ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 3 (502)

УДК 517.958

Л.Д. ЭСКИН

УРАВНЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩИЕ ДИНАМИКУ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ С РЕОЛОГИЧЕСКИМ ЗАКОНОМ РЕЙНЕРА–РИВЛИНА. I. ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ

1. Введение

В первой части предлагаемой работы проводится полный групповой анализ уравнения

$$u_t = (u^2 f(v))_x, \quad v = uu_x. \tag{1.1}$$

Уравнения вида (1.1) описывают динамику поверхности неньютоновской жидкости с реологическим законом Рейнера–Ривлина [1], процесс турбулентной фильтрации газа в пористой среде [2], процессы гидроразрыва и другие. В приложениях для произвольной функции f (произвольного элемента по терминологии [3], которой будем придерживаться ниже) всегда выполняется

$$\textit{условие } A: \quad f(0) = 0.$$

В настоящее время известен целый ряд уравнений с произвольным элементом, представляющих значительный интерес для приложений, для которых удалось провести их полный групповой анализ: система уравнений газовой динамики [3]–[6], уравнения пограничного слоя Прандтля, уравнение нелинейной теплопроводности без источника и с источником, зависящим от температуры, уравнение нелинейной фильтрации и другие [3], [7]; частичное решение получила задача группового анализа нелинейного волнового уравнения [8] (достаточно полный обзор полученных результатов имеется в [1]). Целью первой части предлагаемой работы является пополнение этого списка системой уравнений (1.1). Во второй части работы исследуются инвариантные решения полученных инвариантных уравнений. Следует отметить, что в случае выполнения условия А уравнение (1.1) является уравнением с двойным вырождением (по неизвестной функции и ее производной), свойства решений таких уравнений в настоящее время интенсивно изучаются [9].

Как известно [3], для уравнений с произвольным элементом полный групповой анализ должен содержать следующее: 1) описание основной алгебры уравнения (1.1) с произвольной f; 2) описание его группы преобразований эквивалентности; 3) классификацию всех возможных случаев расширения основной алгебры (с точностью до преобразований из группы эквивалентности) и описание этих расширений. Общая схема решения этих задач была развита еще С. Ли, однако ее применение для каждой конкретной математической модели связано, как правило, с преодолением значительных трудностей, о чем и свидетельствует не слишком большой список до конца решенных задач, который был приведен выше.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 00-01-00128).

2. Основная алгебра уравнения (1.1)

С целью сокращения записи формул обозначим $(t, x) = (x^1, x^2)$, $u^1 = u$, $u^2 = uu_x$; $f^1 = f$; $f^2 = f'$, $f^3 = f''$ — производные функции $f(u^2)$ по аргументу u^2. В этих обозначениях уравнение(1.1) перепишется в виде

$$u_1^1 = 2u^1 u_2^1 f(u^2) + (u^1)^2 u_2^2 f^2(u^2), \quad u^2 = u^1 u_2^1. \tag{2.1}$$

Инфинитезимальный оператор точечной однопараметрической группы симметрии уравнения (2.1) имеет вид $X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ (здесь и ниже предполагается суммирование по повторяющемуся индексу $i = 1, 2$), где неизвестные коэффициенты a^i, b^i являются функциями от x^1, x^2, u^1, u^2 (для таких функций будем обозначать через a_1, a_2 частные производные соответственно по аргументам x^1, x^2, через a_{2+i} — частные производные по u^i). Первое продолжение оператора X запишется в виде $X + c^{ij} \frac{\partial}{\partial u_j^i}$, $i, j = 1, 2$, где коэффициенты c^{ij} выражаются через коэффициенты оператора X с помощью следующих формул [3]:

$$c^{ij} = D_j b^i - u_k^i D_j a^k, \tag{2.2}$$

D_j — оператор полного дифференцирования по x^j. Коэффициенты c^{ij} зависят не только от x^s, u^s, но и от производных u_r^s. Применяя к уравнению (2.1) инфинитезимальный критерий инвариантности, получим определяющие уравнения

$$b^2 - b^1 u_2^1 - u^1 c^{12} = 0, \tag{2.3}$$

$$c^{11} - H^1 f^1 - H^2 f^2 - H^3 f^3 = 0, \tag{2.4}$$

$$H^1 = 2(b^1 u_2^1 + u^1 c^{12}), \quad H^2 = u^1(2(b^2 u_2^1 + b^1 u_2^2) + u^1 c^{22}),$$
$$H^3 = (u^1)^2 u_2^2 b^2.$$

Уравнения (2.3), (2.4) должны выполняться на многообразии R, определенном уравнениями (2.1) в пространстве переменных x^i, u^i, u_j^i. Для перехода на многообразие R в уравнениях (2.3), (2.4) следует u_1^1 заменить правой частью первого из уравнений (2.1) и положить $u_2^1 = u^2/u^1$. После перехода на многообразие R переменные f^1, f^2, f^3 оказываются свободными (напомним, что в этом пункте функция f произвольна), и по ним можно выполнять расщепление.

Из (2.4) немедленно вытекает $H^3 = 0$, следовательно, $b^2 = 0$. Подставив в (2.3) c^{12} из (2.2), после перехода в полученном равенстве на многообразие R и последующего расщепления по свободным переменным f^1, f^2, u_2^2, u^2 получим $a^1 = a^1(x^1)$,

$$u^2 a_4^2 = u^1 b_4^1, \quad u^2 b^1 + (u_1)^2 b_2^1 + u^1 u^2 (b_3^1 - a_2^2) - (u^2)^2 a_3^2 = 0. \tag{2.5}$$

С учетом найденных соотношений из (2.3) теперь следует $H^1 = 0$, и равенство (2.4) принимает вид

$$c^{11} = H^2 f^2. \tag{2.6}$$

Заменим в (2.6) c^{11} и c^{22} с учетом уже найденных соотношений их выражениями из формул продолжения (2.2). После перехода в полученном равенстве на многообразие R и последующего расщепления по f^1, f^2, u_2^2, $(u_2^2)^2$, u^2 найдем

$$b_4^1 = a_4^2 = a_3^2 = a_1^2 = b_1^1 = 0, \quad 2b^1 = a_2^2 u^1, \quad b_3^1 = a_1^1. \tag{2.7}$$

Из (2.7) следует $a^2 = a^2(x^2)$, $a_2^2 = 2a_1^1$, $b^1 = a_1^1 u^1$, отсюда найдем

$$a^1 = ax^1 + b, \quad a^2 = 2ax^2 + c, \quad b^1 = au^1, \quad a, b, c \text{ — const}. \tag{2.8}$$

Равенство (2.5) тождественно выполняется в силу (2.8). Возвращаясь к старым обозначениям переменных, получим с помощью соотношений (2.8), что базу основной алгебры системы уравнений (1.1) составляют операторы

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = t\partial_t + 2x\partial_x + u\partial_u.$$

3. Группа преобразований эквивалентности уравнения (1.1)

Для вычисления группы преобразований эквивалентности уравнения (1.1), записанного в виде (2.1), последнее следует дополнить уравнениями

$$f_i^k = f_3^k = f_{ij}^k = 0, \quad f^2 = f_4^1 \quad (f_{ij}^k = \partial f^k / \partial u_j^i, \quad k, i, j = 1, 2), \tag{3.1}$$

выражающими зависимость функции f лишь от переменной u^2. Уравнения (2.1), (3.1) выделяют в пространстве

$$R = (x^i, u^i, u_j^i, f^k, f_i^k, f_{i+2}^k, f_{ij}^k)$$

многообразие R'. Инфинитезимальный оператор однопараметрической группы преобразований эквивалентности записывается в виде

$$Y = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b^i \frac{\partial}{\partial u^i} + d^i \frac{\partial}{\partial f^i},$$

где неизвестные коэффициенты a^i, b^i зависят лишь от x^j, u^j, а d^i — еще и от f^j, u_j^i. Первое продолжение оператора Y запишется в виде

$$Y^1 = Y + c^{ij} \frac{\partial}{\partial u_j^i} + V^{k,i} \frac{\partial}{\partial f_i^k} + V^{k,i+2} \frac{\partial}{\partial f_{i+2}^k} + V^{k,ij} \frac{\partial}{\partial f_{ij}^k},$$

причем для коэффициентов c^{ij} по-прежнему справедливы формулы (2.2), а для коэффициентов V имеем [8], [10]

$$V^{k,i} = \widetilde{D}_i(d^k) - f_j^k \widetilde{D}_i(a^j) - f_{j+2}^k \widetilde{D}_i(b^j) - f_{sr}^k \widetilde{D}_i(c^{sr}), \tag{3.2}$$

где $\widetilde{D}_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + f_i^k \frac{\partial}{\partial f^k}$.

При записи равенств (3.2) учитывалось то, что коэффициенты a^i, b^i, d^i не зависят от производных функций f^k, и были оставлены в операторах $\widetilde{D}_i$ лишь существенные слагаемые. Аналогичные (3.2) формулы справедливы и для коэффициентов $V^{k,i+2}$, $V^{k,ij}$, но с заменой оператора $\widetilde{D}_i$ соответственно на операторы

$$\widetilde{D}_{i+2} = \frac{\partial}{\partial u^i} + f_{i+2}^k \frac{\partial}{\partial f^k}, \quad \widetilde{D}_{ij} = \frac{\partial}{\partial u_j^i} + f_{ij}^k \frac{\partial}{\partial f^k}.$$

Поскольку определяющие уравнения, получающиеся с помощью инфинитезимального критерия инвариантности, следует рассматривать на многообразии R', то с учетом (3.1) можем положить

$$\widetilde{D}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \widetilde{D}_3 = \frac{\partial}{\partial u^1}, \quad \widetilde{D}_4 = \frac{\partial}{\partial u^2} + f_4^1 \frac{\partial}{\partial f^1} + f_4^2 \frac{\partial}{\partial f^2}, \quad \widetilde{D}_{ij} = \frac{\partial}{\partial u_j^i}. \tag{3.3}$$

Условие инвариантности уравнений (3.1) приводит к следующей группе определяющих уравнений:

$$V^{k,i} = 0, \quad V^{k,3} = 0, \quad V^{k,ij} = 0, \quad V^{1,4} = d^2. \tag{3.4}$$

С учетом соотношений (3.2) и (3.3) получаем $d_i^k = b_i^2 f_4^k$, но d^k, b^k и их производные по x^i не зависят от производных функций f^k по u^i, следовательно, $d_i^k = b_i^2 = 0$. Аналогично найдем $d_3^k = b_3^2 = 0$. Последнее уравнение системы (3.4) дает

$$d^2 = d_4^1 + f_4^1 \frac{\partial d^1}{\partial f^1} + f_4^2 \frac{\partial d^1}{\partial f^2} - f_4^1 b_4^2,$$

откуда получаем $d^2 = d^1_4$, $\frac{\partial d^1}{\partial f^2} = 0$, $\frac{\partial d^1}{\partial f^1} = b^2_4$. Объединяя полученные результаты, найдем

$$b^2 = b^2(u^2), \quad d^1 = d^1(u^2, f^1) = (b^2)' f^1 + a(u^2) \tag{3.5}$$

(здесь и далее $'$ означает дифференцирование по u^2 функции, зависящей только от u^2). Второе уравнение системы (2.1) приводит к определяющему уравнению

$$c^{12} = \left(b^2 - \frac{u^2}{u^1} b^1\right) \Big/ u^1, \tag{3.6}$$

а первое — к определяющему уравнению, которое с учетом соотношений (3.5), (3.6) преобразуется к виду

$$c^{11} - 2b^2 f^1 - 2u^2((b^2)' f^1 + a(u^2)) - 2u^1 u^2_2 b^1 f^2 - (u^1)^2 (f^2 c^{22} + u^2_2((b^2)'' f^1 + a')) = 0. \tag{3.7}$$

Расщепляя (3.6) по свободным переменным f^1, f^2, u^2_2 (при этом необходимо учитывать, что в силу соотношений (2.2), (2.1) c^{12} на многообразии R' выражается через f^1, f^2), получим $a^1 = a^1(x^1)$,

$$b^1_4 - \frac{u^2}{u^1} a^2_4 = 0, \tag{3.8}$$

$$b^1_2 + \frac{u^2}{u^1}\left(b^1_3 - a^2_2 - \frac{u^2}{u^1} a^2_3 + \frac{b^1}{u^1}\right) - \frac{b^2}{u^1} = 0. \tag{3.9}$$

Наконец, расщепляя с учетом уже полученных соотношений уравнение (3.7) по переменным f^1, $f^2 u^2_2$, $f^2 (u^2_2)^2$, u^2_1, u^2_2, $f^1 u^2_2$, найдем

$$b^1_3 - a^1_1 - \frac{u^2}{u^1} a^2_3 - \frac{b^2}{u^2} - (b^2)' = 0, \tag{3.10}$$

$$b^1_3 - a^1_1 - 2\frac{b^1}{u^1} - b^2_4 + a^2_2 = 0, \tag{3.11}$$

$$b^1_1 - \frac{u^2}{u_1} a^2_1 - 2u^2 a = 0, \tag{3.12}$$

$$a^2_4 = 0, \quad a' = 0, \quad b^1_4 = 0, \quad (b^2)'' = 0. \tag{3.13}$$

Из (3.13) находим $a(u^2) = a$, $b^2 = ku^2 + l$, $d^1 = kf^1 + a$ (k, l, a — постоянные), $d^2 = 0$, а из (3.12) находим $a^2_1 = -2au^1$, $b^1 = b^1(x^2, u^1)$. Соотношение (3.8) выполняется тождественно, а расщепление по степеням u^2 равенства (3.9) дает

$$a^2_3 = 0, \quad b^1_2 = \frac{l}{u^1}, \quad b^1_3 + \frac{b^1}{u^1} - a^2_2 - k = 0. \tag{3.14}$$

В результате получаем $a = 0$, $d^1 = kf^1$, $a^2 = a^2(x^2)$, а соотношения (3.10), (3.11) сводятся к соотношениям

$$l = 0, \quad b^1 = b^1(u^1), \quad b^1_3 - a^1_1 = 2k, \quad 2\frac{b^1}{u^1} - a^2_2 = k. \tag{3.15}$$

Из (3.14), (3.15) получаем $a^1 = mx^1 + r$, $a^2 = (2m + 3k)x^2 + s$, $b^1 = (m + 2k)u^1$, $b^2 = ku^2$, $d^1 = kf^1$, $d^2 = 0$, откуда следует, что базу алгебры Ли непрерывной группы преобразований эквивалентности составляют операторы (снова возвращаемся к исходным обозначениям)

$$\partial_t, \quad \partial_x, \quad t\partial_t + 2x\partial_x + u\partial_u, \quad 3x\partial_x + 2u\partial_u + u^2\frac{\partial}{\partial u^2} + f^1\frac{\partial}{\partial f^1}. \tag{3.16}$$

Не представляет труда с учетом операторов (3.16) и отображений $t \to -t$, $x \to -x$ выписать и конечные преобразования полной группы преобразований эквивалентности, но в дальнейшем они не используются.

4. Классификация возможных случаев расширения основной алгебры

Перейдем к исследованию возможностей расширения основной алгебры уравнения (1.1), найденной в п. 2. Для коэффициентов a^i, b^i, c^{ij} первого продолжения инфинитезимального оператора однопараметрической группы симметрий по-прежнему справедливы определяющие уравнения (2.3), (2.4) и формулы продолжения (2.2). Однако теперь функция $f(u^2)$ уже не является произвольной, и нельзя проводить расщепление по переменным f^1, f^2, f^3. Ниже будем предполагать $f''(u^2) \neq 0$ ($'$ — дифференцирование по u^2 функции, зависящей только от этого аргумента), оставляя без рассмотрения случай нелинейного уравнения теплопроводности, ранее полностью изученный [3].

После перехода в определяющем уравнении (2.3) на многообразие R и расщепления по переменным u_2^2, $(u_2^2)^2$ получим

$$b_4^1 - (u^1)^2 f'\Big(a_2^1 + \frac{u^2}{u^1}a_3^1\Big) - \frac{u^2}{u^1}a_4^2 = 0, \quad a_4^1 = 0, \tag{4.1}$$

$$b^2 - \frac{u^2}{u^1}b_2^1 - u^1\Big[b_2^1 + \frac{u^2}{u^1}b_3^1 - 2u^2 f\Big(a_2^1 + \frac{u^2}{u^1}a_3^1\Big) - \frac{u^2}{u^1}\Big(a_2^2 + \frac{u^2}{u^1}a_3^2\Big)\Big] = 0. \tag{4.2}$$

Аналогично после подстановки в определяющее уравнение (2.4) значений c^{11}, c^{22} из (2.2) и c^{12} из (2.3) с учетом (4.1), перехода на многообразие R и последующего расщепления по переменным u_2^2, $(u_2^2)^2$, u_1^2 получим равенства

$$a^1 = a^1(x^1), \quad a^2 = a^2(x^1, x^2, u^1), \quad b^1 = b^1(x^1, x^2, u^1) \tag{4.3}$$

(a^1, a^2, b^1 — пока неизвестные функции своих аргументов) и уравнения

$$b_1^1 + 2u^2 f\Big(b_3^1 - a_1^1 - \frac{u^2}{u^1}a_3^2\Big) - \frac{u^2}{u^1}a_1^2 - 2b^2 f - 2u^2 b^2 f' - (u^1)^2 f'\Big(b_2^2 + \frac{u^2}{u^1}b_3^2\Big) = 0, \tag{4.4}$$

$$(f'b^2)_4 = cf', \tag{4.5}$$

где

$$c = b_3^1 - a_1^1 + a_2^2 - 2\frac{b^1}{u^1}, \quad c = c(x^1, x^2, u^1). \tag{4.6}$$

В силу соотношений (4.3) коэффициент при f в уравнении (4.2) равен нулю, и b^2 оказывается квадратным трехчленом $b^2 = p + qu^2 + r(u^2)^2$, где

$$p = u^1 b_2^1, \quad q = \frac{b^1}{u^1} + b_3^1 - a_2^2, \quad r = -\frac{a_3^2}{u^1}. \tag{4.7}$$

Уравнение (4.5) является классифицирующим. Если $b^2 = 0$, то и $c = 0$. С учетом соотношений (4.4), (4.6), (4.7) нетрудно убедиться, что в этом случае функция f остается произвольной и допустимая алгебра совпадает с найденной в п. 2 основной алгеброй. Итак, $b^2 \neq 0$. Из условия А и уравнения (4.5) найдем

$$f'b^2 = cf + d, \quad d = \lim f'b^2 \ \ (u^2 \to 0). \tag{4.8}$$

Будем рассматривать два случая B_1 и B_2.

Случай B_1, $p = 0$. Будем иметь $d = q\lim f'u^2$. Нетрудно показать, что уравнение (4.8) будет иметь решение, удовлетворяющее условию А лишь при $d = 0$, следовательно, и $\lim f'u^2 = 0$, причем это решение будет зависеть только от переменной u^2 тогда и только тогда, когда $q = \widetilde{q}c$, $r = \widetilde{r}c$, где $\widetilde{q}$, $\widetilde{r}$ — постоянные. Получим

$$f = m\Big(\frac{u^2}{\widetilde{q} + \widetilde{r}u^2}\Big)^{1/\widetilde{q}}, \quad \widetilde{q} > 0; \quad f = m\exp\Big(-\frac{1}{\widetilde{r}u^2}\Big), \quad \widetilde{q} = 0, \quad \widetilde{r}u^2 > 0. \tag{4.9}$$

Перейдем к определению группы симметрии, допускаемой уравнением (2.1) с функцией f (4.9). С учетом уравнения (4.8) при $d = 0$ равенство (4.4) перепишем в виде

$$b_1^1 - \frac{u^2}{u^1}a_1^2 + f\left[2u^2\left(b_3^1 - a_1^1 - \frac{u^2}{u^1}a_3^2\right) - 2b^2 - 2u^2c - (u^1)^2\left(c_2 + \frac{u^2}{u^1}c_3\right)\right] = 0. \tag{4.10}$$

Из (4.10) и (4.7) находим $b_1^1 = 0$ и $b_2^1 = 0$, так что $b^1 = b^1(u^1)$, а в случае $\widetilde{q} \neq 1$ и $a_1^2 = 0$. Пусть сначала $\widetilde{q} \neq 1$. Тогда, расщепляя по степеням u^2 выражение в квадратных скобках в (4.10), найдем с учетом последнего равенства (4.7)

$$c_2 = 0, \quad 2(b_3^1 - a_1^1) - 2(\widetilde{q} + 1)c - u^1c_3 = 0. \tag{4.11}$$

Из (4.11) получаем $c = c(u^1)$, $a_1^1 = V = \mathrm{const}$, так что $a^1 = Vx^1 + V^1$, $V^1 = \mathrm{const}$, и уравнение

$$2b_3^1 - 2(\widetilde{q} + 1)c - u^1c_3 = 2V. \tag{4.12}$$

Соотношение (4.6) и второе равенство (4.7) перепишем в виде

$$b_3^1 - c + a_2^2 - 2\frac{b^1}{u^1} = V, \quad \widetilde{q}c = \frac{b^1}{u^1} + b_3^1 - a_2^2. \tag{4.13}$$

Поскольку a_3^2 и a_2^2 зависят лишь от u^1, то $a^2 = Rx^2 + p(u^1)$, $R = \mathrm{const}$. Соотношения (4.13) приводят к уравнению

$$b_3^1(1 - \widetilde{q}) + (1 + 2\widetilde{q})\frac{b^1}{u^1} = (1 + \widetilde{q})R - \widetilde{q}V, \tag{4.14}$$

позволяющему найти b^1 и c:

$$b^1 = \frac{R(1 + \widetilde{q}) - V\widetilde{q}}{\widetilde{q} + 2}u^1 + S(u^1)^{\frac{1+2\widetilde{q}}{\widetilde{q}-1}}, \quad S = \mathrm{const}, \quad c = \frac{R - 2V}{\widetilde{q} + 2} + \frac{3S}{\widetilde{q} - 1}(u^1)^{\frac{\widetilde{q}+2}{\widetilde{q}-1}}. \tag{4.15}$$

После подстановки выражений (4.15) в (4.12), поскольку $\widetilde{q} \geq 0$, находим, что $S = 0$. С учетом равенства $a_3^2 = \frac{dp}{du^1} = -\widetilde{r}u^1c$ для коэффициентов инфинитезимального оператора получаем следующие окончательные представления:

$$\begin{gathered} a^1 = Vx^1 + V^1, \quad a^2 = 2Vx^2 + \frac{R - 2V}{\widetilde{q} + 2}\left((\widetilde{q} + 2)x^2 - \frac{\widetilde{r}(u^1)^2}{2}\right) + T, \quad T = \mathrm{const}, \\ b^1 = Vu^1 + \frac{R - 2V}{\widetilde{q} + 2}(\widetilde{q} + 1)u^1, \quad b^2 = \frac{R - 2V}{\widetilde{q} + 2}(\widetilde{q} + \widetilde{r}u^2)u^2. \end{gathered} \tag{4.16}$$

Возвращаясь к исходным обозначениям переменных, из (4.16) находим, что в случае функции f (4.9) при $\widetilde{q} \neq 1$ основная алгебра расширяется за счет оператора

$$X = \left((\widetilde{q} + 2)x - \frac{\widetilde{r}u^2}{2}\right)\partial_x + (\widetilde{q} + 1)u\partial_u + v(\widetilde{r}v + \widetilde{q})\partial_v.$$

Рассмотрим ранее исключенный случай функции f (4.9) с $\widetilde{q} = 1$. Теперь расщепление уравнения (4.10) по степеням u^2 приводит к соотношениям

$$a_1^2 = -m(u^1)^3c_2, \quad m[2(b_3^1 - a_1^1) - 4c - u^1c_3] = \frac{\widetilde{r}a_1^2}{u^1}. \tag{4.17}$$

Сложив (4.6) и второе равенство (4.7), получим $2c = 2b_3^1 - a_1^1 - \frac{b^1}{u^1}$, откуда следует, что c не зависит от x^2, следовательно, $c_2 = 0$ и $a_1^2 = 0$. Таким образом, соотношения (4.17) сводятся к соотношениям (4.11) при $\widetilde{q} = 1$. Отсюда снова получаем $a^1 = Vx^1 + V^1$ (V, V^1 — постоянные), а затем и равенства (4.12), (4.13) при $\widetilde{q} = 1$. Следовательно, формулы (4.16) для коэффициентов оператора X остаются справедливыми и в случае $\widetilde{q} = 1$.

Положим $\widetilde{r} = 0$, но $\widetilde{q} \neq 0$. Функцию f из уравнения (4.8) найдем в виде $f = m(u^2)^{1/\widetilde{q}}$ (снова $\widetilde{q} > 0$, в противном случае не существует решений, удовлетворяющих условию A). Теперь в случае $\widetilde{q}=1$ уравнение (1.1) оказывается частным случаем полностью изученного нелинейного уравнения теплопроводности, и мы его рассматривать не будем. В случае $\widetilde{q}\neq 1$ в результате расщепления (4.10) по степеням u^2 получим соотношение (4.11), кроме того, в этом случае оказывается $b^1=b^1(u^1)$, $a^1=a^1(x^1)$, $a^2=a^2(x^2)$, $b^2=\widetilde{q}cu^2$, $c=c(x^1,u^1)$. С помощью второго соотношения (4.7) находим, что c не зависит от x^1: $c=c(u^1)$, после чего из (4.6) снова получаем $a^1=Vx^1+V^1$. Соотношения (4.12), (4.13) по-прежнему справедливы, в результате получаем $a^2=Rx^2+T$ (R и T — постоянные). Для b^1 снова имеем уравнение (4.14), следовательно, и выражения (4.15) для b^1, c при $S=0$ (иначе a^2 оказывается зависящим от u^1). Окончательно находим, что в случае уравнения (1.1) со степенно́й функцией $f=m(u^2)^{1/\tilde{q}}$ основная алгебра расширяется за счет оператора

$$\widetilde{X}=\frac{\widetilde{q}+1}{\widetilde{q}}t\partial_t+x\partial_x-v\partial_v.$$

Замечание. Уравнение (1.1) со степенно́й функцией f рассматривалось в [11], где была указана алгебра с операторами X_1, X_2, X_3, $\widetilde{X}$, но вопрос о ее максимальности в этой работе не был рассмотрен.

Случай B_2, $p\neq 0$. Уравнение (4.8) принимает вид

$$f'b^2=cf+pf'(0), \tag{4.18}$$

так что для решения f уравнения (4.8), удовлетворяющего условию A, существует и конечно значение $f'(0)$. Это решение будет зависеть только от u^2 лишь в случае $p=\widetilde{p}c$, $q=\widetilde{q}c$, $r=\widetilde{r}c$ ($\widetilde{p}$, $\widetilde{q}$, $\widetilde{r}$ — постоянные) и запишется в виде

$$f=\widetilde{p}f'(0)\exp\left(\int_0^{u^2}(\widetilde{b}^{\,2})^{-1}du^2\right)\int_0^{u^2}(\widetilde{b}^{\,2})^{-1}\exp\left(-\int_0^{u^2}(\widetilde{b}^{\,2})^{-1}du^2\right)du^2,$$
$$\widetilde{b}^{\,2}=\widetilde{p}+\widetilde{q}u^2+\widetilde{r}(u^2)^2.$$

После подстановки f' из (4.18) в (4.4) получим соотношения

$$\widetilde{p}f'(0)(u^1)^2c_2=b_1^1, \tag{4.19}$$

$$\widetilde{p}c+\frac{1}{2}(u_1)^2c_2=0, \tag{4.20}$$

$\frac{a_1^2}{u^1}+\widetilde{p}f'(0)(2c+u^1c_3)=0$ и второе соотношение (4.11). Из (4.20), условия совместности (4.19) и первого равенства (4.7) найдем

$$\begin{gathered}c=S(u^1)\exp l(x^1,x^2,u^1),\quad l=\frac{4\widetilde{p}^{\,2}f'(0)x^1}{u^1}-\frac{2\widetilde{p}x^2}{(u^1)^2},\\ b_1^1=-2\widetilde{p}^{\,2}f'(0)S(u^1)\exp l,\quad b_2^1=\frac{\widetilde{p}}{u^1}S(u^1)\exp l,\end{gathered} \tag{4.21}$$

$S(u^1)$ — произвольная функция. Из (4.21) находим

$$b^1=-\frac{u^1}{2}S(u^1)\exp l+n(u^1), \tag{4.22}$$

$n(u^1)$ — произвольная функция. Последнее равенство (4.7) дает

$$a_{32}^2=2\widetilde{p}\,\widetilde{r}\frac{S(u^1)}{u^1}\exp l, \tag{4.23}$$

а из (4.6) и второго равенства (4.7) найдем

$$c_3(1-\widetilde{q})=2a_{23}^2-3\left(b_3^1-\frac{b^1}{u^1}\right)(u^1)^{-1}. \tag{4.24}$$

После подстановки (4.21)–(4.23) в (4.24) получим, что возможность расширения основной алгебры в случае B_2 остается лишь для $\widetilde{q} = -1/2$, $\widetilde{r} = 0$, функция $S(u^1)$ пока произвольна, а $n = ku^1$, $k = \mathrm{const}$. Однако из второго равенства (4.7) в этом случае находим

$$a_2^2 = 2k - \frac{1}{2}\left(u^1 S' + S\left(1 + u^1\frac{\partial l}{\partial u^1}\right)\right)\exp l,$$

и после подстановки полученных выражений в равенство (4.6) получаем с учетом зависимости a^1 лишь от x^1, что $\widetilde{p} = 0$, так что расширение основной алгебры в случае B_2 оказывается невозможным. Сформулируем полученные результаты.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1) *Основной алгеброй уравнения* (1.1) *с произвольной функцией* f, *удовлетворяющей условию* А, *является алгебра* L_3 *с базой*

$$X_1 = \partial_t, \quad X_2 = \partial_x, \quad X_3 = t\partial_t + 2x\partial_x + u\partial_u.$$

2) *Базу алгебры группы преобразований эквивалентности для уравнения* (1.1) *составляют операторы* X_1, X_2, X_3 *и оператор*

$$3x\partial_x + 2u\partial_u + v\partial_v + f\partial_f.$$

3) *Уравнение* (1.1) *допускает расширение основной алгебры* L_3 *лишь в следующих трех случаях*:

   a) $f = mv^n$, $n > 0$; *алгебра* L_3 *расширяется за счет оператора*

$$X_4^a = (n+1)t\partial_t + x\partial_x - v\partial_v;$$

   b) $f = m\left(\frac{av}{av+b}\right)^{1/b}$, $b > 0$; *алгебра* L_3 *расширяется за счет оператора*

$$X_4^b = \left((2+b)x - \frac{au^2}{2}\right)\partial_x + (b+1)u\partial_u + v(av+b)\partial_v;$$

   c) $f = m\exp\left(-\frac{1}{av}\right)$, $av > 0$; *алгебра* L_3 *расширяется за счет оператора*

$$X_4^c = \left(2x - \frac{au^2}{2}\right)\partial_x + u\partial_u + av^2\partial_v.$$

Нетрудно заметить, что в случаях a) при $n = -2$ и b) при $b = -1/2$ теоремы 1 постоянная S в соотношениях (4.15) оказывается произвольной, что приводит к расширению алгебры L_4^a с базой X_1, X_2, X_3, X_4^a и L_4^b с базой X_1, X_2, X_3, X_4^b. Однако для функции f условие А в этих случаях не выполняется, алгебра L_3 расширяется до пятимерной алгебры и в случаях a) при $n = -1/2$ и b) при $b = -2$, причем условие А снова не выполняется.

Литература

1. *CRC Handbook of Lie group analysis of differential equations* // Appl. in Engineering and Physical Sci. / Ed. Ibragimov N.H. – CRC Press. – London–Tokyo, 1995. – V. 2. – P. 546
2. Баренблатт Г.И. *Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости* // ПММ. – 1952. – Т. 16. – Вып. 6. – С. 679–698.
3. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1978. – 399 с.
4. Овсянников Л.В. *Программа "Подмодели". Газовая динамика* // ПММ. – 1994. – Т. 58. – Вып. 4. – С. 30–55.
5. Овсянников Л.В. *Регулярные и нерегулярные частично инвариантные решения* // Докл. РАН. – 1995. – Т. 343. – № 2. – С. 156–159.
6. Овсянников Л.В., Чупахин А.П. *Регулярные частично инвариантные подмодели газовой динамики* // ПММ. – 1998. – Т. 60. – Вып. 6. – С. 990–999.

7. Дородницин В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р. *Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях* // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19. – № 7. – С. 1215–1223.
8. Ibragimov N.H., Torrisi M., Valenti A. *Preliminary group classification of equations* $v_{tt} = f(x, v_x)v_{xx} + g(x, v_x)$ // J. Math. Phys. – 1991. – V. 32. – № 11. – P. 2988–2995.
9. Иванов А.В. *Квазилинейные параболические уравнения, допускающие двойное вырождение* // Алгебра и анализ. – 1992. – Т. 44. – Вып. 6. – С. 114–130.
10. Ахатов И.Ш. , Газизов Р.К., Ибрагимов Н.Х. *Нелокальные симметрии. Эвристический подход* // Итоги науки и техн. Современ. пробл. матем. Новейшие достижения. – М.: Наука, 1989. – Т. 34. – С. 3– 83.
11. Чугунов В.А. *О групповых свойствах уравнения, описывающего течение ледников* // Изв. вузов. Математика. – 1982. – № 10. – С. 84–87.

Казанский государственный университет

Поступили
первый вариант 19.12.2000
окончательный вариант 13.06.2003