УДК 519.6: 629.33.01(075.8)

Павленко А.П., кандидат технических наук, доцент, Набережночелнинский институт ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»; Мухаметдинов М.М., кандидат технических наук, доцент, Набережночелнинский институт ФГАОУ ПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ГИПЕРСТЕРЖНЯ ДЛЯ СОЗДАНИЯ ОБВОДА АВТОМОБИЛЯ

Аннотация. В работе обобщены линейные дифференциальные уравнения деформации стержней, работающих на растяжение-сжатие, кручение или изгиб в уравнение гиперстержня. На основании механической аналогии деформации стержней и интерполирования сплайнами показано, что решения уравнения гиперстержня могут быть использованы для получения сплайнов высших степеней с весовой и управляющей функциями, позволяющими регулировать форму сплайна для задания обвода автомобиля.

Ключевые слова: обвод, стержень, гиперстержень, балка, сплайн, линейный сплайн, квадратичный сплайн, кубический сплайн, сплайны высоких степеней, сплайны переменной жёсткости, весовая функция, жёсткость, управляющая функция.

1. Введение. Автомобилестроители вынуждены постоянно обновлять внешние формы (обводы) автомобилей, что требует совершенствовать методы их задания. Еще недавно автомобили имели прямолинейные («жёсткие») формы, как ВАЗ-2108/09, или слегка округлые формы, задаваемые линейкой и циркулем. Также применялись лекала, участки которых были образованы многочленами 2-й и 3-й степеней. Лекала позволяли задавать плавные («мягкие», гладкие) формы, отвечающие современным веяниям моды. На современном этапе для задания обводов широко применяются методы на основе сплайнов, алгоритмы которых реализованы в программном обеспечении практически всех систем автоматизированного проектирования.

Имеется множество видов сплайнов, которые, как правило, разделяют по выражению для участков сплайна, представляющее собой многочлен определенной степени, на линейный, квадратичный, кубический и т.д., соответственно. Из них широкое применение нашёл кубический сплайн, имеющий механическую аналогию в виде деформации гибкой рейки, вызванной заданным смещением её опор. Об аналогиях других сплайнов известно мало.

Данная работа посвящена обобщению сплайнов с позиции механической аналогии как деформируемого стержня с целью получения новых интерполяционных сплайнов, и, следовательно, новых инструментов для задания обводов автомобиля.

2. Линейный сплайн. Линейный сплайн представляет собой ломаную линию, последовательно соединяющую прямыми отрезками заданные точки (узлы). В работах [1, 2] рассмотрено его получение с позиции механической аналогии. Линейный сплайн является функцией осевых перемещений стержня, растянутого под действием внутренних реакций, вызванных заданным смещением точек этого стержня. Дифференциальное уравнение деформации стержня, работающего на растяжение-сжатие, запишется в виде:

(2.1) $$-\left[C(x)u'(x)\right]' = p(x),\ \forall x \in (a,b),$$

где $C(x)$ – функция жёсткости; $u(x)$ – функция осевых перемещений; $p(x)$ – функция внешней распределённой осевой нагрузки; ось Ox направлена вдоль продольной оси стержня.

Для построения численного алгоритма выберем расчётную сетку:

(2.2) $$\Delta:\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Введём в рассмотрение кусочно-постоянные функции жёсткости и внешней нагрузки:

(2.3) $$C(x) = C_i,\ p(x) = p_i,\ \forall x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1,2,\ldots,n.$$

С учётом (2.3) и того, что сплайн является функцией перемещений стержня $s(x) = u(x)$, уравнение (2.1) преобразуется к виду:

(2.4) $$-C_i s''(x) = p_i \text{ или } s''(x) = -\frac{p_i}{C_i},\ \forall x \in (x_{i-1}, x_i).$$

Согласно высказанной выше механической аналогии на сплайн не действует внешняя нагрузка, в этом случае $p_i = 0$ и уравнение (2.4) преобразуется к следующему однородному уравнению:

(2.5) $$s''(x) = 0\,,\ \forall x \in (x_{i-1}, x_i).$$

Дважды понижая порядок уравнения (2.5) операцией неопределённого интегрирования получим его решение в виде:

(2.6) $$s(x) = c_{1,i}x + c_{2,i}\,,\ \forall x \in (x_{i-1}, x_i),$$

где $c_{1,i}$, $c_{2,i}$ – произвольные постоянные, полученные после первого и второго интегрирования, соответственно.

Решение (2.6) уравнения (2.5) представляет собой многочлен первой степени (прямой отрезок) и также является однородным решением уравнения (2.4). Решение в виде (2.6) названо решением в кусочно-полиномиальной форме.

Линейный сплайн еще называют однородным линейным сплайном постоянной или кусочно-постоянной жёсткости, т.к. выражение для участка этого сплайна (2.6) является однородным решением дифференциального уравнения деформации стержня кусочно-постоянной жёсткости (2.4) и в него не входят значения функции жёсткости.

В данной интерпретации отрезок прямой понимается как растянутая эластичная нить. Очевидным недостатком линейного сплайна является отсутствие гладкости, т.е. разрыв первых производных в узлах.

3. Квадратичный сплайн. В работах [1, 2] задача получения сплайна поставлена следующим образом: необходимо найти внешнюю распределённую осевую нагрузку на стержень заданной кусочно-постоянной жёсткости, вызывающую заданные перемещения в точках расчётной сетки. Тогда выражение для участка неоднородного линейного сплайна получается из неоднородного решения уравнения (2.4). Дважды понижая порядок уравнения (2.4) операцией неопределённого интегрирования получим его решение в кусочно-полиномиальной форме:

(3.1) $$s(x) = -\frac{p_i}{2C_i}x^2 + c_{1,i}x + c_{2,i}\,,\ \forall x \in (x_{i-1}, x_i).$$

Неоднородное решение (3.1) представляет собой полином второй степени (параболу), но с определённым коэффициентом при x^2.

В выражении (3.1) значения функции жёсткости на участках C_i, $i = 1,2,\ldots,n$ заранее задаются, поэтому функция жёсткости $C(x)$ в данном случае является весовой функцией. Значения функции внешней нагрузки p_i, $i = 1,2,\ldots,n$ требуют определения, поэтому функция внешней нагрузки $p(x)$ является управляющей функцией. Неизвестные значения нагрузки p_i являются неизвестными коэффициентами сплайна и находятся из условий сопряжения (склейки) участков во внутренних узлах сетки, аналогичным условиям неразрывности внутреннего силового фактора (ВСФ), в данном случае – условия непрерывности функции осевой силы $N(x) = -\int p(x)dx = C(x)u'(x)$, которые с учётом (2.3) записываются в виде:

(3.2) $N(x_i - 0) = N(x_i + 0)$ или $C_i s'(x_i - 0) = C_{i+1} s'(x_i + 0)$, $i = 1,2,\ldots,n-1$.

Из условий (3.2) следует, что неразрывность первой производной можно обеспечить равенством значений функции жёсткости на участках $C_i = C_{i+1}$, $i = 1,2,\ldots,n-1$, т.е. при постоянной функции жёсткости по всей длине сплайна $C_i = C_0$, которую при практических расчётах можно назначить $C_0 = 1$. В исключительных случаях может потребоваться дополнительная регулировка интерполирующей функции. Поэтому оставлена возможность изменения этого весового параметра за счёт компромисса с разрывом первой производной.

Система (3.2) совпадает с системой линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов (МКЭ) для нахождения узловых перемещений стержня кусочно-постоянной жёсткости, работающего на растяжение-сжатие. Системе (3.2) не достаёт одного уравнения, берущегося из краевых условий.

4. Кубический сплайн. В работе [3] задача получения сплайна поставлена следующим образом: необходимо найти функцию прогибов неразрезной многоопорной балки постоянной жесткости под действием внутренних реакций, возникших в результате заданного смещения опор балки. Такая задача является многоточечной краевой задачей.

Дифференциальное уравнение деформации стержня, работающего на поперечный изгиб, записывается следующим образом:

(4.1) $$\left[EI(x)v''(x)\right]'' = q(x),\ \forall x \in (a,b),$$

где $EI(x)$ – функция жесткости на изгиб; $v(x)$ – искомая функция прогибов; $q(x)$ – распределенная (погонная) внешняя поперечная нагрузка; ось Ox направлена вдоль оси стержня.

Отметим, что внешняя нагрузка к балке не прикладывается, поэтому необходимо решить однородное дифференциальное уравнение деформации балки:

(4.2) $$\left[EI(x)v''(x)\right]'' = 0,\ EI(x) = const \Rightarrow\ v^{IV}(x) = 0\ \ \forall x \in (a,b).$$

Чтобы учесть заданные перемещения опор, необходимо использовать сеточные методы решения уравнений. Будем решать уравнение (4.2) на заданной сетке узлов $\Delta:\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ по участкам:

(4.3) $$v^{IV}(x) \cong s^{IV}(x) = 0\ \ \forall x \in (x_{i-1}, x_i),\ i = 1,2,\ldots,n.$$

Решением уравнения (4.3) будет полином третьей степени с неизвестными коэффициентами:

(4.4) $$s(x) = \int\int\int\int 0 dxdxdxdx = c_{1,i}x^3 + c_{2,i}x^2 + c_{3,i}x + c_{4,i}$$
$$\forall x \in (x_{i-1}, x_i),\ i = 1,2\ldots,n.$$

Неизвестные значения коэффициентов сплайна находятся из условий непрерывности функции изгибающего момента $M(x) = EI(x)v''(x)$ в узлах, образующих систему уравнений, которой недостаёт двух уравнений, берущихся из краевых условий.

Отметим, что для кубического сплайна известно четыре классических типа краевых условий. Первый тип заключается в задании значений первых производных в крайних узлах сплайна, второй – вторых производных, третий – записывается для замкнутых или периодических кривых (условии сопряжения начального и конечного участков), четвёртый – в продолжение сплайна в многочлене, соответствующем степени сплайна, интерполирующем крайние и, по необходимости, соседние с ними участки.

5. Гиперстержень. На основании вышесказанного можно заключить, что линейный сплайн является однородным решением дифференциального уравнения деформации стержня, работающего на растяжение-сжатие. Аналогичный результат можно получить, рассмотрев дифференциальное уравнение деформации стержня, работающего кручение [3]. Квадратичный сплайн получается на основе неоднородного решения дифференциального уравнения деформации стержня, работающего на растяжение-сжатие или кручение. Данное уравнение представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка. А вот кубический сплайн является однородным решением дифференциального уравнения деформации стержня, работающего на изгиб – балки, представляющего собой линейное дифференциальное уравнение четвёртого порядка. Таким образом, сплайн четвёртой степени – это неоднородное решение дифференциального уравнения деформации балки, а сплайн 5-й степени – однородное решение линейного дифференциального уравнения шестого порядка.

Уравнения деформации стержней (2.1) и (4.1) можно записать одним обобщающим уравнением:

$$(-1)^n\left[C(x)u^{(n)}(x)\right]^{(n)} = p(x),\ \forall x \in (a,b), \tag{5.1}$$

где $C(x)$ – функция жёсткости (весовая функция); $u(x)$ – функция перемещений (сплайн-функция); $p(x)$ – функция внешней распределённой нагрузки (управляющая функция); n – показатель степени; (n) – порядок производной.

При $n=1$ из уравнения (5.1) получается дифференциальное уравнение деформации стержня, работающего на растяжение-сжатие или кручение (2.1). При $n=2$ – дифференциальное уравнение деформации балки (4.1). А при $n \geq 3$ получим новые уравнения деформации несуществующих в природе абстрактных стержней, решением которых будут сплайны высоких степеней. Такие стержни и будем называть гиперстержнями.

Изложенная трактовка известных результатов через призму механической аналогии с деформацией стержней открыла возможность обобщения всех сплайнов как решений уравнения деформации гиперстержня (5.1) и создания новых методов интерполирования на его основе с возможностью введения естественным для стержней образом весовой (жёсткости) и управляющей (внешней нагрузки) функций, позволяющих регулировать форму сплайна.

Литература

1. Павленко А.П., Шамсутдинов И.Р. Механическая аналогия квадратичного сплайна для задания обводов кузова легкового автомобиля // Итоговая научная конференция профессорско-преподавательского состава НЧИ К(П)ФУ (Набережные Челны, 13 февр. 2015 г.): сборник докладов. – Набережные Челны, 2015. - С.180 – 185.

2. Павленко А.П., Шамсутдинов И.Р. Краевые условия квадратичного сплайна для задания обводов кузова легкового автомобиля // Итоговая научная конференция профессорско-преподавательского состава НЧИ К(П)ФУ (Набережные Челны, 13 февр. 2015 г.): сборник докладов. – Набережные Челны, 2015. - С.186 – 192.

3. Павленко А.П., Никишин В.Н. Аналитические и численные методы прочностного анализа и проектирования автомобильных конструкций: учеб. пособие для студентов вузов. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. – 129 с.

Pavlenko A.P. candidate of technical Sciences, assistant professor Naberezhnye Chelny Institute of Kazan (Volga region) Federal University;
Muhametdinov M.M. candidate of technical Sciences, assistant professor Naberezhnye Chelny Institute of Kazan (Volga region) Federal University.

USE OF HYPERROD TO CREATE THE OUTLINE OF THE AUTOMOBILE

Abstract. The article summarizes linear differential equations of the deformation of the rods working on extension-compressing, torsion or bending in the equation of hyperrod. On the basis of mechanical analogy deformation of the rods and interpolating splines it is shown that the solution of the equation of hyperrod can be used to generate high degrees splines with weight and control functions, allowing to configure the shape of the spline to define the outline of the automobile.

Key words: Outline, rod, hyperrod, beam, spline, linear spline, quadratic spline, cubic spline, high degrees splines, splines variable stiffness, weight function, stiffness, control function.