ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 3 (466)

УДК 514.763

К.В. АНДРЕЕВ

О СТРУКТУРНЫХ КОНСТАНТАХ АЛГЕБРЫ ОКТАВ. УРАВНЕНИЕ КЛИФФОРДА

1. Уравнение Клиффорда

Построим трехиндексные операторы, которые являются основой 8-мерного спинорного формализма. Для этого попытаемся найти решение уравнения Клиффорда ([1], с. 519), заданного на 8-мерном пространстве C^8:

$$\gamma_\Lambda\gamma_\Psi+\gamma_\Psi\gamma_\Lambda=-2g_{\Lambda\Psi}I,\quad \Lambda,\Psi,\ldots=\overline{1,8}, \tag{1}$$

где I — единичная матрица. Поскольку 8 четно, то можно положить ([1], с. 522)

$$\gamma_\Lambda:=\sqrt{2}i\begin{pmatrix}0 & {\eta_\Lambda}^{AR}\\ \widetilde{\eta}_{\Lambda SB} & 0\end{pmatrix},\quad A,B,\ldots=\overline{1,8}. \tag{2}$$

При этом на пространстве C^8 действует метрический тензор $g_{\Lambda\Psi}$, что превращает это пространство в комплексно-евклидово пространство CR_8. Пусть задано пространство $\widetilde{C}^8$, на котором определен метрический битензор

$$\varepsilon_{ABCD}:=\eta^\Lambda{}_{AB}\eta^\Psi{}_{CD}g_{\Lambda\Psi},$$

с помощью которого можно опускать и поднимать только парные индексы. Его разложение должно иметь вид

$$\begin{gathered}\varepsilon_{ABCD}=\widehat{\varepsilon}_{ABCD}+\frac{1}{2}(\widetilde{\varepsilon}_{AC}\widetilde{\varepsilon}_{BD}-\widetilde{\varepsilon}_{AB}\widetilde{\varepsilon}_{CD}-\widetilde{\varepsilon}_{AD}\widetilde{\varepsilon}_{BC}+\varepsilon_{AC}\varepsilon_{BD}+\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD}-\varepsilon_{AD}\varepsilon_{BC}),\\ \varepsilon_{AB(CD)}=\frac{1}{2}\varepsilon_{AB}\varepsilon_{CD},\quad \varepsilon_{A(B|C|D)}=\frac{1}{2}\varepsilon_{AC}\varepsilon_{BD}.\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $\widetilde{\varepsilon}_{AC}$ — кососимметрический тензор, ε_{AC} — симметрический тензор. Тензор же $\widehat{\varepsilon}_{ABCD}$ кососимметричен по всем своим индексам, причем в некотором базисе представляет собой прямую сумму тензора ε_{abcd} и ему дуального — ε^{abcd} $(a,b,c,d=\overline{1,4})$. 4-вектор ε^{abcd} является метрическим на пространстве бивекторов пространства C^4 ([1], с. 83). Отметим, что подобная схема рассматривалась в статье [2]. Кроме того, предположим, что симметрический тензор ε_{AC} является метрическим на пространстве $\widetilde{C}^8$, т. е. с помощью него можно поднимать и опускать одиночные индексы. Поэтому тензор ε_{BS} превратит пространство $\widetilde{C}^8$ в комплексно-евклидово пространство $\widetilde{CR}_8$. Пусть в представлении (2) теперь $\widetilde{\eta}_{\Lambda SB}:=\eta_{\Lambda BS}=\frac{1}{4}{\eta_\Lambda}^{PQ}\varepsilon_{BSPQ}={\eta_\Lambda}^{PQ}\varepsilon_{BP}\varepsilon_{SQ}$, тогда уравнение Клиффорда (1) перепишется в виде

$${\eta_\Lambda}^{AR}\eta_{\Psi BR}+{\eta_\Psi}^{AR}\eta_{\Lambda BR}=g_{\Lambda\Psi}{\delta_B}^A, \tag{4}$$

а однозначно определенные невырожденные операторы ${\eta_\Lambda}^{AR}$ будут искомыми.

2. Двулистное накрытие группой Spin (8) группы SO(8,C). Алгебра октав

Будем рассматривать два вида расслоений с базой CR_8:

1. касательное расслоение $\tau^C(CR_8)$ со слоями, изоморфными CR_8;
2. спинорное расслоение $A^C(CR_8)$ со слоями, изоморфными $\widetilde{CR}_8$.

Тогда для вектора $r^\Lambda \in CR_8$ можно определить его образ в спинорном расслоении $A^C(CR_8)$ по правилу $r^{AB} := \eta_\Lambda{}^{AB} r^\Lambda$, что определит соответствие между векторами пространства CR_8 и битензорами пространства $\widetilde{CR}_8$.

Теорема 1 (о разложении). *Для всех $r^\Lambda \in CR_8$ и некоторых $X^A, Y^A \in \widetilde{CR}_8$ имеет место разложение*

$$r^\Lambda = \eta^\Lambda{}_{AB} X^A Y^B. \tag{5}$$

Доказательство. Из (4) следует

$$r_{KL}\delta_A{}^B = r_{AR}\varepsilon_{KL}{}^{BR} + r^{BR}\varepsilon_{KLAR}. \tag{6}$$

Если свернуть (6) с $P^K P^A$, полагая, что P^K — произвольный невырожденный вектор ($p := \frac{1}{2}\varepsilon_{AK}P^A P^K \neq 0$) и $Q_L := r_{KL}P^K$, то из (3) получится $r^{BL} = \frac{1}{p}Q^R P^K(\delta_R{}^L \delta_K{}^B - \varepsilon_K{}^{LB}{}_R) = \frac{1}{p}Q^R P^K \varepsilon^{BL}{}_{KR}$. Положим $X^A := \frac{1}{\sqrt{p}}P^A$, $Y^B := \frac{1}{\sqrt{p}}Q^B$, что доказывает теорему. □

Теперь возможно построить структурные константы алгебры октав из уже имеющихся операторов $\eta^\Lambda{}_{AB}$. Определим для этого некоторые операторы

$$P^\Lambda{}_B := \eta^\Lambda{}_{AB} X^A, \quad X^A X_A := 2. \tag{7}$$

Тогда на основании (3) и (4) будут верны тождества

$$P^\Lambda{}_A P^\Psi{}_B \varepsilon^{AB} = g^{\Lambda\Psi}, \quad P^\Lambda{}_A P^\Psi{}_B g_{\Lambda\Psi} = \varepsilon_{AB}. \tag{8}$$

Таким образом, операторы $P^\Lambda{}_A$ определяют изоморфизм пространств $CR_8 \cong \widetilde{CR}_8$, который выражается формулой $r^\Lambda = P^\Lambda{}_B Y^B$, что следует и из (5). Положим по определению

$$\eta_\Lambda{}^{\Psi\Theta} := \eta_\Lambda{}^{AB} P^\Psi{}_A P^\Theta{}_B. \tag{9}$$

Это означает, что тождествами $\eta_{(\Lambda|\Theta|}{}^\Upsilon \eta_{\Psi)\Phi}{}^\Theta = \eta_{(\Lambda\Psi)}{}^\Theta \eta_{\Theta\Phi}{}^\Upsilon$, $\eta_{\Lambda(\Psi}{}^\Theta \eta_{|\Theta|\Upsilon)}{}^\Phi = \eta_{(\Psi\Upsilon)}{}^\Theta \eta_{\Lambda\Theta}{}^\Phi$, $\eta_{(\Lambda}{}^{\Omega\Upsilon}\eta_{\Psi)\Omega\Gamma} = \frac{1}{2}g_{\Lambda\Psi}\delta_\Gamma{}^\Upsilon$, следующими из (3), (4), (8) и (9), определится алгебра октав со структурными константами $\eta_{\Lambda\Psi}{}^\Theta$. Умножение в этой алгебре будет диктоваться теоремой 1, а именно:

$$y^\Lambda = \eta_{\Psi\Phi}{}^\Lambda r^\Psi x^\Phi, \tag{10}$$

т. е. для любых октав r^Λ, x^Λ можно построить единственную октаву $y^\Lambda(r^\Psi, x^\Phi)$ по указанному правилу. Следовательно, центральное тождество Муфанг можно переписать следующим образом: $r^\Phi \eta_{\Phi\Theta}{}^\Omega \eta_{\Lambda\Psi}{}^\Theta \eta_{\Omega\Upsilon}{}^\Gamma r^\Upsilon = r^\Phi \eta_{\Phi\Lambda}{}^\Theta \eta_{\Theta\Omega}{}^\Gamma \eta_{\Psi\Upsilon}{}^\Omega r^\Upsilon$. Отметим, что доказательство этого тождества в отличие от доказательства, изложенного в ([3], с. 331), можно провести непосредственными выкладками, используя только (3), (4), (8) и (9).

Предложение 1. *Набором векторов $(r_i)^\Lambda$, где $(r_i)^\Lambda (r_i)_\Lambda = 2$, а i пробегает конечный набор значений, генерируется набор вращений $S_\Lambda{}^\Psi(r_i)$; комбинацией таких вращений можно получить любое преобразование из группы $SO(8, C)$.*

Доказательство. Согласно тождеству (1) и определению (2) можно построить произведение $rxr = r^\Lambda x^\Psi r^\Phi \gamma_\Lambda \gamma_\Psi \gamma_\Phi$ следующим образом: $r^\Omega \eta_\Omega{}^{CD} x^\Lambda \eta_{\Lambda CA} r^\Psi \eta_\Psi{}^{BA} = ((x^\Lambda r_\Lambda) r^\Psi - x^\Psi)\eta_\Psi{}^{BD}$. Отметим, что данное умножение не будет таковым в смысле (10). Свернув это тождество с $\frac{1}{4}\eta^\Phi{}_{BD}$, построим отображение $\phi_0(r)$,

$$S_\Lambda{}^\Phi(r) = r_\Lambda r^\Phi - \delta_\Lambda{}^\Phi, \quad \phi_0(r) : x^\Lambda \longmapsto (r_\Lambda x^\Lambda) r^\Phi - x^\Phi,$$

совпадающее с отображением ([3], с. 273–274), с помощью которого доказывается предложение 4 ([3], с. 273); при этом $\operatorname{Ker}\phi_0 = \{\pm 1\}$. $\square$

Преобразование $-S_{\Lambda}{}^{\Phi}(r)$ есть симметрия в гиперплоскости, перпендикулярной вектору r. Поэтому любое преобразование ортогональной группы $O(8,C)$ можно представить в виде конечного произведения таких симметрий; при этом для собственных вращений необходимо, чтобы число таких симметрий было четным. Таким образом, можно определить следующие преобразования (здесь i пробегает конечный набор значений от 1 до некоторого конечного k):

$$S_{\Lambda_1}{}^{\Lambda_{2k+1}} := \prod_{i=1}^{2k} S_{\Lambda_i}{}^{\Lambda_{i+1}}(r_i), \quad S_{\Lambda}{}^{\Psi} S_{\Phi}{}^{\Theta} g_{\Psi\Theta} = g_{\Lambda\Phi},$$
$$(R_i)_{AB} := (r_i)_{\Lambda} \eta^{\Lambda}{}_{AB}, \quad (R_i)_{AB}(R_i)^{AC} = \delta_B{}^C, \quad (R_i)_{BA}(R_i)^{CA} = \delta_B{}^C,$$
$$\widetilde{S}_{C_{2k+1}}{}^{C_1} := \prod_{i=1}^{k} (R_i)^{C_{2i-1}C_{2i}} (R_i)_{C_{2i+1}C_{2i}}, \quad \widetilde{S}_A{}^B \widetilde{S}_C{}^D \varepsilon_{BD} = \varepsilon_{AC},$$
$$\tilde{\widetilde{S}}_{C_{2k+1}}{}^{C_1} := \prod_{i=1}^{k} (R_i)^{C_{2i}C_{2i-1}} (R_i)_{C_{2i}C_{2i+1}}, \quad \tilde{\widetilde{S}}_A{}^B \tilde{\widetilde{S}}_C{}^D \varepsilon_{BD} = \varepsilon_{AC},$$

что позволяет перейти к явным представлениям, которые описываются следующими двумя теоремами.

Теорема 2 (о двулистном накрытии). *Двулистное накрытие* $\mathrm{Spin}(8)/\{\pm 1\} \cong SO(8,C)$ *в явном виде описывается уравнением*

$$S_{\Lambda}{}^{\Psi} = \frac{1}{4} \eta_{\Lambda}{}^{AB} \eta^{\Psi}{}_{CD} \widetilde{S}_A{}^C \eta^{\Phi} S_{\Phi}{}^{\Theta} \eta_{\Theta K}{}^{D} \widetilde{S}_B{}^K, \tag{11}$$

где каждому преобразованию $S_{\Lambda}{}^{\Psi}$ *из группы* $SO(8,C)$ *соответствуют два и только два преобразования* $\pm\widetilde{S}_A{}^C$ *из группы* $\mathrm{Spin}(8,C)$.

На основании (3) уравнение

$$\eta^{\Lambda}{}_{AB} + \eta^{\Lambda}{}_{BA} = \frac{1}{4} \varepsilon_{AB} \eta_{\Lambda}{}^{CD} \varepsilon_{CD}, \quad \eta_{\Lambda} := \frac{1}{4} \varepsilon_{CD} \eta_{\Lambda}{}^{CD}, \quad \eta_{\Lambda}\eta^{\Lambda} = 2, \tag{12}$$

переписывается как

$$\eta_{\Lambda AB} = P_{\Lambda}{}^{\Psi} \eta_{\Psi BA}, \quad P_{\Lambda}{}^{\Psi} := -\delta_{\Lambda}{}^{\Psi} + \eta_{\Lambda}\eta^{\Psi}. \tag{13}$$

При этом матрица тензора $P_{\Lambda}{}^{\Psi}$ ортогональна, ее определитель равен -1. Кроме того, вращение, определяемое тензором $P_{\Lambda}{}^{\Psi} S_{\Psi}{}^{\Phi}$, где $S_{\Psi}{}^{\Phi}$ удовлетворяет теореме 2, будет несобственным.

Теорема 3 (о несобственных вращениях). *Каждому несобственному преобразованию* $S_{\Lambda}{}^{\Psi}$ *из группы* $O(8,C)$ *соответствуют два и только два преобразования* $\pm\widetilde{S}_A{}^B$ *из группы* $\mathrm{Spin}(8)$, *что в явном виде описывается уравнением* $S_{\Lambda}{}^{\Psi} = \frac{1}{4} \eta_{\Lambda}{}^{BA} \eta^{\Psi}{}_{CD} \widetilde{S}_A{}^C \eta^{\Phi} S_{\Phi}{}^{\Theta} \eta_{\Theta K}{}^{D} \widetilde{S}_B{}^K$.

Теперь возможно построить явное представление изоморфизма алгебр Ли $so(8,C) \cong so(8,C)$, соответствующее двулистному накрытию $\mathrm{Spin}(8)/\{\pm 1\} \cong SO(8,C)$. Пусть заданы однопараметрические семейства $S_{\Lambda}{}^{\Theta}(\lambda)$, $\widetilde{S}_{\Lambda}{}^{\Theta}(\lambda)$, $S_{\Lambda}{}^{\Theta}(0) = \delta_{\Lambda}{}^{\Theta}$, $\widetilde{S}_A{}^B(0) = \delta_A{}^B$. С учетом этого продифференцируем (11), полагая $T_{\Lambda}{}^{\Theta} := \left[\frac{d}{d\lambda} S_{\Lambda}{}^{\Theta}(\lambda)\right]\Big|_{\lambda=0} = -T^{\Theta}{}_{\Lambda}$, $\widetilde{T}_A{}^B := \left[\frac{d}{d\lambda} \widetilde{S}_A{}^B(\lambda)\right]\Big|_{\lambda=0} = -\widetilde{T}^B{}_A$ и учитывая тождество $\eta_{\Psi}{}^{K}{}_{C} \eta_{[\Theta|A|}{}^{C} \eta_{\Omega]}{}^{A}{}_{K} = 4 g_{\Psi[\Theta}\eta_{\Omega]}$. Тогда после раскрытия всех скобок получим $-4T_{[\Lambda|\Phi|}P_{\Psi]}{}^{\Phi} = (\eta_{\Lambda}{}^{CB}\eta_{\Psi AB} + \eta_{\Lambda}{}^{BC}\eta_{\Psi BA})\widetilde{T}_C{}^A$. Воспользуемся формулами (12)–(13), что определит операторы $\widehat{A}_{\Lambda\Psi}{}^{AB} := \frac{1}{4}(\eta_{[\Lambda}{}^{CA}\eta_{\Psi]C}{}^{B} + \eta_{[\Lambda}{}^{AC}\eta_{\Psi]}{}^{B}{}_{C})$, $\widehat{A}_{\Lambda\Psi}{}^{AB}\widehat{A}^{\Upsilon\Omega}{}_{AB} = \delta_{[\Lambda}{}^{[\Upsilon}P_{\Psi]}{}^{\Omega]}$, $\widehat{A}_{\Lambda\Psi}{}^{AB}\widehat{A}^{\Lambda\Psi}{}_{CD} = \frac{1}{2}\delta_{[C}{}^{A}\delta_{D]}{}^{B} + \frac{1}{4}\varepsilon_{C}{}^{[A}{}_{D}{}^{B]}$, $A_{\Lambda\Psi}{}^{AB} := \frac{1}{2}\eta_{[\Lambda}{}^{CA}\eta_{\Psi]C}{}^{B}$, $A_{\Lambda\Psi}{}^{AB}A^{\Upsilon\Omega}{}_{AB} = \delta_{[\Lambda}{}^{[\Upsilon}\delta_{\Psi]}{}^{\Omega]}$, $A_{\Lambda\Psi}{}^{AB}A^{\Lambda\Psi}{}_{CD} = \delta_{[C}{}^{A}\delta_{D]}{}^{B}$. Отметим, что подобный оператор существует и для 6-мерного пространства CR_6 [4].

3. Инволюции в 8-мерном пространстве

Теория, изложенная в статье [5], позволяет перейти от комплексных пространств к действительным вложениям. Пусть в пространстве CR_8 задан оператор вложения $H_i{}^\Lambda$ $(i, j, \ldots = \overline{1,8})$. Тогда можно определить эрмитову инволюцию $S^\Psi{}_{\Lambda'} := H_i{}^\Psi \overline{H}^i{}_{\Lambda'}$, $S^\Psi{}_{\Lambda'} = \overline{S}_{\Lambda'}{}^\Psi$, $\overline{S}^{\Xi'}{}_\Psi S^\Psi{}_{\Lambda'} = \delta^{\Xi'}{}_{\Lambda'}$, $\overline{r}^{\Lambda'} = S_\Psi{}^{\Lambda'} r^\Psi$. Положим $\overline{\eta}_{\Lambda\Psi'}{}^{\Theta'} := S_\Lambda{}^{\Lambda'} \overline{\eta}_{\Lambda'\Psi'}{}^{\Theta'}$, $\eta_{\Lambda'\Psi}{}^\Theta := S^\Lambda{}_{\Lambda'} \eta_{\Lambda\Psi}{}^\Theta$.

Теорема 4 (об инволюции). *В алгебре октав имеет место модифицированное центральное тождество Муфанг*

$$\overline{r}^{\Lambda'} \overline{\eta}_{\Lambda'\Psi'}{}^{\Theta'} \eta_{\Phi'\Upsilon}{}^\Omega \eta_{\Theta'\Omega}{}^\Xi r^\Upsilon = \overline{r}^{\Lambda'} \overline{\eta}_{\Lambda'\Theta'}{}^{\Upsilon'} \overline{\eta}_{\Psi'\Phi'}{}^{\Theta'} \eta_{\Upsilon'\Omega}{}^\Xi r^\Omega. \tag{14}$$

Доказательство. Формула (14) может быть переписана в виде

$$S^\Psi{}_{\Psi'} \eta_{\Psi\Gamma}{}^\Lambda = \overline{\eta}_{\Psi'\Phi'}{}^{\Theta'} S_\Gamma{}^{\Phi'} S^\Lambda{}_{\Theta'}. \tag{15}$$

Введем определения с учетом того, что $X^A X_A = 2$, $S^B{}_{A'} := S^\Gamma{}_{\Phi'} \overline{P}^{\Phi'}{}_{A'} P_\Gamma{}^B$, $P_\Gamma{}^B := \eta_{\Gamma A}{}^B X^A$, $\overline{P}_{\Gamma'}{}^{B'} := \overline{\eta}_{\Gamma' A'}{}^{B'} X^{A'}$, тогда (15) примет вид

$$S^\Psi{}_{\Psi'} \eta_\Psi{}^{AB} = \overline{\eta}_{\Psi'}{}^{A'B'} S^A{}_{A'} S^B{}_{B'}. \tag{16}$$

Заметим, что в специальном базисе матрица такой инволюции будет ортогональной. Это значит, что к тензору инволюции можно применить разложение (11), что и доказывает формулу (16). □

4. Принцип тройственности для двух квадрик

В качестве базы расслоений без ограничения общности можно взять комплексное риманово пространство CV_8. Однако все результаты, полученные выше, будут верны лишь локально — в некоторой окрестности невырожденной точки базы. Далее, геометрической интерпретацией уравнения (3) и соответственно операторов $\eta_\Lambda{}^{AB}$ будет служить теорема 5 из [4].

Первый пункт этой теоремы соответствует принципу тройственности Картана ([6], с. 175), а третий — обобщению соответствия Кляйна ([1], с. 363). Кроме того, используя операторы (7), эти две квадрики можно отождествить, получая из последнего пункта теоремы 5 ([4]) геометрическое истолкование структурных констант алгебры октав.

Литература

1. Пенроуз Р., Риндлер В. *Спиноры и пространство-время. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля.* – М.: Мир, 1987. – 528 с.
2. Широков А.П. *К вопросу об A-пространствах* // 125 лет неевклидовой геометрии Лобачевского. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1952. – С. 195–200.
3. Постников М.М. *Лекции по геометрии. Семестр 5. Группы и алгебры Ли.* Учеб. пособие. – М.: Наука, 1986. – 415 с.
4. Андреев К.В. *О спинорном формализме при $n = 6$* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 1. – С. 9–20.
5. Нейфельд Э.Г. *Об инволюциях в комплексных пространствах* // Тр. геометрич. семин. – Казань, 1989. – Вып. 19. – С. 71–82
6. Картан Э. *Теория спиноров.* – М.: Ин. лит., 1947. – 223 с.

Башкирский государственный университет

Поступила 09.07.1999