ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 3 (430)

УДК 517.

И.С. ЕМЕЛЬЯНОВА

ОДИН СЛУЧАЙ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГЕССА В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ

В предлагаемой статье найдено точное аналитическое частное решение уравнения Гамильтона–Якоби для классической задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг закрепленной точки. Предполагается, что координаты центра тяжести тела, форма его трехосного эллипсоида инерции в неподвижной точке, начальные условия и характеристика силового поля удовлетворяют четырем условиям, два из которых совпадают с условиями В. Гесса–Г.Г. Аппельрота [1]. Выполнение третьего условия задачи В. Гесса–Г.Г. Аппельрота первоначально не предполагается. Тем не менее показано, что найденное частное решение удовлетворяет всем трем условиям задачи В. Гесса–Г.Г. Аппельрота. Новое нетривиальное условие связывает значение константы интеграла энергии с параметрами тела и включает ускорение силы тяжести. Примечательно, что форма нового налагаемого ограничения имеет структуру, аналогичную основному условию В. Гесса. Как известно [1], В. Гессом и Г.Г. Аппельротом доказана принципиальная возможность получения однозначного аналитического решения задачи в указанном ими случае. Однако само это решение не получено. В [2] показано, что задача приводит к решению обыкновенного дифференциального уравнения типа Риккати с двоякопериодическими коэффициентами. В свою очередь коэффициенты определяются неявно через P-функции Вейертшрасса. Приведенное в статье новое решение имеет достаточно простую структуру и содержит только тригонометрические функции.

Функция Гамильтона H тяжелого твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, может быть представлена в следующей форме [3], [4]:

$$\begin{aligned} H = \{A[P_\theta^2 + (P_\psi - P_\varphi\cos\theta)^2/\sin^2\theta] + (B-A)[P_\theta\cos\varphi\sin\theta + {}\\ + (P_\psi - P_\varphi\cos\theta)\sin\varphi]^2/sin^2\theta\}/2AB + P_\varphi^2/2C - mg[(x\sin\varphi + y\cos\varphi)\sin\theta + z\cos\theta], \quad (1)\end{aligned}$$

где A, B, C — главные осевые моменты инерции в точке закрепления тела; φ, ψ, θ — углы Эйлера (углы собственного вращения, прецессии и нутации); P_φ, P_ψ, P_θ — обобщенные импульсы; x, y, z —координаты центра тяжести в системе координат, начало которой находится в неподвижной точке, а оси совпадают с главными осями инерции в этой точке; m — масса тела, g — ускорение силы тяжести.

Функция Гамильтона (1) приобретает более компактный вид после введения безразмерных переменных и параметров ([5], [6], с. 99):

$$\begin{aligned} H = \alpha p_\varphi^2/2 + \beta[p_\theta^2 + (p_\psi - p_\varphi\cos\theta)^2/\sin^2\theta]/2 + (1-\beta)[p_\theta\cos\varphi\sin\theta + {}\\ + (p_\psi - p_\varphi\cos\theta)\sin\varphi]^2/2\sin^2\theta - (x_0\sin\varphi + y_0\cos\varphi)\sin\theta - z_0\cos\theta \quad (2)\end{aligned}$$

($\alpha = A/C$; $\beta = A/B$ — параметры, определяющие форму эллипсоида инерции; p_φ, p_ψ, p_θ — безразмерные обобщенные импульсы; x_0, y_0, z_0 — безразмерные проекции радиуса-вектора центра тяжести на выбранные координатные оси).

Уравнение Гамильтона–Якоби [6], [7], соответствующее безразмерной функции Гамильтона (2), запишется следующим образом:

$$\partial w/\partial t+\alpha(\partial w/\partial\varphi)^2/2+\beta[(\partial w/\partial\theta)^2+(\partial w/\partial\psi-\partial w/\partial\varphi\cos\theta)^2/\sin^2\theta]/2+(1-\beta)\{(\partial w/\partial\theta)\cos\varphi\sin\theta+ \\ +[\partial w/\partial\psi-(\partial w/\partial\varphi)\cos\theta]\sin\varphi\}^2/2\sin^2\theta-(x_0\sin\varphi+y_0\cos\varphi)\sin\theta-z_0\cos\theta=0, \quad (3)$$

где w — искомая функция уравнения Гамильтона–Якоби.

Поскольку переменные t и ψ не содержатся явно в функции Гамильтона H (2) и, следовательно, в уравнении (3), то полное решение уравнения (3) может быть найдено в форме, содержащей эти переменные аддитивно:

$$w=-E_0t+p_0\psi+w_1(\varphi,\theta). \quad (4)$$

Константы E_0 и p_0 определяют значения полной механической энергии тела и момента количества движения в проекции на вертикаль (система допускает интегралы энергии и площадей).

Подставляя (4) в уравнение (3), имеем

$$\alpha(\partial w_1/\partial\varphi)^2+\beta\{(\partial w_1/\partial\theta)^2+[p_0-(\partial w_1/\partial\varphi)\cos\theta]^2/\sin^2\theta\}+(1-\beta)\{(\partial w_1/\partial\theta)\cos\varphi\sin\theta+ \\ +[p_0-(\partial w_1/\partial\varphi)\cos\theta]\sin\varphi\}^2/\sin^2\theta=2[E_0+(x_0\sin\varphi+y_0\cos\varphi)\sin\theta+z_0\cos\theta]. \quad (5)$$

Если удается построить решение $w_1(\varphi,\theta,E_0,p_0,a)$ уравнения (5), в которое входит дополнительная константа интегрирования a, и тем самым полное решение $w(\varphi,\theta,\psi,t,E_0,p_0,a)$ уравнения (3)

$$w=-E_0t+p_0\psi+w_1(\varphi,\theta,E_0,p_0,a), \quad (6)$$

то с помощью теоремы Гамильтона–Якоби [7] можно построить полное решение

$$\begin{array}{lll} \partial w/\partial\varphi=p_\varphi; & \partial w/\partial\psi=p_\psi; & \partial w/\partial\theta=p_\theta; \\ \partial w/\partial a=b_1; & \partial w/\partial E_0=b_2; & \partial w/\partial p_0=b_3 \end{array} \quad (7)$$

системы канонических уравнений

$$\begin{array}{lll} d\varphi/dt=\partial H/\partial p_\varphi; & d\psi/dt=\partial H/\partial p_\psi; & d\theta/dt=\partial H/\partial p_\theta; \\ dp_\varphi/dt=-\partial H/\partial\varphi; & dp_\psi/dt=-\partial H/\partial\psi; & dp_\theta/dt=-\partial H/\partial\theta, \end{array} \quad (8)$$

в которой в качестве H выступает функция (2), а величины b_1, b_2, b_3 в решении (7) — константы.

Известно, что рассматриваемая задача полностью интегрируется в случаях, обнаруженных Л. Эйлером ($x_0=y_0=z_0=0$), Ж. Лагранжем ($x_0=y_0=0$, $\beta=1$) и С.В. Ковалевской ($z_0=0$, $\alpha=2$, $\beta=1$). В этих случаях находится функция w (6), содержащая константы E_0, p_0 и a. Во всех трех случаях 11 параметров

$$\alpha,\ \beta,\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ E_0,\ p_0,\ a,\ b_1,\ b_2,\ b_3 \quad (9)$$

связаны тремя условиями, и 8 параметров могут быть выбраны произвольно. Поскольку константы b_2 и b_3 определяют выбор начала отсчета циклической координаты ψ и времени t и, следовательно, не являются существенными, можно считать, что случай Л. Эйлера допускает 6 существенных безразмерных параметров, характеризующих форму эллипсоида инерции в неподвижной точке и начальные условия. Что касается случаев Ж. Лагранжа и С.В. Ковалевской, то в связи с тем, что эллипсоид инерции в неподвижной точке имеет круговое главное сечение ($\beta=1$, т.е. $A=B$), координата ψ становится циклической, и константа b_1, входящая в число параметров (9), также перестает быть существенной. Таким образом, случаи Ж. Лагранжа и С.В. Ковалевской допускают 5 существенных безразмерных параметров. При наложении условия кинетической симметрии ($\alpha=\beta=1$) без ограничения общности можно положить: $x_0=y_0=0$, и число существенных безразмерных параметров снижается до четырех.

Продемонстрируем на наиболее известных случаях существования полной или частной интегрируемости задачи (8), найденных к началу нашего столетия, каким числом существенных безразмерных параметров можно характеризовать полученные решения (таблица). Анализ таблицы показывает, что среди случаев существования частных интегралов наибольшим числом свободных параметров обладают случаи В. Гесса–Г.Г. Аппельрота, О. Штауде и Д.Н. Бобылева–В.А. Стеклова–Б.К.Млодзеевского.

Таблица

Автор случая (или его описание)	Число огранич.	Число своб. парам.	Дата опубл.
Эйлер Л.	3	6	1758
Лагранж Ж.	3	5	1773
Кинетич. симметрия	2	4	1773
Ковалевская С.В.	3	5	1886
Делоне Н.Б.	4	4	1892
Гесс В., Аппельрот Г.Г.	3	5	1890
Штауде О.	3	5	1894
Бобылев Д.Н., Стеклов В.А.	3	5	1894
Млодзеевский Б.К., Бобылев Д.Н., Стеклов В.А.	5	3	1896
Стеклов В.А.	4	4	1899
Горячев Д.Н.	5	3	1899
Горячев Д.Н., Чаплыгин С.А.	4	3	1900
Чаплыгин С.А.	5	3	1904

Следует отметить, что число существенных параметров является лишь одной из многочисленных характеристик случаев интегрируемости задачи (8). Немаловажную роль в понимании найденных решений играет простота получаемого аналитического выражения, а также геометрической, топологической или иной трактовки результата. До настоящего времени классическая задача (8) для функции Гамильтона (2) оставляет много нерешенных вопросов и продолжает привлекать постоянное внимание математиков и механиков.

Остановимся на новом полученном нами частном решении задачи (8), представленной в форме уравнения Гамильтона–Якоби (5). Пусть выполнены следующие четыре условия:

1) центр масс тела расположен в главной плоскости yOz

$$x_0 = 0; \tag{10}$$

2) безразмерные координаты центра тяжести тела и параметры трехосного эллипсоида инерции в неподвижной точке связаны условием

$$(\alpha - 1)y_0^2 = (1 - \beta)z_0^2; \tag{11}$$

3) константа p_0 в интеграле площадей полагается равной нулю

$$p_0 = 0; \tag{12}$$

4) значение полной механической энергии тела связано с положением центра тяжести и формой эллипсоида инерции условием

$$(\alpha - 1)E_0^2 = (\alpha - \beta)z_0^2. \tag{13}$$

Будучи представленным в исходных размерных переменных, условие (11) представляет одно из условий задачи В. Гесса–Г.Г. Аппельрота

$$B(A - C)y_0^2 = C(B - A)z_0^2,$$

а условие (13)

$$B(A - C)E_0^2 = A(B - C)(mg\, z_0)^2$$

приобретает форму, явно демонстрирующую характер ограничения. Последнее связывает значения главных моментов инерции тела в неподвижной точке, положение центра масс, ускорение силы тяжести и значение полной механической энергии тела.

Убедимся, что при выполнении условий (10)–(13) уравнение Гамильтона–Якоби (5) допускает частное решение

$$w_1 = 2^{3/2}(E_0 - y_0 \cos\varphi \sin\theta - z_0 \cos\theta)^{1/2}. \tag{14}$$

Подставим выражение (14) в уравнение (5) и покажем, что имеет место тождество

$$\begin{aligned} &\alpha y_0^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta + \beta(y_0^2 \cos^2\theta + z_0^2 \sin^2\theta - y_0 z_0 \sin 2\theta \cos\varphi) + \\ &\quad + (1-\beta)(z_0 \cos\varphi \sin\theta - y_0 \cos\theta)^2 - E_0^2 + (y_0 \cos\varphi \sin\theta + z_0 \cos\theta)^2 \equiv 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Для доказательства справедливости тождества (15) выделим слагаемые, содержащие в качестве множителей y_0^2, z_0^2, $y_0 z_0$ и E_0^2, и преобразуем полученное выражение, умножив и поделив его на $(\alpha - 1)$ и учитывая условия (11) и (13)

$$\begin{aligned} &y_0^2(\cos^2\theta + \cos^2\varphi \sin^2\theta + \alpha \sin^2\varphi \sin^2\theta) + z_0^2(\cos^2\theta + \cos^2\varphi \sin^2\theta + \beta \sin^2\varphi \sin^2\theta) - E_0^2 = \\ &\quad = z_0^2[(\alpha-1)(\cos^2\theta + \cos^2\varphi \sin^2\theta + \beta \sin^2\varphi \sin^2\theta) + \\ &\quad\quad + (1-\beta)(\cos^2\theta + \cos^2\varphi \sin^2\theta + \alpha \sin^2\varphi \sin^2\theta) - \alpha + \beta]/(\alpha - 1) \equiv 0. \end{aligned}$$

Легко убедиться, что тождество верно: достаточно выделить множители при α, β, $\alpha\beta$ и при свободном члене. Все они равны нулю. Таким образом, выражение (14) действительно является частным решением уравнения Гамильтона–Якоби (5) при наложении ограничений (10)-(13).

Частный интеграл (14) имеет физический смысл при положительном значении выражения, стоящего под знаком радикала, т.е. при соблюдении неравенства

$$E_0 > y_0 \cos\varphi \sin\theta + z_0 \cos\theta.$$

Кроме того, следует потребовать, чтобы эллипсоид инерции в неподвижной точке имел несовпадающие главные моменты инерции. Без ограничения общности достаточно выполнить условия

$$\alpha > 1 > \beta. \tag{16}$$

Для этого достаточно направить ось Oz по линии наименьшего момента инерции, и угол нутации θ будет характеризовать отклонение от вертикали наибольшей оси эллипсоида инерции. Отметим, что центр масс тела с учетом неравенств (16) располагается в плоскости, перпендикулярной средней оси эллипсоида инерции.

Обобщенные импульсы p_φ и p_θ, отвечающие решению (14), вычисляются как частные производные от w_1 по соответствующим обобщенным координатам

$$\begin{aligned} p_\varphi &= 2^{1/2}(y_0 \sin\varphi \sin\theta)/(E_0 - y_0 \cos\varphi \sin\theta - z_0 \cos\theta)^{1/2}; \\ p_\theta &= 2^{1/2}(z_0 \sin\theta - y_0 \cos\varphi \cos\theta)/(E_0 - y_0 \cos\varphi \sin\theta - z_0 \cos\theta)^{1/2}. \end{aligned} \tag{17}$$

Выражения (17) представляют собой линейные инвариантные соотношения (частные интегралы).

Решение (14) задачи (5) и следующие из него инвариантные соотношения (17) получены автором с привлечением техники группового анализа уравнения Гамильтона–Якоби (5). Построены два локальных преобразования симметрии. Каждое из них означает, что одно из условий (17) является инвариантом группы Ли на уровне выполнения другого условия. В связи с громоздкостью проведенного анализа ограничимся ссылками на источник идеи получения решения ([8]; [6], сс. 65, 96, 104).

Нередко при описании частных случаев интегрируемости задачи о вращении тяжелого твердого тела авторы завершают исследование указанием соответствующих инвариантных соотношений, поскольку это доказывает принципиальную возможность нахождения закона движения тела [11]. Мы проанализируем найденное решение более подробно.

Покажем, что решение (14) задачи (5) соответствует частному случаю задачи В. Гесса и Г.Г. Аппельрота ([1]; [2], с. 161–274; [9], с. 182–184; [10], с. 264–272; [11], с. 119–124). Найденный В. Гессом и Г.Г. Аппельротом случай существования частного решения задачи о вращении тяжелого твердого тела обычно представляют в переменных Эйлера φ, ψ, θ, p, q, r (углы Эйлера и проекции угловой скорости тела на главные оси инерции в неподвижной точке). Требуется выполнение следующих трех условий.

а) Центр масс тела расположен в главной плоскости эллипсоида инерции в неподвижной точке; без ограничения общности можно считать выполненным условие (10)

$$x_0 = 0.$$

б) Справедливо условие В. Гесса (с точностью до принятого выбора осей)

$$B(A-C)y_0^2 = C(B-A)z_0^2. \tag{18}$$

После перехода к безразмерным величинам условие (18) совпадает с (11).

в) Наложено условие [10]

$$Bqy_0 + Crz_0 = 0,$$

означающее, что проекция угловой скорости на направление радиуса-вектора центра масс тела равна нулю. В безразмерных переменных последнее условие приобретает вид

$$\alpha q y_0 + \beta r z_0 = 0. \tag{19}$$

Как известно, компоненты угловой скорости связаны с каноническими переменными следующим образом:

$$\begin{aligned} &p = p_0 \cos\varphi - p_\varphi \cos\theta \sin\varphi; \\ &q = -\beta(p_\theta \sin\varphi + p_\varphi \operatorname{ctg}\theta \cos\varphi); \quad r = \alpha p_\varphi. \end{aligned} \tag{20}$$

Подставляя в (20) значения p_θ и p_φ (17), имеем

$$\begin{aligned} &p = 2^{1/2}(z_0 \cos\varphi \sin\theta - y_0 \cos\theta)/(E_0 - y_0 \cos\varphi \sin\theta - z_0 \cos\theta)^{1/2}; \\ &q = -2^{1/2}\beta z_0 \sin\varphi \sin\theta/(E_0 - y_0 \cos\varphi \sin\theta - z_0 \cos\theta)^{1/2}; \\ &r = -2^{1/2}\alpha y_0 \sin\varphi \sin\theta/(E_0 - y_0 \cos\varphi \sin\theta - z_0 \cos\theta)^{1/2}. \end{aligned} \tag{21}$$

Последние два соотношения из (21) свидетельствуют о том, что проекции q и r угловой скорости пропорциональны, и выполняется условие (19), что и требовалось показать.

Таким образом, исследуемая задача представляет собой частный случай задачи В. Гесса-Г.Г. Аппельрота. Проведенный в [2] анализ задачи В. Гесса-Г.Г. Аппельрота позволил получить качественную картину движения тела. Нетрудно убедиться, что момент инерции тела относительно оси, проходящей через неподвижную точку и центр тяжести, определяется выражением $J = (\alpha\beta)^{-1}$ (в обозначениях В. Гесса $J = AC/B$). Центр масс тела движется как плоский математический маятник в однородном силовом поле, увеличенном в $y_0^2 + z_0^2$ раз по сравнению с полем силы тяжести [10]. В рассматриваемой задаче проекции момента количества движения тела на прямую, соединяющую неподвижную точку с центром тяжести, и на вертикаль равны нулю.

Как известно, П.А. Некрасовым общая задача В. Гесса-Г.Г. Аппельрота сведена к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с двоякопериодическими коэффициентами. Последние, в свою очередь, определяются неявно через P-функции Вейерштрасса ([10]; [11], с. 122). С помощью этого уравнения определяются величины p, q, r. Задача не сведена к квадратурам, хотя принципиальная возможность получения однозначного решения доказана. Введенное дополнительное условие (13) позволяет получить достаточно простое аналитическое решение задачи.

Действительно, используя одно из уравнений В. Гесса ([10], с. 268):

$$\nu d\mu/dt = (\mu + E_0)d\nu/dt,$$

($\nu = p^2 + q^2/\beta + r^2/\alpha$; $\mu = y_0 \cos\varphi \sin\theta + z_0 \cos\theta$), строится явная зависимость между углами φ и θ

$$\varphi = \arccos f(\theta);$$

$$f(\theta) = -[(\alpha-\beta)^{1/2} + (\alpha-1)^{1/2}\cos\theta]/(1-\beta)^{1/2}\sin\theta.$$

Решение существует при $|f(\theta)| \leq 1$. Использование зависимости φ (θ) позволяет завершить нахождение закона движения тела.

Найденное частное решение задачи (3) оставляет свободными четыре параметра задачи. Равное с описываемым случаем число ограничений и свободных параметров (4 и 4) имеют случаи Н.Б. Делоне и В.А. Стеклова (см. табл.). Для сравнения укажем, что в известном случае Д.Н. Горячева–С.А. Чаплыгина при четырех ограничениях остаются всего три свободных параметра, поскольку эллипсоид инерции в неподвижной точке является телом вращения.

Литература

1. Hess W. *Über die Eulerschen Bewegungsgliechungen und über eine neue partikuläre Lözung des Problems der Bewegung einesstarren Körpers um einen festen Punkt* // Math. Ann. – 1890. – Bd. 37. – № 2. – S. 153–181.
2. Некрасов П.А. *Аналитическое исследование одного случая движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки П.А. Некрасова* // Тр. Моск. матем. о-ва. – 1896. – Т. 18. – 114 с.
3. Архангельский Ю.А. *Аналитическая динамика твердого тела.* – М.: Наука, 1977. – 328 с.
4. Чертков Р.И. *Метод Якоби в динамике твердого тела.* – Л.: Судпромгиз, 1960. – 324 с.
5. Емельянова И.С. *Метод Якоби для вращающегося тяжелого тела.* // Методы прикладного функционального анализа / под ред. С.Н. Слугина. – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1991. – С. 20–24.
6. Емельянова И.С. *Проблема “симметрия–интегралы движения” в аналитической динамике.* – Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 1992. – 171 с.
7. Парс Л. *Аналитическая динамика.* – М.: Наука, 1971. – 636 с.
8. Овсянников Л.В. *Групповой анализ дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1978. – 400 с.
9. Раус Э.Дж.*Динамика системы твердых тел.* Т. 2 / Под ред. Ю.А. Архангельского и В.Г. Демина. – М.: Наука, 1983. – 544 с.
10. Голубев В.В. *Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки.* – М.: Гостехиздат, 1953. – 287 с.
11. Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А. *Классические задачи динамики твердого тела. Развитие и современное состояние.* – Киев: Наукова думка, 1978. – 96 с.

Нижегородский государственный университет

Поступила
23.05.1995