}(\xi)\rangle,$$

а из условия (30)

$$\langle N_j(\xi)\, G_{j+1}(\xi), W_j^+(\xi)\rangle = h_{j+1}(\xi) - \langle G_{j+1}(\xi), C_{j+1}(\xi)\rangle,$$

где

$$N_j(\xi) = \left[\Gamma_j^{-1}(\xi)\, M_j(\xi)\, \Gamma_j(\xi)\right]';$$

здесь A' — транспонированная матрица A. Таким образом, граничное условие с верхней стороны прямой $z = h_{j+1}$ перенесено вниз, на верхнюю сторону прямой $z = h_j$.

Запишем условия (5) на $z = h_n$ и условие (11) на прямой $z = h_1$ в виде

$$\begin{aligned} &\langle G_n(\xi), W_n^+(\xi)\rangle = 0, \quad G_n(\xi) = (1, -i\gamma_n^0(\xi)),\\ &\langle G_1(\xi), W_1^-(\xi)\rangle = 0, \quad G_1(\xi) = (1, i\gamma_0^0(\xi)). \end{aligned} \tag{31}$$

Тогда на прямой $z = h_{n-1}$

$$\langle N_{n-1}(\xi)\, G_n(\xi), W_{n-1}^+(\xi)\rangle = -\langle G_n(\xi), C_n(\xi)\rangle,$$

на $z = h_{n-2}$

$$\langle N_{n-2}(\xi)\, N_{n-1}(\xi)\, G_n(\xi), W_{n-2}^+(\xi)\rangle = -\langle G_n(\xi), C_n(\xi)\rangle - \langle N_{n-1}(\xi)\, G_n(\xi), C_{n-1}(\xi)\rangle$$

и так далее. На прямой $z = h_1$ получим

$$\begin{aligned} \langle N_1(\xi)\ldots N_{n-1}(\xi)\, G_n(\xi), W_1^+(\xi)\rangle = -\langle G_n(\xi), C_n(\xi)\rangle -\\ - \langle N_{n-1}(\xi)\, G_n(\xi), C_{n-1}(\xi)\rangle - \cdots - \langle N_2(\xi)\ldots N_{n-1}(\xi)\, G_n(\xi), C_2(\xi)\rangle, \end{aligned}$$

а тогда в силу равенства (29)

$$\begin{aligned} \langle N_1(\xi)\ldots N_{n-1}(\xi)\, G_n(\xi), W_1^-(\xi)\rangle = -\langle G_n(\xi), C_n(\xi)\rangle -\\ - \langle N_{n-1}(\xi)\, G_n(\xi), C_{n-1}(\xi)\rangle - \cdots - \langle N_1(\xi)\ldots N_{n-1}(\xi)\, G_n(\xi), C_1(\xi)\rangle. \end{aligned} \tag{32}$$

Итак, большая система линейных уравнений из теоремы 1 преобразована к двум уравнениям (31), (32). Если число слоев n относительно невелико, то для системы уравнений (5), (11), (15), (16) и (23) можно использовать метод последовательного исключения неизвестных. Тогда придем к уравнениям вида (24). Разумеется, можно переносить граничные условия и в другом направлении, с нижнего слоя на верхний.

5. Задача дифракции на металлических лентах

Пусть на границах раздела сред размещены идеально проводящие бесконечно тонкие металлические ленты, причем в плоскости $y = 0$ на прямой $z = h_j$, $j = 1, \dots, n$, лентам соответствуют отрезки $[\alpha_{jk}, \beta_{jk}]$, $k = 1, \dots, m_j$. Нужно найти поле, возникающее при падении на систему лент из верхней полуплоскости $z > h_n$ плоской ТЕ-волны с потенциальной функцией $\widetilde{u}(x, z)$.

Будем искать уходящие на бесконечность решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям сопряжения

$$
\begin{gathered}
u(x, h_n + 0) = -\widetilde{u}(x, h_n + 0), \ \ u(x, h_n - 0) = 0, \ \ x \in (\alpha_{nk}, \beta_{nk}); \\
u(x, h_j \pm 0) = 0, \ \ x \in (\alpha_{jk}, \beta_{jk}), \ \ j = 1, \dots, n - 1; \\
u(x, h_n + 0) - u(x, h_n - 0) = -\widetilde{u}(x, h_n + 0), \ \ x \notin (\alpha_{nk}, \beta_{nk}); \\
\frac{\partial u}{\partial z}(x, h_n + 0) - \frac{\partial u}{\partial z}(x, h_n - 0) = -\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial z}(x, h_n + 0), \ \ x \notin (\alpha_{nk}, \beta_{nk}); \\
u(x, h_j + 0) - u(x, h_j - 0) = 0, \ \ \frac{\partial u}{\partial z}(x, h_j + 0) - \frac{\partial u}{\partial z}(x, h_j - 0) = 0, \\
x \notin (\alpha_{jk}, \beta_{jk}), \ \ j = 1, \dots, n - 1.
\end{gathered}
\tag{33}
$$

Теорема 2. *Пусть функции $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, определены на системах интервалов $(\alpha_{jk}, \beta_{jk})$, $k = 1, \dots, m_j$. Задача дифракции ТЕ-волны на системе металлических лент в плоскослоистой среде эквивалентна интегральному уравнению*

$$
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U_j(\xi, \zeta)\, e^{-i\xi x}\, e^{-i\zeta h_j}\, d\xi\, d\zeta = \begin{cases} j = n : -\widetilde{u}(x, h_n + 0), & x \in (\alpha_{nk}, \beta_{nk}); \\ j \neq n : 0, & x \in (\alpha_{jk}, \beta_{jk}), \end{cases}
\tag{34}
$$

относительно функций $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, где $U_j(\xi, \zeta)$ — образы Фурье решения $u_j(x, z)$, $j = 1, \dots, n$, задачи о скачке при

$$
\begin{gathered}
a_j(x) = 0, \ \ j = 1, \dots, n - 1; \quad a_n(x) = -\widetilde{u}(x, h_n + 0); \\
b_j(x) = \{\varphi_j(x), \ x \in (\alpha_{jk}, \beta_{jk}); \ \ 0, \ x \notin (\alpha_{jk}, \beta_{jk})\}, \quad j = 1, \dots, n - 1; \\
b_n(x) = \left\{\varphi_n(x), \ x \in (\alpha_{nk}, \beta_{nk}); \ \ -\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial z}(x, h_n + 0), \ x \notin (\alpha_{jk}, \beta_{jk})\right\}.
\end{gathered}
\tag{35}
$$

Доказательство. Будем искать решение задачи дифракции как решение задачи о скачке. Из условий сопряжения полей сразу следует, что на границах раздела сред вне лент

$$
\begin{gathered}
a_j(x) = 0, \quad b_j(x) = 0, \quad j = 1, \dots, n - 1, \\
a_n(x) = -\widetilde{u}(x, h_n + 0), \quad b_n(x) = -\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial z}(x, h_n + 0).
\end{gathered}
$$

На лентах

$$
a_j(x) = 0, \ \ j = 1, \dots, n - 1, \quad a_n(x) = -\widetilde{u}(x, h_n + 0),
$$

а функции $b_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, остаются пока неизвестными. Запишем решение задачи о скачке и потребуем, чтобы выполнялись условия

$$
u_j(x, h_j + 0) = 0, \ \ j = 1, \dots, n - 1; \quad u_n(x, h_n + 0) = -\widetilde{u}(x, h_n + 0). \quad \square
$$

Рассмотрим подробнее при $n = 1$ задачу дифракции электромагнитной волны, падающей из полупространства $z > h$ на металлическую ленту $\alpha < x < \beta$, $z = h$, расположенную на границе раздела двух сред. В соответствии с теоремой 2 будем искать решение задачи дифракции как решение задачи о скачке при

$$
a(x) = -\widetilde{u}(x, h + 0), \quad b(x) = \left\{\varphi(x), \ x \in (\alpha, \beta); \ \ -\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial z}(x, h + 0), \ x \notin (\alpha, \beta)\right\},
$$

где $\varphi(x)$ — искомая функция. Подставим $a(x)$, $b(x)$ в формулы, дающие решение задачи о скачке. Из граничного условия на одной из сторон металлической ленты (при вычислении $a(x)$ использована только разность граничных условий) получим интегральное уравнение для определения $\varphi(x)$.

Можно рассуждать немного иначе. Будем искать решение задачи дифракции в виде

$$u(x,z) = u^D(x,z) + u^M(x,z),$$

где первое слагаемое в правой части — решение задачи о падении волны на границу раздела сред без металлической ленты, а второе слагаемое — новая искомая функция. Новая искомая функция также должна быть решением задачи о скачке при

$$a^M(x) = 0, \quad b^M(x) = \{\varphi^M(x),\ x \in (\alpha,\beta);\ 0,\ x \notin (\alpha,\beta)\}.$$

Обозначим

$$\widetilde{u}(x) = \widetilde{u}(x, h+0), \quad \widetilde{v}(x) = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial z}(x, h+0).$$

Из условия (9) для приходящей с бесконечности волны следует

$$\widetilde{V}(\xi) + i\gamma_1^0(\xi)\,\widetilde{U}(\xi) = 0.$$

Тогда из граничного условия на верхней стороне металлической ленты следует

$$\int_\alpha^\beta \varphi^M(t)\left[\frac{-i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\gamma_0^0(\xi)+\gamma_1^0(\xi)}\,e^{i(t-x)\xi}\,d\xi\right]dt =$$
$$= -\widetilde{u}(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\gamma_1^0(\xi)-\gamma_0^0(\xi)}{\gamma_0^0(\xi)+\gamma_1^0(\xi)}\,\widetilde{U}(\xi)\,e^{-i\xi x}\,d\xi, \quad x \in (\alpha,\beta). \quad (36)$$

Если диэлектрики в верхней и нижней полуплоскостях одинаковы, т. е. $k_0 = k_1$, то и $\gamma_0^0(\xi) = \gamma_1^0(\xi)$. Тогда

$$\int_\alpha^\beta \varphi^M(t)\left[\frac{-i}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\gamma_0^0(\xi)}\,e^{i(t-x)\xi}\,d\xi\right]dt = -\widetilde{u}(x), \quad x \in (\alpha,\beta).$$

Вычислив внутренний интеграл по формулам (130) и (134) из [10], получим интегральное уравнение

$$\frac{i}{4\sqrt{\pi}}\Gamma(1/2)\int_\alpha^\beta \varphi^M(t)H_0^{(1)}(k|t-x|)\,dt = -\widetilde{u}(x), \quad x \in (\alpha,\beta), \quad (37)$$

совпадающее с известным уравнением из § 5.6 книги [11].

Интегральные уравнения 1-го рода с логарифмической особенностью в ядре (36), (37) и другие частные случаи уравнения (34) могут быть решены численно методом Галёркина с разложением искомой функции по полиномам Чебышева с весом ([8], п. 1.3).

Литература

1. Pleshchinskaya I.E., Pleshchinskii N.B. *The Cauchy problem and potentials for elliptic partial differential equations and some of their applications* // Advances in Equations and Inequalities. – 1999. – P. 127–146.
2. Pleshchinskaya I.E., Pleshchinskii N.B. *On classification of eigen waves of planar, cylindrical and spherical dielectric waveguides* // Math. meth. in electromagnetic theory. – Proc. Int. Conf. MMET*98. Kharkov, Ukraine, June 2–5, 1998. – V. 2. – P. 781–783.
3. Pleshchinskii N.B., Tumakov D.N. *On solving diffraction problems for the junctions of open waveguides in the classes of distributions* // Math. meth. in electromagnetic theory. – Proc. Int. Conf. MMET*98. Kharkov, Ukraine, June 2-5, 1998. – V. 2. – P. 801–803.
4. Бреховских Л.М. *Волны в слоистых средах.* – М.: Наука, 1973. – 343 с.
5. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. *Теория волн.* – М.: Наука, 1979. – 384 с.

6. Адамс М. *Введение в теорию оптических волноводов.* – М.: Мир, 1984. – 512 с.
7. Хёнл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. *Теория дифракции.* – М.: Мир, 1964. – 428 с.
8. Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г. *Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах (псевдодифференциальные операторы в задачах дифракции).* – М.: ИПРЖР, 1996. – 176 с.
9. Егоров Ю.В. *Линейные дифференциальные уравнения главного типа.* – М.: Наука, 1984. – 360 с.
10. Брычков Ю.А., Прудников А.П. *Интегральные преобразования обобщенных функций.* – М.: Наука, 1977. – 288 с.
11. Нобл Б. *Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных.* – М.: Ин. лит., 1962. – 280 с.

Казанский государственный университет

Поступила 25.05.2000