ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 5 (540)

УДК 517.544

И.А. БИКЧАНТАЕВ

ЗАДАЧА РИМАНА НА ТРЕХЛИСТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ПРОЕКЦИИ ТОЧЕК ВЕТВЛЕНИЯ КОТОРОЙ ИМЕЮТ ОДНУ ТОЧКУ СГУЩЕНИЯ

Решение краевой задачи Римана в квадратурах на компактной римановой поверхности впервые было получено Л.И. Чибриковой и затем более детально проработано и уточнено Р.Н. Абдулаевым и Э.И. Зверовичем (см. [1] и [2]). На некомпактной римановой поверхности явное решение этой задачи было получено в случае конечнолистной поверхности, все точки ветвления которой имеют максимальный порядок, а их проекции на комплексную плоскость $\mathbb{C}$ не имеют предельных точек в $\mathbb{C}$ [3]. В данной статье получены условия разрешимости и дано явное решение краевой задачи Римана на трехлистной поверхности в случае, когда точки ветвления могут иметь любой порядок, а их проекции на комплексную плоскость имеют единственную точку сгущения на бесконечности. В случае неразбивающего контура Γ решение задачи Римана выражено через обычные интегралы типа Коши.

1. Ограниченные голоморфные функции на трехлистной безграничной накрывающей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ рода бесконечность

Пусть R — риманова поверхность рода бесконечность, на которой существует голоморфная функция z, принимающая каждое свое значение в $\mathbb{C}$ три раза (с учетом кратности). Тогда отображение $z : R \to \mathbb{C}$ определяет трехлистную безграничную накрывающую (R, z) плоскости $\mathbb{C}$ с бесконечным числом точек ветвления, проекции которых не имеют в $\mathbb{C}$ предельных точек.

Проведем на R "разрезы", соединяющие точки ветвления накрывающей (R, z) так, что "разрезанная" поверхность будет состоять из трех компонент R_1, R_2 и R_3 ("листы" накрывающей (R, z)), каждая из которых взаимнооднозначно отображается в $\mathbb{C}$ функцией $z : R \to \mathbb{C}$.

Пусть F — ограниченная голоморфная функция, определенная в некоторой области $D \subset R$ с компактным дополнением $R \setminus D$. Функция $f(z) := F(q(z))$ ($q(z)$ есть поднятие точки $z \in \mathbb{C}$ на накрывающую (R, z)) является, вообще говоря, многозначной аналитической функцией в $z(D)$, причем ее точки ветвления являются проекциями на $\mathbb{C}$ точек ветвления накрывающей (R, z). В каждой из областей $z(D \cap R_i)$ функция $f(z) := F(q(z))$, $q \in D \cap R_i$, допускает выделение однозначной ветви $f_i(z)$, $i = 1, 2, 3$.

Лемма. *Если две из ветвей функции f совпадают в общей области их определения, то и третья ветвь с ними совпадает.*

Доказательство. Пусть E — подобласть D, состоящая из всех точек области D, в которых функция $z : D \to \mathbb{C}$ принимает каждое свое значение три раза с учетом кратности. Предположим, что две из ветвей функции f, скажем f_1 и f_2, совпадают в области $z(E)$. В силу связности E существует точка ветвления q_0 накрывающей (E, z), в которой область R_3 соединяется с областями R_1 и R_2 (в этом случае q_0 есть точка ветвления второго порядка накрывающей (R, z)) или с одной из них, скажем с R_2 (q_0 — точка ветвления первого порядка накрывающей (R, z)). В первом случае при обходе вокруг точки $z_0 = z(q_0)$ ветви f_1, f_2 и f_3 циклически переставляются между собой, и из равенства $f_1 = f_2$ вытекает $f_1 = f_2 = f_3$. Во втором случае при обходе вокруг точки z_0 ветви f_2 и f_3 переходят друг в друга. Но поскольку ветвь f_1 однозначна в

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 06-01-81019-Бел_а.

окрестности точки z_0, то в силу равенства $f_1 = f_2$ функция f_2 не изменяется при таком обходе. Следовательно, $f_3 = f_2$ в окрестности точки z_0 и по теореме единственности всюду в области $z(E)$. $\square$

Теорема 1. *Если F — ограниченная голоморфная функция, определенная в некоторой области $D \subset R$ с компактным дополнением $R \setminus D$, то F принимает одинаковое значение во всех точках области D, в которых функция $z : R \to \mathbb{C}$ принимает одно и то же значение.*

Доказательство. В случае, когда все точки ветвления накрывающей (D, z) имеют максимальный порядок, это утверждение уже было доказано в [3], а для ультрагиперэллиптической поверхности еще в ([4], сс. 53, 54). Если накрывающая (D, z) имеет лишь конечное число точек ветвления первого порядка, то этот случай сводится к предыдущему, если вместо D рассмотреть ее подобласть D_1 такую, что множество $R \setminus D_1$ компактно и все точки ветвления накрывающей (D_1, z) имеют порядок, равный двум. Поэтому остается исследовать лишь случай, когда накрывающая (D, z) имеет бесконечное число точек ветвления первого порядка.

В силу леммы для доказательства теоремы достаточно доказать совпадение любых двух ветвей функции f в области $z(E)$.

Пусть q_0 — точка ветвления (первого или второго порядка) накрывающей (E, z), в которой область R_3 соединяется с одной из областей R_1 и R_2 (для определенности будем считать, что с R_2) или с обеими. Положим

$$G_1(z) = (f_1(z) + f_2(z)\mathrm{e}^{2\pi i/3} + f_3(z)\mathrm{e}^{-2\pi i/3})^3, \quad G_2(z) = (f_1(z) + f_2(z)\mathrm{e}^{-2\pi i/3} + f_3(z)\mathrm{e}^{2\pi i/3})^3.$$

Если q_0 — точка ветвления второго порядка, то при обходе вокруг точки $z_0 = z(q_0)$ ветви f_1, f_2 и f_3 циклически переставляются, и потому функции G_1 и G_2 не изменяются. В самой же точке z_0 функции G_1 и G_2 обращаются в нуль в силу равенств $f_1(z_0) = f_2(z_0) = f_3(z_0)$. Если же q_0 — точка ветвления первого порядка, в которой соединяются области R_2 и R_3, то при обходе вокруг точки $z_0 = z(q_0)$ ветвь f_1 не изменяется, а ветви f_2 и f_3 переходят друг в друга. При этом G_1 переходит в G_2, а G_2 — в G_1. Так как $f_2(z_0) = f_3(z_0)$, то $G_1(z_0) = G_2(z_0)$.

Функция $H = (G_1 - G_2)^2$ не изменяется при обходе вокруг любой точки z_0, являющейся проекцией точки ветвления накрывающей (E, z) на плоскость $\mathbb{C}$, и, следовательно, является однозначной в $z(E)$. Таким образом, H есть ограниченная голоморфная функция в $z(E)$. Во всех проекциях на $\mathbb{C}$ точек ветвления накрывающей (E, z) функция H обращается в нуль, и т. к. число этих точек бесконечно, то $H = 0$ или $G_1 = G_2$ в $z(E)$. Отсюда следует

$$f_1(z) + f_2(z)\mathrm{e}^{2\pi i/3} + f_3(z)\mathrm{e}^{-2\pi i/3} = \varepsilon\left(f_1(z) + f_2(z)\mathrm{e}^{-2\pi i/3} + f_3(z)\mathrm{e}^{2\pi i/3}\right), \; z \in z(E),$$

где $\varepsilon^3 = 1$. Из этого равенства легко выводим, что две из трех ветвей f_1, f_2 и f_3 совпадают и, в силу леммы 1 $f_1 = f_2 = f_3$. $\square$

2. Задача Римана

1. Пусть Γ — кусочно-гладкая линия на R и $\zeta(q)$ — голоморфная функция в окрестности Γ такая, что $d\zeta$ не имеет нулей на Γ. Тогда ζ является локальной униформизирующей в окрестности любой точки $\tau \in \Gamma$. Если Γ не содержит точек ветвления накрывающей (R, z), то можно взять $\zeta = z$. Если $\tau \in \Gamma$ — точка ветвления, то в ее окрестности z и ζ связаны соотношением вида $z - z(\tau) = (\zeta - \zeta(\tau))^n a(\zeta)$, где $a(\zeta)$ — функция, голоморфная в точке $\zeta = \zeta(\tau)$ и $a(\zeta(\tau)) \neq 0$; число n равно двум, если τ — точка ветвления первого порядка и равно трем, если τ — точка ветвления второго порядка.

Пусть $\alpha : [0, 1] \to R$ — путь на R. Его длиной назовем длину плоского пути $z \circ \alpha : [0, 1] \to \mathbb{C}$, т. е. $\int\limits_0^1 |\mathrm{d}(z \circ \alpha)|$. Расстоянием $\rho(p, q)$ между точками p и q на R назовем точную нижнюю грань длин всех путей, соединяющих p и q. Используя локальную однолистность функции $\zeta(q)$, нетрудно показать, что найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что из неравенств $\rho(t_1, t_2) \leq \varepsilon$, $t_1 \neq t_2$ вытекает неравенство $\zeta(t_1) \neq \zeta(t_2)$, $t_1, t_2 \in \Gamma$.

Обозначим через T множество всех узлов контура Γ. На T определим действительнозначную функцию $\lambda = \lambda(\tau)$. По аналогии с ([5], гл. I, § 2, п. 1) введем пространство $H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$, состоящее из функций на Γ, H_μ-непрерывных вне любой окрестности множества T и ведущих себя вблизи T как весовая функция

$$\rho_\lambda(t) = \prod_{\tau \in T} |\zeta(t) - \zeta(\tau)|^{\lambda(\tau)}, \quad t \in \Gamma.$$

Пространство $H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$ банахово относительно нормы

$$\|\varphi\|_{\mu,l} = \sup_{t \in \Gamma} |\varphi(t)\rho_{-\lambda}(t)| + \{\rho_{\mu-\lambda}\varphi\}_\mu,$$

где

$$\{\varphi\}_\mu = \sup_{t_1,t_2 \in \Gamma,\ \rho(t_1,t_2)<\varepsilon,\ t_1 \neq t_2} \frac{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)|}{|\zeta(t_1) - \zeta(t_2)|^\mu}.$$

Выберем $\delta > 0$ столь малым, чтобы множества

$$\Gamma_\tau = \Gamma \cap \{q \in R : 0 < \rho(q, \tau) \le \delta\}, \quad \tau \in T,$$

попарно не пересекались и распадались на компоненты $\Gamma_{\tau,i}$, $1 \le i \le n_\tau$, $\tau \in T$. Введем класс $H_{\mu,(\lambda)}(\Gamma,\ T)$ функций $\varphi(t)$, которые H_μ-непрерывны на Γ вне любой окрестности множества T и на каждом Γ_τ, $\tau \in T$, представимы в виде

$$\varphi(t) = p_{\tau,i}(t) + \varphi_\tau(t), \quad t \in \Gamma_{\tau,i},$$

где $p_{\tau,i}$ — многочлен степени меньше, чем $\lambda(\tau)$ (многочлен отрицательной степени условимся считать равным нулю), $\varphi_\tau \in H_{\mu,\lambda(\tau)}(\Gamma_\tau,\ \tau)$. Пространство $H_{\mu,(\lambda)}(\Gamma, T)$ банахово относительно нормы

$$\|\varphi\|_{\mu,(\lambda)} = \sum_{\tau \in T} \left(\sum_{i=1}^{n_\tau} \sup_{\Gamma_\tau} |p_{\tau,i}| + \|\varphi_\tau\|_{H_{\mu,\lambda(\tau)}(\Gamma_\tau,\tau)} \right) + \|\varphi\|_{H_\mu(\Gamma')},$$

где $\Gamma' = \Gamma \cap \{q :\ \rho(q,\ T) \ge \delta/2\}$, $\rho(q, T) = \min_{\tau \in T} \rho(q,\ \tau)$ (ср. [5], гл. I, § 2, п. 2).

2. Предположим, что Γ — кусочно-гладкий контур на R такой, что множество $R \setminus \Gamma$ связно. Зададим дивизор D, носитель которого лежит в $R \setminus \Gamma$ и функции $G \in H_{\mu,(\mu)}(\Gamma, T)$ и $g \in H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$, $0 < \mu < 1$, $-1 < \lambda < 0$, причем $G(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$.

Рассмотрим краевую задачу Римана в следующей постановке.

Найти кусочно-мероморфную функцию F на R с линией скачков Γ, кратную дивизору $1/D$ и ограниченную в окрестности идеальной границы поверхности R, предельные значения которой на Γ принадлежат классу $H_{\mu,\lambda}(\Gamma, T)$, $0 < \mu < 1$, $-1 < \lambda < 0$, и удовлетворяют соотношению

$$F^+(t) = G(t)F^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma. \tag{1}$$

3. Через $q(z)$ будем обозначать точку на R такую, что $z(q(z)) = z$. Если F — решение задачи (1), то в силу теоремы 1 функция $F(q(z))$ однозначна в $\mathbb{C} \setminus z(\Gamma)$ и аналитически продолжима в $\mathbb{C} \setminus \gamma$, где γ — множество точек на $z(\Gamma)$, имеющих три прообраза при отображении $z : \Gamma \to z(\Gamma)$ (точки ветвления накрывающей (R, z) при этом считаются столько раз, какова их кратность).

Множество M на римановой поверхности или на плоскости называется AB-устранимым, если для некоторой окрестности U множества M любая аналитическая и ограниченная в $U \setminus M$ функция аналитически продолжима в U.

Определим в $\mathbb{C}$ дивизор Δ, полагая $\operatorname{ord}_a \Delta = \min\{\operatorname{ord}_q D$ для всех точек q таких, что $z(q) = a \in \mathbb{C}\}$ для точек q, не являющихся точками ветвления накрывающей (R, z); если же q есть точка ветвления накрывающей (R, z) порядка k, $k = 1, 2$, то $\operatorname{ord}_q D$ заменяется на $\left[\frac{1}{k+1} \operatorname{ord}_q D\right]$, где $[\ ]$ означает целую часть числа. Если множество γ является AB-устранимым, то функция f аналитически продолжима на всю замкнутую комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ и является рациональной функцией, кратной дивизору $1/\Delta$. Из условия (1) вытекает, что в случае разрешимости задачи Римана функции G и g удовлетворяют соотношению $g(t) = (1 - G(t))f(z(t))$,

$t \in \Gamma$, где f — рациональная функция, кратная дивизору $1/\Delta$. Если это соотношение выполняется, то функция $F(q) = f(z(q))$ является решением краевой задачи Римана (1). Отсюда вытекает

Теорема 2. *Пусть γ — AB-устранимое множество. Тогда для разрешимости краевой задачи Римана* (1) *необходимо и достаточно, чтобы функции G и g были связаны соотношением $g(t) = (1 - G(t))f(z(t))$, $t \in \Gamma$, где f — рациональная функция, кратная дивизору $1/\Delta$. При этом любое решение задачи* (1) *имеет вид $F = f \circ z$.*

Из теоремы 2 вытекают следующие утверждения: 1) при $\operatorname{ord}\Delta < 0$ задача (1) имеет решение (равное нулю) только при $g = 0$; 2) если $G = 1$, то для разрешимости задачи Римана (1) необходимо и достаточно, чтобы $g = 0$; при этом число линейно независимых решений задачи (1) равно $\max(0, \operatorname{ord}\Delta + 1)$; 3) если $G(t) \not\equiv 1$, то задача (1) не может иметь более одного решения.

4. Предположим теперь, что множество γ не является AB-устранимым; при этом его линейная мера будет положительной ([4], с. 5). Обозначим через Γ_k кривую на $\overline{R}_k$, гомеоморфную $z(\Gamma)$ относительно отображения $z : \Gamma_k \to z(\Gamma)$, $k = 1, 2, 3$, причем кривые Γ_k могут иметь общие точки только в точках ветвления накрывающей (R, z) и $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 = z^{-1}(z(\Gamma))$. Через $\rho_k : z(\Gamma) \to \Gamma_k$, $k = 1, 2, 3$, обозначим гомеоморфизм $z(\Gamma)$ на Γ_k такой, что $z(\rho_k(\xi)) = \xi$ при $\xi \in z(\Gamma)$. Ориентацию на Γ выберем так, чтобы на линейных участках контура, имеющих одинаковые проекции на z-плоскость $\mathbb{C}$, отображение $z : \Gamma \to z(\Gamma)$ индуцировало бы одну и ту же ориентацию на $z(\Gamma)$. Ориентацию на Γ_k выберем таким образом, чтобы индуцированная ею при проектировании $z : R \to \mathbb{C}$ ориентация на $z(\Gamma)$ совпадала бы с уже выбранной.

Доопределим G и g на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, полагая $G = 1$, $g = 0$ в точках, не принадлежащих Γ. Тогда функция f кратна дивизору $1/\Delta$ и на $z(\Gamma)$ удовлетворяет краевым условиям

$$f^+(\xi) = G(\rho_k(\xi))f^-(\xi) + g(\rho_k(\xi)), \quad \xi \in z(\Gamma), \quad k = 1, 2, 3. \tag{2_k}$$

К множеству T отнесем все узлы контура Γ, все точки ветвления накрывающей (R, z), лежащие на Γ, все точки разрыва коэффициентов G и g, все точки $t \in \Gamma$, такие, что $z(t)$ есть узловая точка контура $z(\Gamma)$, а также можем включить в него любое конечное число других точек контура Γ.

Функции $G(\rho_k(\xi))$ принадлежат классу $H_{\mu,(\mu')}(z(\Gamma),\, z(T))$, где

$$\mu'(z(\tau)) = \begin{cases} \mu, & \text{если } z^{-1}(z(\tau)) \subset T \text{ и среди точек множества } z^{-1}(z(\tau)) \\ & \text{нет точек ветвления накрывающей } (R, z); \\ \mu/2, & \text{если } z^{-1}(z(\tau)) \subset T \text{ и среди точек множества } z^{-1}(z(\tau)) \\ & \text{есть точка ветвления первого порядка накрывающей } (R, z); \\ \mu/3, & \text{если } z^{-1}(z(\tau)) = \tau \in T \text{ есть точка ветвления второго порядка} \\ & \text{накрывающей } (R, z); \\ 0, & \text{если } \tau \in T \text{ и } z^{-1}(z(\tau)) \not\subset T. \end{cases}$$

Функции $g(\rho_k(\xi))$ принадлежат классу $H_{\mu,\nu}(z(\Gamma),\, z(T))$, где

$$\nu(z(\tau)) = \begin{cases} \lambda, & \text{если } \tau \in T \text{ и } \tau \text{ не является точкой ветвления;} \\ \lambda, & \text{если } \tau \in T,\ \tau \text{ является точкой ветвления первого порядка и} \\ & \text{существует другая точка множества } T \text{ с той же проекцией } z(\tau); \\ \lambda/2, & \text{если } \tau \in T,\ \tau \text{ является точкой ветвления первого порядка и не} \\ & \text{существует другой точки множества } T \text{ с той же проекцией } z(\tau); \\ \lambda/3, & \text{если } \tau \in T \text{ и } \tau \text{ является точкой ветвления второго порядка.} \end{cases}$$

Решение задачи (2_k) будем отыскивать в классе функций, предельные значения которых на $z(\Gamma)$ принадлежат классу $H_{\mu,\nu}(z(\Gamma),\, z(T))$.

Таким образом, функция f является одновременно решением трех краевых задач Римана на контуре $z(\Gamma)$. Из связности $R\setminus\Gamma$ следует связность множества $\mathbb{C}\setminus\gamma$. В точки множества $z(\Gamma)\setminus\gamma$ функция f аналитически продолжима и, следовательно, является аналитической в области $\mathbb{C}\setminus\gamma$ за исключением, возможно, конечного числа полюсов. Более того, это верно в $\mathbb{C}\setminus\gamma_1$, где γ_1 — объединение тех компонент γ, которые не являются AB-устранимыми. Для совпадения решений краевых задач (2_k), $k=1,2,3$, достаточно потребовать их совпадения в окрестности некоторой точки $z_0\in\mathbb{C}\setminus z(\Gamma)$.

5. Если на множестве $\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$ функция G принимает одинаковые значения во всех точках, имеющих одинаковые проекции на $\mathbb{C}$, то в силу теоремы 1 для разрешимости задачи (1) необходимо, чтобы и функция g обладала этим же свойством. Тогда все три задачи (2_k), $k=1,2,3$, совпадают. Если f — решение задачи (2_k), то $F(q)=f(z(q))$ будет решением задачи (1).

Обозначим через $X(z)$ каноническую функцию задачи (2_k), предельные значения которой на Γ принадлежат классу $H_{\mu,\nu}(z(\Gamma),\, z(T))$ и которая имеет максимально возможный порядок $\varkappa$ на бесконечности. Тогда при $\varkappa+\operatorname{ord}\Delta\ \geq -1$ задача (2_k) разрешима при любой функции $g\in H_{\mu,\lambda}(\Gamma,T)$, $0<\mu<1$, $-1<\lambda<0$, и ее общее решение имеет вид

$$f(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{z(\Gamma)}\frac{g(\rho_k(\xi))d\xi}{X^+(\xi)(\xi-z)}+X(z)\delta(z), \tag{3}$$

где δ — произвольная рациональная функция, кратная дивизору $\Delta^{-1}\infty^{-\varkappa}$.

При $\varkappa+\operatorname{ord}\Delta<-1$ необходимые и достаточные условия разрешимости задачи (2_k), а следовательно, и задачи (1), имеют вид

$$\int_{z(\Gamma)}\frac{g(\rho_k(\xi))\omega_j(\xi)d\xi}{X^+(\xi)}=0,\quad j=1,2,\ldots,-\varkappa-\operatorname{ord}\Delta-1, \tag{4}$$

где ω_j — базис пространства рациональных функций, кратных дивизору $\Delta\infty^{\varkappa+2}$. При выполнении условий (4) задача (2_k) имеет единственное решение вида (3), где $\delta=0$.

Условия (4) можно переписать в виде

$$\int_{\Gamma\cap\Gamma_k}g\theta_j=0,\quad j=1,2,\ldots,-\varkappa-\operatorname{ord}\Delta-1, \tag{5}$$

где $\theta_j(t)=(X^+(z(t)))^{-1}\omega_j(z(t))dz(t)$. Общее решение задачи (1) имеет вид

$$F(q)=\frac{X(z(q))}{2\pi i}\int_{\Gamma\cap\Gamma_k}\frac{g(t)dz(t)}{X^+(z(t))(z(t)-z(q))}+X(z(q))\delta(z(q)). \tag{6}$$

В формулах (5) и (6) k может принимать любое из значений 1, 2 или 3.

Таким образом, доказана

Теорема 3. *Пусть γ имеет положительную линейную меру и коэффициент G задачи* (1), *продолженный на $\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$, принимает одинаковые значения во всех точках с одинаковой проекцией на $\mathbb{C}$. Тогда для разрешимости задачи* (1) *необходимо и достаточно, чтобы функция g обладала тем же свойством и удовлетворяла условиям* (5). *При этом общее решение задачи* (1) *имеет вид* (6), *где δ — произвольная рациональная функция, кратная дивизору $\Delta^{-1}\infty^{-\varkappa}$. Однородная* ($g=0$) *задача* (1) *имеет $l=\max(0,\operatorname{ord}\Delta+\varkappa+1)$ линейно независимых решений.*

6. Пусть γ такое же, как в предыдущем пункте. Здесь будем предполагать, что G не удовлетворяет предыдущему условию. Тогда на некоторой дуге положительной длины, принадлежащей $\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\Gamma_3$, по меньшей мере две из функций $G|\Gamma_k$, $k=1,2,3$, различны во всех точках этой дуги. Ясно, что при этом однородная ($g=0$) задача Римана (1) имеет лишь нулевое решение, а неоднородная может иметь не более одного решения. В рассматриваемом случае функция f является решением одновременно трех различных краевых задач Римана (2_k),

$k=1,2,3$. Обозначим через $X_k(z)$ каноническую функцию (того же класса, что и в п. 5) задачи (2_k), $\varkappa_k=\operatorname{ord}_\infty X_k(z)$. При $\varkappa_k+\operatorname{ord}\Delta\ge -1$ задача (2_k) безусловно разрешима и ее общее решение имеет вид

$$f_k(z)=\frac{X_k(z)}{2\pi i}\int_{z(\Gamma)}\frac{g(\rho_k(\xi))d\xi}{X_k^+(\xi)(\xi-z)}+X_k(z)\delta_k(z),\quad k=1,2,3, \tag{7}$$

где $\delta_k(z)$ — произвольная рациональная функция, кратная дивизору $\Delta^{-1}\infty^{-\varkappa_k}$. При $\varkappa_k+\operatorname{ord}\Delta<-1$ для разрешимости задачи (2_k) необходимо и достаточно выполнения условий

$$\int_{z(\Gamma)}\frac{g(\rho_k(\xi))}{X_k^+(\xi)}\omega_{kj}(\xi)d\xi=0,\quad j=1,2,\dots,-\varkappa_k-\operatorname{ord}\Delta-1, \tag{8}$$

где ω_{kj} — базис пространства рациональных функций, кратных дивизору $\Delta\infty^{\varkappa_k+2}$. Полагая

$$\theta_{kj}(t)=\frac{\omega_{kj}(z(t))dz(t)}{X_k^+(z(t))},$$

условие (8) перепишем в виде

$$\int_{\Gamma\cap\Gamma_k}g\theta_{kj}=0,\quad j=1,2,\dots,-\varkappa_k-\operatorname{ord}\Delta-1,\quad k=1,2,3. \tag{9}$$

При выполнении условий (9) задача (2_k) имеет единственное решение вида (7), где $\delta_k=0$. Для того чтобы функции f_k определяли решение исходной задачи (1), должны выполняться равенства $f_1=f_2=f_3$. В силу сказанного в п. 4, достаточно потребовать выполнения этих равенств в окрестности некоторой точки $z_0\in\mathbb{C}\setminus z(\Gamma)$.

Пусть z_0 — точка из $\mathbb{C}\setminus z(\Gamma)$, в которой функции X_k и f_k, $k=1,2,3$, голоморфны. Функцию $X_k(z)/2\pi i X_k^+(\eta)(\eta-z)$ разложим в ряд Тейлора в окрестности точки z_0:

$$\frac{X_k(z)}{2\pi i X_k^+(\eta)(\eta-z)}=\sum_{j=0}^{\infty}c_{kj}(\eta)(z-z_0)^j,\quad k=1,2,3.$$

Пусть δ_{kj}, $j=1,2,\dots,\varkappa_k+\operatorname{ord}\Delta+1$, — базис пространства рациональных функций, кратных дивизору $\Delta^{-1}\infty^{-\varkappa_k}$, $k=1,2,3$ (при $\varkappa_k+\operatorname{ord}\Delta<0$ это пространство состоит только из нуля). Тогда

$$X_k(z)\delta_k(z)=\sum_{n=1}^{\varkappa_k+\operatorname{ord}\Delta+1}a_{kn}X_k(z)\delta_{kn}(z),\quad k=1,\ 2,\ 3,$$

где a_{kn} — комплексные числа (при $\varkappa_k+\operatorname{ord}\Delta<0$ эта сумма пустая). Разлагая функции $X_k\delta_{kn}$ в ряд Тейлора, получим

$$X_k(z)\delta_{kn}(z)=\sum_{j=0}^{\infty}a_{knj}(z-z_0)^j,\quad k=1,2,3,\quad n=1,2,\dots,\varkappa_k+\operatorname{ord}\Delta+1.$$

Сравнивая коэффициенты тейлоровских разложений функций f_k, $k=1,2,3$, получим соотношения, эквивалентные равенствам $f_1=f_2=f_3$:

$$\sum_{n=1}^{\varkappa_1+\operatorname{ord}\Delta+1}a_{1n}a_{1nj}-\sum_{n=1}^{\varkappa_2+\operatorname{ord}\Delta+1}a_{2n}a_{2nj}=$$
$$=-\int_{z(\Gamma)}(g(\rho_1(\eta))c_{1j}(\eta)-g(\rho_2(\eta))c_{2j}(\eta))d\eta,\quad j=0,1,2,\dots, \tag{10}$$

$$\sum_{n=1}^{\varkappa_1+\operatorname{ord}\Delta+1}a_{1n}a_{1nj}-\sum_{n=1}^{\varkappa_3+\operatorname{ord}\Delta+1}a_{3n}a_{3nj}=$$
$$=-\int_{z(\Gamma)}(g(\rho_1(\eta))c_{1j}(\eta)-g(\rho_3(\eta))c_{3j}(\eta))d\eta,\quad j=0,1,2,\dots \tag{11}$$

Упорядочим уравнения системы (10), (11) следующим образом. Сначала запишем уравнения (10) и (11), соответствующие значению $j = 0$, затем соответствующие $j = 1$ и т. д. Матрицу этой системы уравнений обозначим через A и положим

$$\alpha_{2j+1}(t) = \begin{cases} -c_{1j}(z(t))dz(t), & t \in \Gamma \cap \Gamma_1, \\ \ \ c_{2j}(z(t))dz(t), & t \in \Gamma \cap \Gamma_2, \\ \ \ 0, & t \in \Gamma \cap \Gamma_3, \end{cases} \qquad j = 0, 1, 2, \dots ;$$

$$\alpha_{2j+2}(t) = \begin{cases} -c_{1j}(z(t))dz(t), & t \in \Gamma \cap \Gamma_1, \\ \ \ 0, & t \in \Gamma \cap \Gamma_2, \\ \ \ c_{3j}(z(t))dz(t), & t \in \Gamma \cap \Gamma_3, \end{cases} \qquad j = 0, 1, 2, \dots ;$$

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), \dots)^t,$$

$$a = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1,\varkappa_1+\operatorname{ord}\Delta+1}, a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2,\varkappa_2+\operatorname{ord}\Delta+1}, a_{31}, a_{32}, \dots, a_{3,\varkappa_3+\operatorname{ord}\Delta+1})^t,$$

причем в случае $\varkappa_k + \operatorname{ord}\Delta < 0$ соответствующие компоненты a_{kn} вектора a отсутствуют. Тогда система уравнений (10), (11) запишется в виде

$$Aa = \int_\Gamma g\alpha. \tag{12}$$

В силу единственности решения задачи Римана (1) ранг r матрицы A должен быть равен числу неизвестных a_{kn}, т. е. $r = \max\{0,\ \varkappa_1 + \operatorname{ord}\Delta + 1\} + \max\{0,\ \varkappa_2 + \operatorname{ord}\Delta + 1\} + \max\{0,\ \varkappa_3 + \operatorname{ord}\Delta + 1\}$.

Пусть B — невырожденная квадратная матрица порядка r, составленная из строк матрицы A с номерами $j_1, j_2, \dots, j_r$ $(j_1 < j_2 < \dots < j_r)$, B_j — квадратная матрица порядка $r + 1$, составленная из $r + 1$ строк расширенной матрицы $\Big(A, \int\limits_\Gamma g\alpha\Big)$ с номерами $j_1, j_2, \dots, j_r, j$. Тогда

$$\det B_j = \int_\Gamma g\beta_j,$$

где

$$\beta_j = \sum_{n=1}^{r} B_{j,j_n}\alpha_{j_n} + B_{j,j}\alpha_j,$$

$B_{j,k}$ — алгебраическое дополнение элемента $\int\limits_\Gamma g\alpha_k$ матрицы B_j; очевидно, $B_{j,j} = \det B \neq 0$. Если j принимает одно из значений $j_1, j_2, \dots, j_r$, то $\beta_j = 0$. Условия разрешимости системы (10), (11) (или (12)) имеют вид

$$\int_\Gamma g\beta_j = 0, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad j \geq 0, \quad j \neq j_1, j_2, \dots, j_r. \tag{13}$$

Совокупность условий (9) и (13) необходима и достаточна для разрешимости задачи (1). При их выполнении единственное решение задачи (1) определяется равенством

$$F(q) = \frac{X_k(z(q))}{2\pi i} \int_{\Gamma\cap\Gamma_k} \frac{g(t)dz(t)}{X_k^+(z(t))(z(t) - z(q))} + X_k(z(q))\delta_k(z(q)), \quad k = 1, 2, 3. \tag{14}$$

Таким образом, доказана

Теорема 4. *Пусть γ имеет положительную линейную меру и имеются точки на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ с одинаковой проекцией на $\mathbb{C}$, в которых коэффициент G задачи* (1) *принимает различные значения. Тогда для разрешимости задачи Римана* (1) *необходимо и достаточно выполнения условий* (9) *и* (13). *При их выполнении задача* (1) *имеет единственное решение, определяемое равенством* (14), *где k может принимать любое из трех возможных значений.*

Литература

1. Чибрикова Л.И. *Граничные задачи теории аналитических функций на римановых поверхностях* // Итоги науки и техн. Матем. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1980. – Т. 18. – С. 3–66.
2. Зверович Э.И. *Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровских классах на римановых поверхностях* // УМН. – 1971. – Т. 26. – № 1. – С. 113–179.
3. Бикчантаев И.А. *Задача Римана на конечнолистной римановой поверхности бесконечного рода* // Матем. заметки. – 2000. – Т. 67. – Вып. 1. – С. 25–35.
4. Sario L., Nakai M. *Classification theory of open Riemann surfaces.* — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1970. – 446 p.
5. Солдатов А.П. *Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций.* – М.: Высш. школа, 1991. – 208 с.

Казанский государственный университет

Поступила
15.02.2006