ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 4 (431)

УДК 517.958

*М.И. ДРОБОТЕНКО, А.В. КОСТЕРИН*

# РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ УПРУГОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

**1.** Теория фильтрационной консолидации (ФК) изучает квазистационарные взаимосвязанные процессы деформирования пористой среды и фильтрации насыщающих ее жидкостей. Она находит широкое применение в геомеханике и химической технологии ([1], с. 619–668). Во многих случаях пористая среда считается чисто упругой, а ее деформации — малыми. При этом модель ФК включает в себя ([1], с. 355–358; [2], с. 41–42; [3], с. 7–10) уравнение безынерционного движения (квазиравновесия) среды в целом

$$\nabla \cdot \sigma - \nabla p + (m\rho_1 + (1-m)\rho_2)F = 0, \tag{1}$$

закон Гука

$$\sigma = \lambda\,\theta\,\delta + 2\,\mu\,\varepsilon, \tag{2}$$

закон фильтрации

$$q = -K(\nabla p - \rho_1 F), \tag{3}$$

условие неразрывности процесса

$$\operatorname{div} q + \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0, \tag{4}$$

граничные и начальные условия. Здесь $\sigma$ — тензор эффективных напряжений в пористой матрице ([2], с. 27); $p$ — давление жидкости; $m$ — пористость; $\rho_1$, $\rho_2$ — плотности жидкости и твердой фазы; $F$ — вектор плотности массовых сил; $\varepsilon$ — тензор деформаций:

$$2\,\varepsilon_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i};$$

$u$ — вектор смещений пористой среды; $\theta = \operatorname{div} u$; $\delta$ — единичный тензор; $q$ — скорость фильтрации; $\lambda$, $\mu$, $K$ — положительные константы; $x = (x_1, x_2, x_3)$ — радиус-вектор точки среды; $x_i$ — декартовы координаты; $t$ — время.

Граничные условия для пористой среды и фильтрационного потока обычно принимают в виде ([1], с. 358)

$$\sigma \cdot n - pn = \pi(x,t), \quad x \in \Gamma_\sigma, \tag{5}$$

$$u = 0, \quad x \in \Gamma_u, \tag{6}$$

$$p = p_0(x,t), \quad x \in \Gamma_p, \tag{7}$$

$$q \cdot n = 0, \quad x \in \Gamma_q, \tag{8}$$

где $\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u = \Gamma_p \cup \Gamma_q = \partial\Omega$ — два независимых разбиения границы области $\Omega$, занятой насыщенной пористой средой, на подмножества; $n$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93-013-17300).

Начальные условия в соответствии с (4) достаточно задать лишь для смещений среды

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{9}$$

В дальнейшем положим для простоты $F = 0$.

Модель (1)–(9) ФК обладает рядом “плохих” свойств, сильно затрудняющих ее численную реализацию. Некоторые из них проявляются в случаях разрывной по $t$ нагрузки $\pi(x,t)$ и связаны с особенностями реакции упругой насыщенной пористой среды на такие разрывы ([3], с. 11–12). При скачке нагрузки объемные деформации из-за фильтрационного сопротивления сохраняются, но возможен скачок сдвиговых деформаций. При этом, во-первых, скорость смещений пористой матрицы бесконечна, что затрудняет дискретизацию задачи по времени, а во-вторых, поле давления после скачка рассогласуется с условиями (7), (8). Действительно, градиент скачка давления $\nabla[p]$ полностью определяется скачком вектора смещений $[u]$ — вытекающим из (1), (2) соотношением $\nabla[p] = \mu\nabla^2[u]$ — и поэтому вовсе не обязан удовлетворять (7), (8). Более того, т. к. $[\theta] = 0$, то $\nabla^2[p] = 0$, и в силу (7), (8) должно быть $[p] = 0$ в $\Omega$. Указанные противоречия говорят о том, что в местах рассогласования должны существовать пограничные слои, в которых $[\theta] \neq 0$. И это также необходимо учитывать при численном решении задачи (1)–(9).

Однако наиболее существенный недостаток рассматриваемой модели заключается в том, что эквивалентная (1)–(9) задача определения поля скоростей $\dot{u} = \partial u/\partial t(x,t_*)$ по заданному в фиксированный момент времени $t_*$ полю перемещений $u(x,t_*)$ является некорректной ([3], с. 17). Действительно, из (1)–(4) видно, что задание $u(x,t_*)$ определяет $\operatorname{div}\dot{u}(x,t_*) = s(u) = K\operatorname{div}(\mu\nabla^2 u + (\lambda+\mu)\nabla\theta)$. Полностью же $\dot{u}(x,t_*)$ находится из решения краевой задачи

$$\begin{cases} \mu\nabla^2\dot{u} + (\lambda+\mu)\nabla s(u) - \nabla\dot{p} = 0; \quad \operatorname{div}\dot{u} = s; \quad \dot{\sigma} = \lambda\, s\,\delta + 2\,\mu\,\dot{\varepsilon}; \\ \dot{\sigma}\cdot n - \dot{p}\,n = \dot{\pi}(x,t_*), \quad x\in\Gamma_\sigma; \quad \dot{u} = 0, \quad x \in \Gamma_u; \\ \dot{p} = \dot{p}_0(x,t_*), \quad x\in\Gamma_p; \quad \partial\dot{p}/\partial n = 0, \quad x\in\Gamma_q. \end{cases} \tag{10}$$

В ([3], сс. 16, 22–25) дана вариационная постановка этой задачи, проведена ее “регуляризация повышением гладкости” [4] и доказана монотонная сходимость регуляризованной минимизирующей последовательности к решению исходной задачи, если оно “достаточно гладкое”. К сожалению, построение такой последовательности существенно осложняется неудобной структурой множества пробных функций: они должны принадлежать пространству $W_2^3(\Omega)$ и удовлетворять дифференциальным условиям второго порядка на $\Gamma_p$ и $\Gamma_q$.

**2.** Физически более естественной и практически более удобной оказывается регуляризация “упругой” задачи (1)–(9) введением малой вязкости пористой матрицы.

Будем исходить из вариационной теории ФК вязкоупругой среды типа Кельвина-Фойгта [5]. При этом вместо (2) будем иметь

$$\sigma = \frac{\partial F}{\partial\varepsilon} + \frac{\partial\varphi}{\partial e}, \quad e = \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}, \tag{2'}$$

где $F(\varepsilon)$ и $\varphi(\varepsilon, e)$ — упругий и диссипативный потенциалы. Кроме того, для простоты положим в (7) $p_0 = 0$. Прочие соотношения модели (1)–(9) оставим без изменения.

Определим пространства функций, которые понадобятся в дальнейшем,

$$V = \left(W_2^1(\Omega)\right)^n, \quad V_0 = \{v \in V,\ v = 0,\ x\in\Gamma_u\},$$
$$W = \Big\{q = (q_i)_{i=1}^n,\ q_i \in L_2(\Omega),\ \|q\|_W^2 = \int_\Omega (q^2 + (\operatorname{div} q)^2)dx\Big\}.$$

Пространство $W$ полно, и для $q \in W$ имеет смысл значение нормальной компоненты $q_n$ на $\partial\Omega$

([6], сс. 13, 16),

$$W_0 = \{q \in W,\ q_n = 0,\ x \in \Gamma_q\},$$
$$M = \{(v,q),\ v \in V_0,\ q \in W_0,\ \operatorname{div} v + \operatorname{div} q = 0\},$$
$$E = \Big\{ e = (e_{ij})_{i,j=1}^n,\ e_{ij} \in L_2(\Omega),\ \|e\|_E^2 = \int_\Omega e_{ij} e_{ij}\, dx \Big\}, \quad Y = \big(L_2(\Gamma_\sigma)\big)^n.$$

Число $n$ означает здесь размерность физического пространства.

Введем функционал

$$J(t,u,v,q) = \int_\Omega \Big( (\varphi + e\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \Big) dx - \int_{\Gamma_\sigma} \pi \cdot v \, d\Gamma + \int_\Omega \Big( \frac{q^2}{2K} \Big) dx, \tag{11}$$

где $u, v \in V_0$, $q \in W_0$, $\pi \in Y$, $2e_{ij} = \partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i$. Определим оператор $G(t) : V_0 \to V_0$ для $t \in [0,T]$ следующим образом:

$$G(t)u = v, \quad \text{если} \quad J(t,u,v,q) = \inf_{(v^*,q^*) \in M} J(t,u,v^*,q^*). \tag{12}$$

Обобщенное решение задачи ФК среды Кельвина-Фойгта согласно [5] определяется как решение задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = G(t)\, u, \quad u(x,0) = u_0(x). \tag{13}$$

Заметим, что оператор $G$ согласно (12) определяется исходными данными задачи. Для сильно выпуклой по $e$ функции $\varphi$ в [5] доказана корректность этой задачи и установлена связь обобщенного решения с классическим. "Упругая" задача в рамках такого подхода получается при $\varphi = 0$. Она некорректна. Ее регуляризованное решение $u^\alpha(x,t)$ определим как решение задачи (11)–(13) при

$$\varphi = \varphi_\alpha(e) = \begin{cases} \alpha|e|^2, & |e| \le \delta; \\ \frac{1}{\alpha}|e|^2 - \delta^2(\frac{1}{\alpha} - \alpha), & |e| > \delta, \end{cases}$$

где $\delta$ — положительное число. Установим связь между решением "упругой" задачи ($\varphi = 0$) и $u^\alpha$. Покажем сначала, что для всех $0 < \alpha \le 1$ выполняется неравенство $\|u^\alpha\|_{C^1} \le K$ с некоторой константой $K > 0$.

Так как $(0,0) \in M$ и $J_\alpha(t,u,0,0) = 0$, то на минимали $(v,q)$ вариационной задачи (12) $J_\alpha(t,u,v,q) \le 0$, следовательно,

$$\int_\Omega \Big( \varphi_\alpha(e^\alpha) + e^\alpha \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_\alpha} \Big) dx - \int_{\Gamma_\sigma} \pi \cdot v^\alpha d\Gamma \le 0.$$

Отсюда, в свою очередь, следует неравенство

$$\int_\Omega \varphi_\alpha(e^\alpha) dx \le \int_\Omega \langle e^\alpha, \partial_\varepsilon F(\varepsilon^\alpha) \rangle dx + \int_{\Gamma_\sigma} (\pi, v^\alpha) d\Gamma \le c(\|\partial_\varepsilon F\|_E \, \|u^\alpha\|_V \, \|v^\alpha\|_V + \|\pi\|_Y \, \|v^\alpha\|_V). \tag{14}$$

Заметим, что для $0 < \alpha \le 1$, $|e^\alpha| \le \delta$ имеем

$$\frac{1}{\alpha}(\delta^2 - |e^\alpha|^2) \ge \alpha(\delta^2 - |e^\alpha|^2),$$

поэтому

$$\alpha |e^\alpha|^2 \ge \frac{1}{\alpha}|e^\alpha|^2 - \delta^2 \Big( \frac{1}{\alpha} - \alpha \Big).$$

Но

$$\varphi_\alpha(e^\alpha) = \begin{cases} \alpha|e^\alpha|^2, & |e^\alpha| \le \delta, \\ \frac{1}{\alpha}|e^\alpha|^2 - \delta^2(\frac{1}{\alpha} - \alpha), & |e^\alpha| > \delta, \end{cases}$$

таким образом,
$$\int_\Omega \varphi_\alpha(e^\alpha)dx \geq \frac{1}{\alpha}\|e^\alpha\|_E^2 - |\Omega|\delta^2\Big(\frac{1}{\alpha}-\alpha\Big).$$
Применяя неравенство Корна, с учетом выше сказанного получаем из (14)
$$\frac{1}{\alpha}c\|v^\alpha\|_V^2 - |\Omega|\delta^2\Big(\frac{1}{\alpha}-\alpha\Big) \leq (\|\partial_\varepsilon F\|\,\|u^\alpha\|_V + \|\pi\|)\|v^\alpha\|_V.$$
Для всех $v^\alpha$ с $\|v^\alpha\|_V > K_1$, $K_1$ — положительная константа, из последнего неравенства получаем
$$\|v^\alpha\|_V \leq \frac{1}{c}\Big(\alpha\|\partial_\varepsilon F\|\,\|u^\alpha\|_V + \alpha\|\pi\| + \frac{|\Omega|\delta^2(1-\alpha^2)}{K_1}\Big) \leq K_2(\alpha\|u^\alpha\|_V + 1).$$
Поэтому для любых $v^\alpha$ справедлива оценка
$$\|v^\alpha\|_V \leq K_2(\alpha\|u^\alpha\|_V + 1) + K_1 \leq K_3(\alpha\|u^\alpha\|_V + 1).$$

Пользуясь для $u^\alpha$ представлением
$$u^\alpha(t) = u_0 + \int_0^t v^\alpha(s)ds,$$
находим
$$\|u^\alpha(t)\|_V \leq \|u_0\|_V + \int_0^t \|v^\alpha(s)\|_V ds \leq \|u_0\|_V + K_3\Big(t + \alpha\int_0^t \|u^\alpha(s)\|_V ds\Big).$$
Применяя лемму Гронуолла ([7], с. 191), из последнего неравенства будем иметь
$$\|u^\alpha(t)\|_V \leq (\|u_0\|_V + K_3\,t)\exp(\alpha\,K_3\,t)$$
для любого $t \in [0,T]$, откуда
$$\|u^\alpha\|_C \leq (\|u_0\|_V + K_3 T)\exp(\alpha\,K_3\,T) \leq K.$$
Используя полученное неравенство, так же, как в [5], можно показать, что выполняется более сильное неравенство
$$\|u^\alpha\|_{C^1} \leq K.$$

Ограниченность последовательности $u^\alpha$ установлена. Из нее вытекает существование подпоследовательности (с сохранением обозначения $u^\alpha$), слабо сходящейся в $W_2^1(0,T;V)$ при $\alpha \to 0$.

Предположим, что существует такое $k > 0$, что для некоторой подпоследовательности индексов $\alpha$ выполняется соотношение
$$\mathrm{mes}\{x \in \Omega : |e^\alpha(x)| > \delta\} \geq k.$$
Тогда $\int\limits_\Omega \varphi_\alpha(e^\alpha)dx \to +\infty$ при $\alpha \to 0$, а значит,
$$J_\alpha(t,u^\alpha,v^\alpha,q^\alpha) \to +\infty \quad \text{при} \quad \alpha \to 0.$$
Это противоречит тому, что $(v^\alpha,q^\alpha)$ является решением задачи
$$\inf_{(v,q)\in M} J_\alpha(t,u^\alpha,v,q),$$
поскольку для $(0,0) \in M$ имеем $0 = J_\alpha(t,u^\alpha,0,0) \geq J_\alpha(t,u^\alpha,v^\alpha,q^\alpha)$. Таким образом, *для рассматриваемой слабо сходящейся последовательности $u^\alpha$ справедливо соотношение*
$$\mathrm{mes}\{x \in \Omega : |e^\alpha(x)| > \delta\} \to 0$$
при $\alpha \to 0$, причем $2e^\alpha(x) = \nabla v^\alpha(x) + \nabla^T v^\alpha(x)$.

Этот вывод показывает, что $u^\alpha$ — "разумное" приближение упругой задачи. Именно, последовательность $u^\alpha \in C^1$ такова, что в тех точках, где тензор скоростей деформации по норме $E$ не превосходит $\delta$, функция $u^\alpha$ в обобщенном смысле удовлетворяет уравнениям ФК, начальным и граничным условиям, а реологическое соотношение выполняется с наперед заданной точностью (регулируемой параметром $\alpha$). Мера множества точек, в которых точность выполнения реологического соотношения неизвестна, сходится к нулю при $\alpha \to 0$.

## Литература


1. Bear J., Corapcioglu M.Y. (Eds.) *Fundamentals of transport phenomena in porous media.* (NATO ASI Ser.) – Martinus Nijhoff Publishers, 1984. – 1003 p.
2. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. *Механика насыщенных пористых сред.* – М.: Недра, 1970. – 320 с.
3. Егоров А.Г., Костерин А.В., Скворцов Э.В. *Консолидация и акустические волны в насыщенных пористых средах.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1990. – 104 с.
4. Васильев Ф.П. *Методы решения экстремальных задач. Задачи минимизации в функциональных пространствах, регуляризация, аппроксимация.* Учеб. пособие. – М.: Наука, 1981. – 400 с.
5. Дроботенко М.И., Костерин А.В. *Обобщенное решение задачи фильтрационной консолидации* // Докл. РАН. – 1996. – Т. 350. – № 5. – С. 619–621.
6. Темам Р. *Уравнение Навье-Стокса.* – М.: Мир, 1981. – 408 с.
7. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.* – М.: Мир, 1978. – 336 с.



*Казанский государственный университет*



*Поступила* 04.10.1996