ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 8 (483)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 514.754

Э.Д. АЛШИБАЯ

ОБ АФФИННЫХ СВЯЗНОСТЯХ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ГИПЕРПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В A_{n+1}

Рассмотрено распределение гиперплоскостных элементов в $(n+1)$-мерном аффинном пространстве, на котором задано поле оснащающего вектора. Выведены формулы тензоров кручения и кривизны аффинной связности, индуцированной на распределении произвольным полем нормалей. Изучено строение распределения, когда тензор кривизны, соответствующий полю нормалей $\vec{L}$ ($L^i = -L^{ik}L_{k\,n+1}$), равен нулю.

1. Пусть на распределении гиперплоскостных элементов, дифференциальные уравнения которого относительно репера нулевого порядка имеют вид

$$\omega_i^{n+1} = L_{i\alpha}\omega^\alpha, \quad i,j,\ldots = \overline{1,n}, \quad \alpha,\beta,\ldots = \overline{1,n+1},$$

где, вообще говоря, $L_{ij} \neq L_{ji}$, задано поле оснащающего вектора

$$\vec{\nu} = \nu^i\vec{e}_i + \vec{e}_{n+1}, \quad d\nu^i + \nu^l\omega_l^i - \nu^i\omega_{n+1}^{n+1} + \omega_{n+1}^i = \nu_\alpha^i\omega^\alpha.$$

Дифференциальные уравнения движения репера $(M,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n,\vec{e}_{n+1})$ имеют вид

$$d\vec{M} = \omega^i\vec{e}_i + \omega^{n+1}\vec{e}_{n+1},$$
$$d\vec{e}_i = \omega_i^k\vec{e}_k + \omega_i^{n+1}\vec{e}_{n+1},$$
$$d\vec{e}_{n+1} = \omega_{n+1}^k\vec{e}_k + \omega_{n+1}^{n+1}\vec{e}_{n+1}.$$

Из этих уравнений получаем уравнения движения репера $(M,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n,\vec{\nu})$:[1]

$$d\vec{M} = \omega^i\vec{e}_i + \omega^{n+1}\vec{\nu},$$
$$d\vec{e}_i = \omega_i^k\vec{e}_k + \omega_i^{n+1}\vec{\nu},$$
$$d\vec{\nu} = \nu_\alpha^i\omega^\alpha\vec{e}_i + \omega_{n+1}^{n+1}\vec{\nu}.$$

Компоненты движения репера $(M,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\ldots,\vec{e}_n,\vec{\nu})$ удовлетворяют обычным структурным уравнениям. В частности,

$$d\omega^i = \omega^k\wedge\omega_k^i + R^i_{\alpha\beta}\omega^\alpha\wedge\omega^\beta, \tag{1}$$
$$d\omega_j^i = \omega_j^k\wedge\omega_k^i + R^i_{j\alpha\beta}\omega^\alpha\wedge\omega^\beta, \tag{2}$$

где $R^i_{\alpha\beta} = \delta^{n+1}_{[\alpha}\nu^i_{\beta]}$,

$$R^i_{j\alpha\beta} = L_{j[\alpha}\nu^i_{\beta]}. \tag{3}$$

Из уравнений (1), (2) видно [1], что формы ω^i, ω^i_j являются слоевыми формами аффинной связности, определяемой на расслоенном многообразии, базой которого является исходное

[1] Ось $\vec{e}_{n+1}$ совмещается с вектором $\vec{\nu}$.

аффинное пространство A_{n+1}, а слоями — элементы распределения. Таким образом, каждому оснащающему полю векторов $\vec{\nu}$ соответствует некоторая (индуцированная) аффинная связность. Формами, определяющими связность, являются формы ω^i, ω^i_j.

Коэффициенты $R^i_{j\alpha\beta}$ (3) являются компонентами тензора кривизны, а величины $R^i_{\alpha\beta}$ образуют тензор кручения. Тензор, полученный свертыванием по индексам k и m компонент тензора R^k_{jlm}, имеет следующее строение:

$$R_{jk} = R^l_{jkl} = L_{j[k}\nu^l_{l]}.$$

Обозначим $R_j = R^l_{jln+1}$. Величины R_j удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla R_j + R_{jl}\omega^l_{n+1} - R_j\omega^{n+1}_{n+1} = \widetilde{R}_{j\alpha}\omega^\alpha.$$

При помощи R_j и тензора R_{jk} строятся величины[1]

$$\widehat{R}^i = R^{il}R_l \quad (R^{il}R_{lj} = \delta^i_j),$$
$$\nabla\widehat{R}^i - \widehat{R}^i\omega^{n+1}_{n+1} + \omega^i_{n+1} = \widehat{R}^i_\alpha\omega^\alpha,$$

которые определяют инвариантное направление, не лежащее в гиперплоскостном элементе.

В качестве оснащающего вектора можно выбрать любую нормаль и для нее изучить связность, индуцированную этой нормалью.

2. Пусть регулярное (в смысле $|L_{ij}| \neq 0$) распределение оснащено полем нормалей

$$\vec{L} = L^i\vec{e}_i + \vec{e}_{n+1} \quad (L^i = -L^{ik}L_{k\,n+1}),$$
$$\nabla L^i - L^i\omega^{n+1}_{n+1} + \omega^i_{n+1} = L^i_\alpha\omega^\alpha.$$

Тогда $R^i_{jkl}(L) = L_{j[k}L^i_{l]}$, $R^i_{jkn+1}(L) = L_{j[k}L^i_{n+1]}$, где

$$L^i_l = L^{ik}L^{mj}L_{j\,n+1}L_{kml} - L^{ij}L_{jn+1\,l},$$
$$L^i_{n+1} = L^{ik}L^{mj}L_{jn+1}L_{kmn+1} - L^{ij}L_{jn+1\,n+1}.$$

Если тензор кривизны, соответствующий полю нормалей $\vec{L}$, равен нулю, то распределение имеет следующее строение: все нормали $\vec{L}$ принадлежат одной связке параллельных прямых, а все элементы распределения, центры которых лежат на одной прямой из этой связки, параллельны между собой.

Действительно, пусть $R^i_{jkl} = 0$ и $R^i_{jkn+1} = 0$. Тогда $L_{j[k}L^i_{l]} = 0$, т. е. $L_{jk}L^i_l - L_{jl}L^i_k = 0$. Следовательно, $L^i_j = 0$. С учетом

$$L_{j[k}L^i_{n+1]} = 0, \quad \text{т. е.} \quad L_{jk}L^i_{n+1} - L_{jn+1}L^i_k = 0, \tag{4}$$

получаем $L^i_{n+1} = 0$.

Уравнения движения репера $(M, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n, \vec{L})$ принимают вид

$$d\vec{M} = \omega^i\vec{e}_i + \omega^{n+1}\vec{L}, \quad d\vec{e}_i = \omega^k_i\vec{e}_k + L_{ik}\omega^k\vec{L}, \quad d\vec{L} = \omega^{n+1}_{n+1}\vec{L}.$$

Из этих уравнений видно, что, во-первых, при смещении центра M в произвольном направлении нормаль $\vec{L}$ переносится параллельно, во-вторых, при смещении центра вдоль нормали $\vec{L}$, т. е. при $\omega^i = L^i\omega^{n+1}$, элемент переносится параллельно. (Последний факт является характеристическим свойством нормали $\vec{L}$ и был нами установлен ранее [2].)

Наоборот, пусть имеется семейство параллельных прямых и имеется такое распределение, что его элементы, центры которых расположены на одной и той же прямой, параллельны между собой. Тогда нормали $\vec{L}$ такого распределения коллинеарны указанным прямым и соответствующий им тензор кривизны равен нулю.

[1] В общем случае $\det\|R_{ij}\| \neq 0$.

Действительно, пусть $\vec{e} = \vec{e}_{n+1} = \mathrm{const}$ определяет параллельное поле прямых, и векторы $\vec{e}_j$ располагаются на параллельных плоскостях: $\vec{e}_j = \vec{e}_j(x^1, \dots, x^n)$. Тогда радиус-вектор центра M можно записать в виде

$$\vec{M} = \vec{P}(x^1, x^2, \dots, x^n) + \vec{e}x^{n+1},$$

где вектор $\vec{P}(x^1, \dots, x^n)$ лежит в плоскости, натянутой на $\vec{e}_i(x^1, \dots, x^n)$. Вычислим

$$d\vec{M} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial x^k}dx^k + \vec{e}\,dx^{n+1} = (a_k^i \vec{e}_i + a_k \vec{e})dx^k + \vec{e}\,dx^{n+1} = \omega^i \vec{e}_i + \omega^{n+1}\vec{e},$$

где

$$\begin{aligned} \omega^i &= a_k^i dx^k, \\ \omega^{n+1} &= a_k dx^k + dx^{n+1}. \end{aligned} \tag{5}$$

В этом случае $d\vec{e}_j = \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial x^k}dx^k = (a_{jk}^i \vec{e}_i + a_{jk}\vec{e})dx^k = \omega_j^i \vec{e}_i + \omega_j^{n+1}\vec{e}_{n+1}$. Здесь $\omega_j^i = a_{jk}^i dx^k$, $\omega_j^{n+1} = a_{jk}dx^k$. Отсюда с учетом (5) получаем

$$\omega_j^{n+1} = a_{jk}\widetilde{a}_i^k \omega^i.$$

Таким образом, формы ω_j^{n+1} раскладываются по формам ω^i, следовательно, $L_{i\,n+1} = 0$. Поэтому $L^i = -L^{ik}L_{k\,n+1} = 0$ и вектор $\vec{L} = L^i \vec{e}_i + \vec{e}_{n+1} = \vec{e}_{n+1}$ совпадает с вектором $\vec{e}_{n+1} = \vec{e}$.

При смещении центра в любом направлении имеем

$$d\vec{L} = (L_k^i \omega^k + L_{n+1}^i \omega^{n+1})\vec{e}_i + \omega_{n+1}^{n+1}\vec{L} = \Theta \vec{L}.$$

Уравнения $L_k^i \omega^k + L_{n+1}^i \omega^{n+1} = 0$ удовлетворяются тождественно. Вследствие этого

$$L_k^i = 0, \quad L_{n+1}^i = 0,$$

и соответствующий тензор кривизны обращается в нуль: $R_{j\alpha\beta}^i = L_{j[\alpha}L_{\beta]}^i = 0$.

Литература

1. Лаптев Г.Ф. *Многообразия, погруженные в обобщенные пространства* // Тр. 4-го Всесоюзн. матем. съезда. Т. 2. – Л.: Наука, 1964. – С. 226–233.
2. Алшибая Э.Д. *К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве* // Тр. Геометрич. семин. ВИНИТИ АН СССР. – 1974. – Т. 5. – С. 169–192.

Тбилисский государственный университет

Поступила 21.06.2001