Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2012, №2, с. 43–56 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421200123\0018*

А.А. ДУЮНОВА

ТРИ-ТКАНИ $W(1, n, 1)$ И АССОЦИИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Рассматривается три-ткань, образованная на гладком многообразии двумя n-параметрическими семействами кривых и однопараметрическим семейством гиперповерхностей. Для таких тканей определено семейство адаптированных реперов, найдена система структурных уравнений, исследованы дифференциально-геометрические объекты, возникающие в дифференциальной окрестности до третьего порядка. Показано, что всякая система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) однозначно определяет некоторую три-ткань. Это позволяет описывать свойства ОДУ в терминах соответствующей три-ткани. В частности, найдено условие автономности системы ОДУ.

Ключевые слова: многомерная три-ткань, система обыкновенных дифференциальных уравнений, аффинная связность.

УДК: 514.763

Abstract. We consider a three-web formed by two n-parameter families of curves and an one-parameter family of hypersurfaces on a smooth manifold. For such webs we define a family of adapted frames, formulate a system of structural equations, and study differential-geometric objects that arise in differential neighborhoods up to the third order. We prove that each system of ordinary differential equations (SODE) uniquely defines some three-web. This allows us to describe properties of SODE in terms of the corresponding three-web. In particular, we characterize autonomous SODE.

Keywords: multidimensional three-web, system of ordinary differential equations, affine connection.

Классическую геометрию три-тканей, образованных слоениями одинаковых размерностей, начал развивать в своих работах В. Бляшке в двадцатых годах прошлого века. Современная теория тканей создавалась М.А. Акивисом, его учениками и коллегами, начиная с 60-х годов. Основные результаты этой теории содержатся в монографиях [1], [2].

Теорией тканей, образованных слоями разных размерностей, занимались М.А. Акивис [1]–[4], В.В. Гольдберг [1], [2], [5], ученики А.М. Васильева: Н.Х. Азизова, Ю.А. Апресян, Нгуен Зоан Туан, Г.А. Толстихина ([4], гл. 9).

В данной статье рассматривается три-ткань $W(1, n, 1)$, образованная двумя семействами кривых и одним семейством гиперповерхностей. Найдены структурные уравнения такой ткани, их первое и второе дифференциальные продолжения, структурные тензоры ткани, а также условия, при которых на ткани $W(1, n, 1)$ возникает аффинная связность. Показано,

Поступила 10.02.2011

что с системой ОДУ первого порядка $\dot{x} = f(x,t)$ связана три-ткань $W(1,n,1)$. Компоненты тензоров ткани вычислены через функции, определяющие эту систему. Показано, что к системе естественным образом присоединяется аффинная связность, которая названа канонической. В терминах ткани найдено условие автономности системы ОДУ.

1. Пусть M — гладкое многообразие размерности $n+1$. Рассмотрим на нем три-ткань $W(1,n,1)$, заданную двумя семействами кривых λ_1, λ_3 и одним семейством гиперповерхностей λ_2. Обозначим через $T_p(M)$ касательное пространство к многообразию M в точке p, а $T_p(\mathcal{F}_\alpha)$, $\alpha = 1,2,3$, — касательные пространства к слоям $\mathcal{F}_\alpha$ ткани W в этой точке. Рассмотрим в точке p многообразие реперов e_a, $a,b,\ldots = 1,2,\ldots,n+1$, первые n векторов которых лежат в $T_p(\mathcal{F}_2)$, вектор e_{n+1} — в $T_p(\mathcal{F}_1)$, а вектор $e_n - e_{n+1}$ — в $T_p(\mathcal{F}_3)$. Пусть ω^a — двойственный корепер, т. е.

$$\omega^a(e_b) = \delta^a_b,$$

где δ^a_b — символ Кронекера. Тогда для любого вектора ξ из T_p имеем

$$\xi = \omega^a(\xi)\, e_a, \tag{1}$$

а значит, семейства λ_1 и λ_2 этой ткани задаются следующими уравнениями Пфаффа:

$$\lambda_1 : \omega^i = 0; \quad \lambda_2 : \omega^{n+1} = 0 \quad (i,j,\ldots = 1,2,\ldots,n)\,. \tag{2}$$

Чтобы записать уравнения третьего семейства, в $T_p(\mathcal{F}_3)$ рассмотрим произвольный вектор

$$\xi = \omega(\xi)\,(e_n - e_{n+1})\,. \tag{3}$$

Сравнивая равенства (1) и (3), находим уравнения третьего семейства ткани

$$\lambda_3 : \omega^u = 0, \quad \omega^n + \omega^{n+1} = 0 \quad (u,v,\ldots = 1,2,\ldots,n-1)\,. \tag{4}$$

Заметим, что базис кольца дифференциальных форм на M образуют как формы ω^u, ω^n, ω^{n+1}, так и формы ω^u, ω^n (или ω^{n+1}), $\omega^n + \omega^{n+1}$. При этом базисные формы определены с точностью до преобразований

$$\begin{gathered} \widetilde{\omega}^u = a^u_v \omega^v, \quad \widetilde{\omega}^n = a^n_v \omega^v + a\omega^n, \quad \widetilde{\omega}^{n+1} = a\omega^{n+1}, \\ \det(a^u_v) \neq 0, \quad a \neq 0, \end{gathered} \tag{5}$$

сохраняющих вид уравнений (2) и (4). Базисные векторы e_u, e_n, e_{n+1} преобразуются также согласованно

$$\widetilde{e}_u = a^v_u e_v + a^n_u e_n, \quad \widetilde{e}_n = a e_n, \quad \widetilde{e}_{n+1} = a e_{n+1}.$$

Таким образом, группа допустимых преобразований репера e_a пространства $T_p(M)$ состоит из матриц вида

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^2_1 & \ldots & a^{n-1}_1 & a^n_1 & 0 \\ a^1_2 & a^2_2 & \ldots & a^{n-1}_2 & a^n_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^1_{n-1} & a^2_{n-1} & \ldots & a^{n-1}_{n-1} & a^n_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Эти преобразования образуют группу Ли G — подгруппу полной линейной группы $\mathbf{GL}(n+1,\mathbb{R})$, т. е. с тканью $W(1,n,1)$ связана G-структура [6]. Видно, что при $a=1$ эта группа имеет подгруппу, которая порождает свою G-структуру, обозначим ее $\overline{G}$.

Системы форм, определяющие слоения ткани, должны быть вполне интегрируемыми. Согласно теореме Фробениуса условия полной интегрируемости слоений λ_1 и λ_2 (см. (2)) имеют вид

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \quad d\omega^{n+1} = \omega^{n+1} \wedge \omega^{n+1}_{n+1}, \tag{6}$$

где ω^i_j, ω^{n+1}_{n+1} — дифференциальные формы, содержащие дифференциалы параметров, определяющих положение репера e_u, e_n, e_{n+1}. Разобьем уравнения (6) на три части:

$$\begin{aligned} d\omega^u &= \omega^v \wedge \omega^u_v + \omega^n \wedge \omega^u_n, \\ d\omega^n &= \omega^u \wedge \omega^n_u + \omega^n \wedge \omega^n_n, \\ d\omega^{n+1} &= \omega^{n+1} \wedge \omega^{n+1}_{n+1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Из (7) для форм ω^u и $\omega^n + \omega^{n+1}$, задающих третье семейство ткани, имеем

$$\begin{aligned} d\omega^u &= \omega^v \wedge \omega^u_v + (\omega^n + \omega^{n+1}) \wedge \omega^u_n - \omega^{n+1} \wedge \omega^u_n, \\ d(\omega^n + \omega^{n+1}) &= \omega^u \wedge \omega^n_u + (\omega^n + \omega^{n+1}) \wedge \omega^n_n + \omega^{n+1} \wedge (\omega^{n+1}_{n+1} - \omega^n_n). \end{aligned} \tag{8}$$

Так как система форм ω^u, $\omega^n + \omega^{n+1}$, определяющая кривые третьего семейства, должна быть вполне интегрируемой, то согласно теореме Фробениуса из (8) получим

$$\omega^{n+1} \wedge \omega^u_n = 0, \quad \omega^{n+1} \wedge (\omega^{n+1}_{n+1} - \omega^n_n) = 0.$$

Отсюда следуют равенства

$$\omega^u_n = \mu^u \omega^{n+1}, \quad \omega^{n+1}_{n+1} - \omega^n_n = \mu \omega^{n+1}. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (7), получим первую серию структурных уравнений рассматриваемой ткани W

$$\begin{aligned} d\omega^u &= \omega^v \wedge \omega^u_v + \mu^u \omega^n \wedge \omega^{n+1}, \\ d\omega^n &= \omega^u \wedge \omega^n_u + \omega^n \wedge \omega^n_n, \\ d\omega^{n+1} &= \omega^{n+1} \wedge \omega^n_n. \end{aligned} \tag{10}$$

2. Найдем дифференциальное продолжение уравнений (10). Дифференцируя внешним образом первое уравнение, с учетом этого же уравнения получим

$$(d\mu^u + \mu^v \omega^u_v - 2\mu^u \omega^n_n) \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} - (d\omega^u_v - \omega^w_v \wedge \omega^u_w - \mu^u \omega^n_v \wedge \omega^{n+1}) \wedge \omega^v = 0.$$

Обозначим

$$\nabla \mu^u = d\mu^u + \mu^v \omega^u_v - 2\mu^u \omega^n_n, \tag{11}$$

$$\Omega^u_v = d\omega^u_v - \omega^w_v \wedge \omega^u_w, \tag{12}$$

тогда предыдущее уравнение примет вид

$$(\Omega^u_v - \mu^u \omega^n_v \wedge \omega^{n+1}) \wedge \omega^v - \nabla \mu^u \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} = 0. \tag{13}$$

Дифференцируя второе уравнение системы (10) и обозначая

$$\Omega^n_u = d\omega^n_u - \omega^v_u \wedge \omega^n_v - \omega^n_u \wedge \omega^n_n, \tag{14}$$

придем к уравнению

$$\Omega^n_u \wedge \omega^u + (d\omega^n_n - \mu^u \omega^{n+1} \wedge \omega^n_u) \wedge \omega^n = 0. \tag{15}$$

Дифференцирование третьего уравнения (10) дает

$$d\omega^n_n \wedge \omega^{n+1} = 0. \tag{16}$$

Отсюда по обобщенной лемме Картана имеем

$$d\omega_n^n = \theta \wedge \omega^{n+1}, \tag{17}$$

где θ — некоторая 1-форма. Подставив (17) в уравнение (15), получим

$$\Omega_u^n \wedge \omega^u - (\theta + \mu^u \omega_u^n) \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} = 0. \tag{18}$$

Запишем формы

$$\begin{gathered}\theta + \mu^u \omega_u^n = t_u \omega^u + t_n \omega^n + t_{n+1} \omega^{n+1} + \vartheta, \\ \Omega_u^n = h_{uvw}^n \omega^v \wedge \omega^w + h_{uvn}^n \omega^v \wedge \omega^n + h_{uv\,n+1}^n \omega^v \wedge \omega^{n+1} + \\ + h_{un\,n+1}^n \omega^n \wedge \omega^{n+1} + \vartheta_{uv}^n \wedge \omega^v + \vartheta_{un}^n \wedge \omega^n + \vartheta_{u\,n+1}^n \wedge \omega^{n+1} + \vartheta_u^n,\end{gathered} \tag{19}$$

где ϑ, ϑ_{uv}^n, ϑ_{un}^n и $\vartheta_{u\,n+1}^n$ — некоторые 1-формы, не зависящие от базисных форм ω^u, ω^n и ω^{n+1}, а ϑ_u^n — некоторая 2-форма, не содержащая базисных форм и форм ϑ_{uv}^n, ϑ_{un}^n и $\vartheta_{u\,n+1}^n$. Подставляя (19) в уравнение (18), получим

$$\begin{gathered}(h_{un\,n+1}^n - t_u) \omega^u \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} + h_{[uvw]}^n \omega^v \wedge \omega^w \wedge \omega^u + h_{[uv]n}^n \omega^v \wedge \omega^n \wedge \omega^u + h_{[uv]\,n+1}^n \omega^v \wedge \omega^{n+1} \wedge \omega^u + \\ + \vartheta_{[uv]}^n \wedge \omega^v \wedge \omega^u + \vartheta_{un}^n \wedge \omega^n \wedge \omega^u + \vartheta_{u\,n+1}^n \wedge \omega^{n+1} \wedge \omega^u + \vartheta_u^n \wedge \omega^u - \vartheta \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} = 0.\end{gathered}$$

Так как все слагаемые, входящие в это тождество, линейно независимы между собой, то каждое из них должно быть равно нулю в отдельности, что дает

$$\begin{gathered}h_{un\,n+1}^n - t_u = 0, \quad \vartheta_{un}^n = 0, \quad \vartheta_{u\,n+1}^n = 0, \quad \vartheta_u^n = 0, \quad \vartheta = 0, \\ \vartheta_{[uv]}^n = 0, \quad h_{[uv]n}^n = h_{[uv]\,n+1}^n = h_{[uvw]}^n = 0.\end{gathered} \tag{20}$$

В результате уравнения (19) примут вид

$$\begin{gathered}\theta + \mu^u \omega_u^n = t_u \omega^u + t_n \omega^n + t_{n+1} \omega^{n+1}, \\ \Omega_u^n = h_{uvw}^n \omega^v \wedge \omega^w + h_{uvn}^n \omega^v \wedge \omega^n + h_{uv\,n+1}^n \omega^v \wedge \omega^{n+1} + t_u \omega^n \wedge \omega^{n+1} + \vartheta_{uv}^n \wedge \omega^v,\end{gathered} \tag{21}$$

причем входящие сюда величины удовлетворяют условиям (20). В силу первого уравнения (21) уравнение (17) примет вид

$$d\omega_n^n = t_u \omega^u \wedge \omega^{n+1} + \mu^u \omega^{n+1} \wedge \omega_u^n + t_n \omega^n \wedge \omega^{n+1}. \tag{22}$$

Обозначим

$$\omega_{uv}^n = \vartheta_{uv}^n - h_{uvw}^n \omega^w - h_{uvn}^n \omega^n - h_{uv\,n+1}^n \omega^{n+1},$$

тогда второе уравнение (21) примет вид

$$\Omega_u^n = t_u \omega^n \wedge \omega^{n+1} + \omega_{uv}^n \wedge \omega^v, \tag{23}$$

при этом в силу соотношений (20) будут выполняться условия

$$\omega_{uv}^n = \omega_{vu}^n. \tag{24}$$

Разрешим уравнение (13). Запишем формы

$$\begin{gathered}\nabla \mu^u = k_v^u \omega^v + k_n^u \omega^n + k_{n+1}^u \omega^{n+1} + \vartheta^u, \\ \Omega_v^u - \mu^u \omega_v^n \wedge \omega^{n+1} = r_{vws}^u \omega^w \wedge \omega^s + r_{vwn}^u \omega^w \wedge \omega^n + r_{vw\,n+1}^u \omega^w \wedge \omega^{n+1} + \\ + r_{vn\,n+1}^u \omega^n \wedge \omega^{n+1} + \vartheta_{vw}^u \wedge \omega^w + \vartheta_{vn}^u \wedge \omega^n + \vartheta_{v\,n+1}^u \wedge \omega^{n+1} + \vartheta_v^u,\end{gathered} \tag{25}$$

причем, как и выше, формы ϑ^u, ϑ_{vw}^u, ϑ_{vn}^u и $\vartheta_{v\,n+1}^u$ не содержат базисных форм ω^u, ω^n и ω^{n+1}, а формы ϑ_v^u не содержат базисных форм и форм ϑ_{vw}^u, ϑ_{vn}^u и $\vartheta_{v\,n+1}^u$. Внося эти разложения в уравнения (13), получим

$$r^u_{[vws]}\omega^w\wedge\omega^s\wedge\omega^v+r^u_{[vw]n}\omega^w\wedge\omega^n\wedge\omega^v+r^u_{[vw]\,n+1}\omega^w\wedge\omega^{n+1}\wedge\omega^v+r^u_{vn\,n+1}\omega^n\wedge\omega^{n+1}\wedge\omega^v+$$
$$+\vartheta^u_{[vw]}\wedge\omega^w\wedge\omega^v+\vartheta^u_{vn}\wedge\omega^n\wedge\omega^v+\vartheta^u_{v\,n+1}\wedge\omega^{n+1}\wedge\omega^v+\vartheta^u_v\wedge\omega^v-$$
$$-k^u_v\omega^v\wedge\omega^n\wedge\omega^{n+1}-\vartheta^u\wedge\omega^n\wedge\omega^{n+1}=0.$$

Поскольку все слагаемые, входящие в это тождество, линейно независимы между собой, то каждое из них должно быть равно нулю:

$$r^u_{vn\,n+1}-k^u_v=0,\quad \vartheta^u_{vn}=0,\quad \vartheta^u_{v\,n+1}=0,\quad \vartheta^u_v=0,\quad \vartheta^u=0,$$
$$\vartheta^u_{[vw]}=0,\quad r^u_{[vw]n}=r^u_{[vw]\,n+1}=r^u_{[vws]}=0. \tag{26}$$

В результате уравнения (25) примут вид

$$\begin{aligned}\nabla\mu^u&=k^u_v\omega^v+k^u_n\omega^n+k^u_{n+1}\omega^{n+1},\\ \Omega^u_v&=\mu^u\omega^n_v\wedge\omega^{n+1}+k^u_v\omega^n\wedge\omega^{n+1}+\omega^u_{vw}\wedge\omega^w,\end{aligned} \tag{27}$$

где

$$\omega^u_{vw}=\vartheta^u_{vw}-r^u_{vws}\omega^s-r^u_{vwn}\omega^n-r^u_{vw\,n+1}\omega^{n+1},$$

причем в силу (26) справедливы равенства

$$\omega^u_{vw}=\omega^u_{wv}. \tag{28}$$

Итак, первое дифференциальное продолжение структурных уравнений (10) имеет вид (22), (23), (27) или

$$\begin{aligned}d\omega^u_v&=\omega^w_v\wedge\omega^u_w+\mu^u\omega^n_v\wedge\omega^{n+1}+k^u_v\omega^n\wedge\omega^{n+1}-\omega^w\wedge\omega^u_{vw},\\ d\omega^n_u&=\omega^v_u\wedge\omega^n_v+\omega^n_u\wedge\omega^n_n+t_u\omega^n\wedge\omega^{n+1}-\omega^v\wedge\omega^n_{uv},\\ d\omega^n_n&=\mu^u\omega^{n+1}\wedge\omega^n_u+t_u\omega^u\wedge\omega^{n+1}+t_n\omega^n\wedge\omega^{n+1}\end{aligned} \tag{29}$$

и

$$d\mu^u=-\mu^v\omega^u_v+2\mu^u\omega^n_n+k^u_v\omega^v+k^u_n\omega^n+k^u_{n+1}\omega^{n+1}, \tag{30}$$

причем формы ω^n_{uv} и ω^u_{vw} симметричны по нижним индексам.

3. Формы ω^a, ω^a_b $(a,b,\ldots=1,2,\ldots,n+1)$, входящие в структурные уравнения, зависят от главных параметров — локальных координат на многообразии M и от вторичных параметров, определяющих положение репера e_a в касательном пространстве. Зафиксируем главные параметры, определяющие положение точки p на M, положив $\omega^a=0$. Получим формы $\pi^a_b=\omega^a_b|_{\omega_c=0}$, определяющие инфинитезимальное перемещение репера в пространстве T_p,

$$\delta e_a=\pi^b_a e_b,$$

где символ δ означает дифференцирование по вторичным параметрам. Тогда из уравнений (29) и (30) получим

$$\begin{aligned}\delta\pi^u_v&=\pi^w_v\wedge\pi^u_w,\\ \delta\pi^n_u&=\pi^v_u\wedge\pi^n_v+\pi^n_u\wedge\pi^n_n,\\ \delta\pi^n_n&=0,\\ \delta\mu^u&+\mu^v\pi^u_v-2\mu^u\pi^n_n=0.\end{aligned}$$

Первые три уравнения являются уравнениями Маурера–Картана группы G допустимых преобразований репера в точке p многообразия M. Последнее уравнение этой системы показывает, что величины μ^u образуют относительный тензор.

Предложение. *При допустимой замене форм по формулам* (5) *величины* μ^u *преобразуются по тензорному закону*

$$\widetilde{\mu}^u = a^{-2} a^u_v \mu^v.$$

Доказательство. Продифференцировав равенства (5) внешним образом и воспользовавшись структурными уравнениями (10), придем к равенствам

$$(da^u_v + a^w_v \widetilde{\omega}^u_w - a^u_w \omega^w_v) \wedge \omega^v - \widetilde{\mu}^u a a^n_v \omega^v \wedge \omega^{n+1} + (\mu^v a^u_v - \widetilde{\mu}^u a^2) \omega^n \wedge \omega^{n+1} = 0,$$
$$(da^n_u + a^v_u \widetilde{\omega}^n_v + a^n_u \widetilde{\omega}^n_n - a^n_v \omega^v_u - a\omega^n_u) \wedge \omega^u + \big(da - a(\omega^n_n - \widetilde{\omega}^n_n)\big) \wedge \omega^n + \mu^u a^n_u \omega^n \wedge \omega^{n+1} = 0,$$
$$da \wedge \omega^{n+1} + a\omega^{n+1} \wedge (\omega^n_n - \widetilde{\omega}^n_n) = 0.$$

Из последнего равенства по лемме Картана имеем

$$da - a(\omega^n_n - \widetilde{\omega}^n_n) = \lambda \omega^{n+1}.$$

В результате первые два уравнения примут вид

$$(da^u_v + a^w_v \widetilde{\omega}^u_w - a^u_w \omega^w_v) \wedge \omega^v - \widetilde{\mu}^u a a^n_v \omega^v \wedge \omega^{n+1} + (\mu^v a^u_v - \widetilde{\mu}^u a^2) \omega^n \wedge \omega^{n+1} = 0,$$
$$(da^n_u + a^v_u \widetilde{\omega}^n_v + a^n_u \widetilde{\omega}^n_n - a^n_v \omega^v_u - a\omega^n_u) \wedge \omega^u + (\mu^u a^n_u - \lambda) \omega^n \wedge \omega^{n+1} = 0.$$

Запишем формы, стоящие в скобках,

$$da^u_v + a^w_v \widetilde{\omega}^u_w - a^u_w \omega^w_v = a^u_{vw} \omega^w + a^u_{vn} \omega^n + a^u_{v\,n+1} \omega^{n+1},$$
$$da^n_u + a^v_u \widetilde{\omega}^n_v + a^n_u \widetilde{\omega}^n_n - a^n_v \omega^v_u - a\omega^n_u = a^n_{uv} \omega^v + a^n_{un} \omega^n + a^n_{u\,n+1} \omega^{n+1}.$$

Подставив эти разложения в предыдущие уравнения, получим

$$a^u_{vw} \omega^w \wedge \omega^v + a^u_{vn} \omega^n \wedge \omega^v - (a^u_{v\,n+1} + \widetilde{\mu}^u a a^n_v) \omega^v \wedge \omega^{n+1} + (\mu^v a^u_v - \widetilde{\mu}^u a^2) \omega^n \wedge \omega^{n+1} = 0,$$
$$a^n_{uv} \omega^v \wedge \omega^u + a^n_{un} \omega^n \wedge \omega^u + a^n_{u\,n+1} \omega^{n+1} \wedge \omega^u + (\mu^u a^n_u - \lambda) \omega^n \wedge \omega^{n+1} = 0.$$

Так как все слагаемые, входящие в эти тождества, линейно независимы между собой, то каждое из них должно быть равно нулю:

$$a^u_{[vw]} = 0, \quad a^u_{vn} = 0, \quad a^u_{v\,n+1} + \widetilde{\mu}^u a a^n_v = 0, \quad \mu^v a^u_v - \widetilde{\mu}^u a^2 = 0,$$
$$a^n_{[uv]} = 0, \quad a^n_{un} = 0, \quad a^n_{u\,n+1} = 0, \quad \mu^u a^n_u - \lambda = 0.$$

Отсюда получаем требуемое равенство. □

При $a = 1$ величины μ^u образуют "чистый" тензор на $\overline{G}$-структуре. В соответствии с [2] тензор μ^u назовем *первым структурным тензором* G-структуры, определяемой тканью $W(1, n, 1)$, или первым структурным тензором этой три-ткани.

4. Известно (например, [6]), что если на многообразии M задана аффинная связность, то формы Пфаффа θ^a, θ^a_b, $a, b, \ldots = 1, 2, \ldots, n+1$, определяющие эту связность, удовлетворяют уравнениям

$$d\theta^a = \theta^b \wedge \theta^a_b + R^a_{bc}\, \theta^b \wedge \theta^c,$$
$$d\theta^a_b = \theta^c_b \wedge \theta^a_c + R^a_{bcd}\, \theta^c \wedge \theta^d,$$

где R^a_{bc}, R^a_{bcd} — соответственно тензоры кручения и кривизны этой связности, а квадратичные формы $\Omega^a = R^a_{bc}\, \theta^b \wedge \theta^c$ и $\Omega^a_b = R^a_{bcd}\, \theta^c \wedge \theta^d$ — формы кручения и кривизны этой связности. Как видно из уравнений (10) и (29), они не являются структурными уравнениями аффинной связности. Однако, если в этих уравнениях обозначить

$$\theta^a = (\omega^u, \omega^n, \omega^{n+1}), \quad \theta^a_b = \begin{pmatrix} \theta^u_v & \theta^u_n & \theta^u_{n+1} \\ \theta^n_u & \theta^n_n & \theta^n_{n+1} \\ \theta^{n+1}_u & \theta^{n+1}_n & \theta^{n+1}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^u_v & \mu^u\omega^{n+1} & 0 \\ \omega^n_u & \omega^n_n & 0 \\ 0 & 0 & \omega^n_n \end{pmatrix},$$

то получается

Теорема 1. *Уравнения* (10) *и* (29) *на многообразии* M *определяют аффинную связность без кручения в том и только том случае, если формы* ω^n_u, ω^n_{uv} *и* ω^u_{vw} *являются главными, т. е. выражаются через базисные формы* ω^u, ω^n *и* ω^{n+1}.

Доказательство. Действительно, к выбору таких обозначений приводит вид уравнений (10). Следовательно, формы связности, введенные таким образом, должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned}
d\theta^u_v &= \theta^w_v \wedge \theta^u_w + \theta^n_v \wedge \theta^u_n + \theta^{n+1}_v \wedge \theta^u_{n+1} + R^u_{vws}\,\theta^w \wedge \theta^s + 2R^u_{vwn}\,\theta^w \wedge \theta^n + \\
&\quad + 2R^u_{vw\,n+1}\,\theta^w \wedge \theta^{n+1} + 2R^u_{vn\,n+1}\,\theta^n \wedge \theta^{n+1}, \\
d\theta^u_n &= \theta^v_n \wedge \theta^u_v + \theta^n_n \wedge \theta^u_n + \theta^{n+1}_n \wedge \theta^u_{n+1} + R^u_{nvw}\,\theta^v \wedge \theta^w + 2R^u_{nvn}\,\theta^v \wedge \theta^n + \\
&\quad + 2R^u_{nv\,n+1}\,\theta^v \wedge \theta^{n+1} + 2R^u_{nn\,n+1}\,\theta^n \wedge \theta^{n+1}, \\
d\theta^n_u &= \theta^v_u \wedge \theta^n_v + \theta^n_u \wedge \theta^n_n + \theta^{n+1}_u \wedge \theta^n_{n+1} + R^n_{uvw}\,\theta^v \wedge \theta^w + 2R^n_{uvn}\,\theta^v \wedge \theta^n + \\
&\quad + 2R^n_{uv\,n+1}\,\theta^v \wedge \theta^{n+1} + 2R^n_{un\,n+1}\,\theta^n \wedge \theta^{n+1}, \\
d\theta^n_n &= \theta^u_n \wedge \theta^n_u + \theta^{n+1}_n \wedge \theta^n_{n+1} + R^n_{nuv}\,\theta^u \wedge \theta^v + 2R^n_{nun}\,\theta^u \wedge \theta^n + \\
&\quad + 2R^n_{nu\,n+1}\,\theta^u \wedge \theta^{n+1} + 2R^n_{nn\,n+1}\,\theta^n \wedge \theta^{n+1}, \\
d\theta^{n+1}_{n+1} &= \theta^u_{n+1} \wedge \theta^{n+1}_u + \theta^n_{n+1} \wedge \theta^{n+1}_n + R^{n+1}_{n+1\,uv}\,\theta^u \wedge \theta^v + 2R^{n+1}_{n+1\,un}\,\theta^u \wedge \theta^n + \\
&\quad + 2R^{n+1}_{n+1\,u\,n+1}\,\theta^u \wedge \theta^{n+1} + 2R^{n+1}_{n+1\,n\,n+1}\,\theta^n \wedge \theta^{n+1}.
\end{aligned}$$

Выполнение первого, третьего и четвертого уравнений вытекает непосредственно из (29). Проверим второе уравнение:

$$\begin{aligned}
d\theta^u_n = d(\mu^u\omega^{n+1}) &= (-\mu^v\omega^u_v + 2\mu^u\omega^n_n + k^u_v\omega^v + k^u_n\omega^n + k^u_{n+1}\omega^{n+1}) \wedge \omega^{n+1} + \mu^u\omega^{n+1} \wedge \omega^n_n = \\
&= -\mu^v\omega^u_v \wedge \omega^{n+1} + \mu^u\omega^n_n \wedge \omega^{n+1} + k^u_v\omega^v \wedge \omega^{n+1} + k^u_n\omega^n \wedge \omega^{n+1}.
\end{aligned}$$

Сравнивая полученный результат со вторым уравнением системы, получим, что второе уравнение удовлетворяется. И наконец, если формы ω^n_u раскладываются по базисным формам, выполняется и последнее уравнение системы. □

5. Найдем дифференциальное продолжение уравнений (29), (30). Дифференцируя внешним образом первое уравнение (29) и обозначая

$$\nabla k^u_v = dk^u_v + k^w_v\omega^u_w - k^u_w\omega^w_v - k^u_n\omega^n_v - 2k^u_v\omega^n_n, \tag{31}$$

$$\Omega^u_{vw} = d\omega^u_{vw} + \omega^u_s \wedge \omega^s_{vw} - \omega^s_v \wedge \omega^u_{sw} - \omega^s_w \wedge \omega^u_{vs} - \mu^u\omega^n_{vw} \wedge \omega^{n+1}, \tag{32}$$

с учетом уравнений (10), (29), (30) получим

$$(\nabla k^u_v - \mu^w\omega^u_{vw}) \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} + (\Omega^u_{vw} + k^u_w\omega^n_v \wedge \omega^{n+1} + k^u_v\omega^n_w \wedge \omega^{n+1}) \wedge \omega^w = 0. \tag{33}$$

Дифференцируя внешним образом второе уравнение (29), с учетом тех же уравнений (10) и (29) имеем

$$(\nabla t_u + k^v_u\omega^n_v - \mu^v\omega^n_{uv}) \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} + (\Omega^n_{uv} + t_v\omega^n_u \wedge \omega^{n+1} + t_u\omega^n_v \wedge \omega^{n+1}) \wedge \omega^v = 0, \tag{34}$$

где

$$\nabla t_u = dt_u - t_v\omega_u^v - t_u\omega_n^n - t_n\omega_u^n, \qquad (35)$$

$$\Omega_{uv}^n = d\omega_{uv}^n - \omega_{uv}^w \wedge \omega_w^n - \omega_u^w \wedge \omega_{wv}^n - \omega_{uv}^n \wedge \omega_n^n + \omega_{uw}^n \wedge \omega_v^w. \qquad (36)$$

Дифференцируя третье уравнение (29) и обозначая

$$\nabla t_n = dt_n - 2t_n\omega_n^n, \qquad (37)$$

придем к уравнению

$$(\nabla t_u + k_u^v\omega_v^n - \mu^v\omega_{vu}^n) \wedge \omega^u \wedge \omega^{n+1} + (\nabla t_n + k_n^u\omega_u^n) \wedge \omega^n \wedge \omega^{n+1} = 0. \qquad (38)$$

Дифференцируя внешним образом уравнение (30), с учетом (10), (29) и (30) имеем

$$(\nabla k_v^u - \mu^w\omega_{wv}^u) \wedge \omega^v + \nabla k_n^u \wedge \omega^n + (\nabla k_{n+1}^u - 3\mu^u\mu^v\omega_v^n + 2\mu^u t_v\omega^v + 2\mu^u t_n\omega^n) \wedge \omega^{n+1} = 0, \quad (39)$$

где

$$\nabla k_n^u = dk_n^u + k_n^v\omega_v^u - 3k_n^u\omega_n^n, \qquad (40)$$

$$\nabla k_{n+1}^u = dk_{n+1}^u + k_{n+1}^v\omega_v^u - 3k_{n+1}^u\omega_n^n. \qquad (41)$$

Разрешив уравнения (33), (34), (38) и (39), получим дифференциальное продолжение второй серии структурных уравнений (29), (30):

$$\begin{aligned}
&d\omega_{vw}^u + \omega_s^u \wedge \omega_{vw}^s - \omega_v^s \wedge \omega_{sw}^u - \omega_w^s \wedge \omega_{vs}^u - \mu^u\omega_{vw}^n \wedge \omega^{n+1} = \\
&\quad = -k_w^u\omega_v^n \wedge \omega^{n+1} - k_v^u\omega_w^n \wedge \omega^{n+1} - h_{vw}^u\omega^n \wedge \omega^{n+1} + \omega_{vws}^u \wedge \omega^s, \\
&d\omega_{uv}^n - \omega_{uv}^w \wedge \omega_w^n - \omega_u^w \wedge \omega_{wv}^n - \omega_{uv}^n \wedge \omega_n^n + \omega_{uw}^n \wedge \omega_v^w = \\
&\quad = -t_v\omega_u^n \wedge \omega^{n+1} - t_u\omega_v^n \wedge \omega^{n+1} - m_{uv}\omega^n \wedge \omega^{n+1} + \omega_{uvw}^n \wedge \omega^w, \\
&dt_u - t_v\omega_u^v - t_u\omega_n^n - t_n\omega_u^n + k_u^v\omega_v^n = m_{uv}\omega^v + m_{un}\omega^n + \\
&\quad + m_{u\,n+1}\omega^{n+1} + \mu^v\omega_{vu}^n, \\
&dt_n - 2t_n\omega_n^n + k_n^u\omega_u^n = m_{un}\omega^u + m_{nn}\omega^n + m_{n\,n+1}\omega^{n+1}, \\
&dk_v^u + k_v^w\omega_w^u - k_w^u\omega_v^w - k_n^u\omega_v^n - 2k_v^u\omega_n^n = h_{vw}^u\omega^w + h_{vn}^u\omega^n + \\
&\quad + h_{v\,n+1}^u\omega^{n+1} + \mu^w\omega_{wv}^u, \\
&dk_n^u + k_n^v\omega_v^u - 3k_n^u\omega_n^n = h_{vn}^u\omega^v + h_{nn}^u\omega^n + h_{n\,n+1}^u\omega^{n+1}, \\
&dk_{n+1}^u + k_{n+1}^v\omega_v^u - 3k_{n+1}^u\omega_n^n = 3\mu^u\mu^v\omega_v^n + \\
&\quad + (h_{v\,n+1}^u - 2\mu^u t_v)\omega^v + (h_{n\,n+1}^u - 2\mu^u t_n)\omega^n + h_{n+1\,n+1}^u\omega^{n+1},
\end{aligned} \qquad (42)$$

причем справедливы равенства

$$h_{vw}^u = h_{wv}^u, \quad m_{uv} = m_{vu}, \quad \omega_{uvw}^n = \omega_{uwv}^n, \quad \omega_{vws}^u = \omega_{vsw}^u. \qquad (43)$$

Из (42) видно, что при закрепленной точке $p \in M$

$$\begin{aligned}
\delta t_u &= t_v\pi_u^v + t_u\pi_n^n + t_n\pi_u^n - k_u^v\pi_v^n + \mu^v\pi_{vu}^n, \\
\delta t_n &= 2t_n\pi_n^n - k_n^u\pi_u^n, \\
\delta k_v^u &= -k_v^w\pi_w^u + k_w^u\pi_v^w + k_n^u\pi_v^n + 2k_v^u\pi_n^n + \mu^w\pi_{wv}^u, \\
\delta k_n^u &= -k_n^v\pi_v^u + 3k_n^u\pi_n^n, \\
\delta k_{n+1}^u &= -k_{n+1}^v\pi_v^u + 3k_{n+1}^u\pi_n^n + 3\mu^u\mu^v\pi_v^n,
\end{aligned}$$

где $\pi_b^a = \omega_b^a|_{\omega_c=0}$, $\pi_{bc}^a = \omega_{bc}^a|_{\omega_d=0}$ — формы, определяющие инфинитезимальное перемещение репера в пространстве $T_p(M)$. Эти уравнения означают, что величины $\{k_n^u\}$, $\{t_n, k_n^u\}$,

$\{\mu^u, k^u_{n+1}\}$, $\{\mu^u, k^u_v, k^u_n\}$, $\{\mu^u, t_u, t_n, k^u_v, k^u_n\}$ являются геометрическими объектами, причем $\{k^u_n\}$, $\{t_n, k^u_n\}$ являются относительными тензорами. Последний из них, в соответствии с [2], назовем *вторым структурным тензором* G-структуры, определяемой три-тканью $W(1,n,1)$.

6. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = f^i(t, x^j) \quad (i, j, \ldots = 1, 2, \ldots, n). \tag{44}$$

С этой системой связана три-ткань $W(1,n,1)$, заданная на многообразии переменных x^i, t, состоящая из семейств λ_α:

$$\lambda_1 : x^i = \text{const}, \quad \lambda_2 : t = \text{const}, \quad \lambda_3 : F^i(t, x^j) = c^i = \text{const},$$

причем последнее семейство состоит из интегральных кривых системы уравнений (44).

Исключая из первых $n-1$ уравнений системы (44) dt, получим эквивалентную систему

$$f^n dx^u - f^u dx^n = 0, \quad dx^n - f^n dt = 0,$$

где, как и ранее, $u, v, \ldots = 1, 2, \ldots, n-1$. Обозначим

$$\omega^u = f^n dx^u - f^u dx^n, \quad \omega^n = dx^n / f^n, \quad \omega^{n+1} = -dt. \tag{45}$$

Тогда слоения ткани $W(1,n,1)$ имеют вид $\lambda_1 : dx^i = 0$ или $\omega^i = 0$; $\lambda_2 : dt = 0$ или $\omega^{n+1} = 0$; $\lambda_3 : dF^i(t, x^j) = 0$ или $\omega^u = 0$, $\omega^n + \omega^{n+1} = 0$. Таким образом, уравнения слоений имеют вид (2), (4). Следовательно, структурные уравнения три-ткани W должны иметь вид (10).

Из (45) находим

$$dx^u = (f^n)^{-1}\omega^u + f^u\omega^n, \quad dx^n = f^n\omega^n, \quad dt = -\omega^{n+1}. \tag{46}$$

Так как $d\omega^{n+1} = 0$, то из (10) следует

$$\omega^n_n = \lambda\,\omega^{n+1} = -\lambda\,dt.$$

Дифференцируя внешним образом второе равенство (45), имеем

$$d\omega^n = d\left(\frac{dx^n}{f^n}\right) = \frac{-df^n \wedge dx^n}{(f^n)^2} = -\frac{1}{(f^n)^2}\left(\frac{\partial f^n}{\partial t}\,dt + \frac{\partial f^n}{\partial x^u}\,dx^u\right) \wedge dx^n$$

или с учетом (46)

$$d\omega^n = \omega^n \wedge \left(\frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\,dt\right) + \omega^u \wedge \left(-\frac{1}{(f^n)^3}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\,dx^n\right).$$

Сравнивая полученное выражение со вторым уравнением (10), находим

$$\omega^n_n = \frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\,dt, \quad \lambda = -\frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}, \tag{47}$$

$$\omega^n_u = -\frac{1}{(f^n)^3}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\,dx^n. \tag{48}$$

Далее, продифференцировав первое равенство (45), получим

$$d\omega^u = df^n \wedge dx^u - df^u \wedge dx^n =$$

$$= \frac{\partial f^n}{\partial t}\,dt \wedge dx^u + \frac{\partial f^n}{\partial x^v}\,dx^v \wedge dx^u + \frac{\partial f^n}{\partial x^n}\,dx^n \wedge dx^u - \frac{\partial f^u}{\partial t}\,dt \wedge dx^n - \frac{\partial f^u}{\partial x^v}\,dx^v \wedge dx^n,$$

или с учетом (46)

$$d\omega^u = \omega^v \wedge \left(\frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\,dx^u - \frac{1}{f^n}\frac{\partial f^u}{\partial x^v}\,dx^n - \left(\frac{f^w}{(f^n)^2}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\,dx^n + \frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\,dt + \frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^n}\,dx^n \right)\delta^u_v \right) - \\ - \left(f^u \frac{\partial f^n}{\partial t} - f^n \frac{\partial f^u}{\partial t} \right)\omega^{n+1} \wedge \omega^n.$$

Отсюда, сравнивая полученное равенство с первым уравнением (10), находим

$$\mu^u = f^u \frac{\partial f^n}{\partial t} - f^n \frac{\partial f^u}{\partial t}, \tag{49}$$
$$\omega^u_v = \frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\,dx^u - \frac{1}{f^n}\frac{\partial f^u}{\partial x^v}\,dx^n - \frac{1}{f^n}\delta^u_v \left(\frac{f^w}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\,dx^n + \frac{\partial f^n}{\partial t}\,dt + \frac{\partial f^n}{\partial x^n}\,dx^n \right).$$

Теорема 2. *Система обыкновенных дифференциальных уравнений автономна в том и только том случае, если μ^u и ω^n_n равны нулю.*

Доказательство. Пусть система дифференциальных уравнений автономна, т. е. функции f^i в правой части (44) зависят только от x^j. Тогда из (49) следует $\mu^u = 0$, а из (47) вытекает $\omega^n_n = 0$.

Обратно, пусть $\mu^u = 0$ и $\omega^n_n = 0$, тогда из (47) следует $\frac{\partial f^n}{\partial t} = 0$, а из (49) вытекает $\frac{\partial f^u}{\partial t} = 0$. □

Найдем выражения форм и тензоров ткани дифференциальной окрестности через производные функций f^i. Дифференцируя (47), получим

$$d\omega^n_n = -\frac{1}{(f^n)^2}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\,dx^u \wedge dt - \frac{1}{(f^n)^2}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^n}\,dx^n \wedge dt + \frac{1}{f^n}\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^u \partial t}\,dx^u \wedge dt + \frac{1}{f^n}\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n \partial t}\,dx^n \wedge dt,$$

или с учетом (46)

$$d\omega^n_n = \left(\frac{1}{(f^n)^3}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^u} - \frac{1}{(f^n)^2}\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^u \partial t} \right)\omega^u \wedge \omega^{n+1} + \left(f^u \frac{\partial f^n}{\partial t} - f^n \frac{\partial f^u}{\partial t} \right)\frac{1}{(f^n)^3}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\,dx^n \wedge \omega^{n+1} - \\ - \left(\frac{f^u}{f^n}\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^u \partial t} + \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n \partial t} - \frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^n} - \frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^u}{\partial t} \right)\omega^n \wedge \omega^{n+1}.$$

Сравнивая полученное равенство с последним уравнением (29), находим

$$t_u = \frac{1}{(f^n)^3}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^n}{\partial t} - \frac{1}{(f^n)^2}\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^u \partial t},$$
$$t_n = \frac{1}{f^n}\left(\frac{\partial f^n}{\partial x^n}\frac{\partial f^n}{\partial t} + \frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^u}{\partial t} - f^u \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^u \partial t} \right) - \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n \partial t}.$$

Дифференцируя внешним образом (48) и подставляя в получившееся выражение (46), получим

$$d\omega^n_u = \frac{3}{(f^n)^4}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^n}{\partial t}\,dt \wedge dx^n + \frac{3}{(f^n)^5}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\,\omega^v \wedge dx^n - \\ - \frac{1}{(f^n)^3}\frac{\partial^2 f^n}{\partial t \partial x^u}\,dt \wedge dx^n - \frac{1}{(f^n)^4}\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v \partial x^u}\,\omega^v \wedge dx^n.$$

Поскольку

$$\omega^v_u \wedge \omega^n_v = -\frac{1}{(f^n)^5}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\,\omega^v \wedge dx^n + \frac{1}{(f^n)^4}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^n}{\partial t}\,dt \wedge dx^n,$$

$$\omega_u^n\wedge\omega_n^n=-\frac{1}{(f^n)^4}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^n}{\partial t}\,dx^n\wedge dt,$$

имеем

$$d\omega_u^n-\omega_u^v\wedge\omega_v^n-\omega_u^n\wedge\omega_n^n=$$
$$=\left(\frac{1}{(f^n)^3}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^n}{\partial t}-\frac{1}{(f^n)^2}\frac{\partial^2 f^n}{\partial t\partial x^u}\right)\omega^n\wedge\omega^{n+1}+\frac{4}{(f^n)^5}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\,\omega^v\wedge dx^n-\frac{1}{(f^n)^4}\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v\partial x^u}\,\omega^v\wedge dx^n.$$

Отсюда, сравнивая полученный результат со вторым уравнения (29) и учитывая найденные выше выражения коэффициентов t_u, находим

$$\omega_{uv}^n=\frac{1}{(f^n)^4}\left(\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v\partial x^u}-\frac{4}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\right)dx^n. \tag{50}$$

Далее, дифференцирование (49) дает

$$d\mu^u=\left(\frac{\partial f^u}{\partial x^v}\frac{\partial f^n}{\partial t}+f^u\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v\partial t}-\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\frac{\partial f^u}{\partial t}-f^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial x^v\partial t}\right)dx^v+$$
$$+\left(\frac{\partial f^u}{\partial x^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}+f^u\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n\partial t}-\frac{\partial f^n}{\partial x^n}\frac{\partial f^u}{\partial t}-f^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial x^n\partial t}\right)dx^n+\left(f^u\frac{\partial^2 f^n}{\partial t^2}-f^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial t^2}\right)dt.$$

Так как

$$\mu^v\wedge\omega_v^u=\left(\frac{f^v}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}-\frac{\partial f^v}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\right)dx^u-\left(\frac{f^u}{f^n}\left(\frac{\partial f^n}{\partial t}\right)^2-\frac{\partial f^u}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial t}\right)dt+$$
$$+\left(-\frac{f^v}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^u}{\partial x^v}+\frac{\partial f^v}{\partial t}\frac{\partial f^u}{\partial x^v}-\frac{f^uf^v}{(f^n)^2}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}+\frac{f^v}{f^n}\frac{\partial f^u}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}-\frac{f^u}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^n}+\frac{\partial f^u}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^n}\right)dx^n$$

и

$$\mu^u\omega_n^n=\frac{f^u}{f^n}\left(\frac{\partial f^n}{\partial t}\right)^2dt-\frac{\partial f^u}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial t}\,dt,$$

то с учетом (46) имеем

$$d\mu^u+\mu^v\wedge\omega_v^u-2\mu^u\omega_n^n=\left(f^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial t^2}-f^u\frac{\partial^2 f^n}{\partial t^2}+3\frac{f^u}{f^n}\left(\frac{\partial f^n}{\partial t}\right)^2-3\frac{\partial f^u}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial t}\right)\omega^{n+1}+$$
$$+\frac{1}{f^n}\left(\frac{\partial f^u}{\partial x^v}\frac{\partial f^n}{\partial t}+f^u\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v\partial t}-\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\frac{\partial f^u}{\partial t}-f^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial x^v\partial t}+\frac{f^w}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\,\delta_v^u-\frac{\partial f^w}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\,\delta_v^u\right)\omega^v+$$
$$+\left(f^uf^v\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v\partial t}-f^vf^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial x^v\partial t}+f^n\frac{\partial f^u}{\partial x^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}+f^uf^n\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n\partial t}-\right.$$
$$\left.-(f^n)^2\frac{\partial^2 f^u}{\partial x^n\partial t}+f^n\frac{\partial f^v}{\partial t}\frac{\partial f^u}{\partial x^v}-f^u\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^n}-f^u\frac{\partial f^w}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\right)\omega^n.$$

Сравнивая полученное выражение с уравнением (30), находим

$$k_v^u=\frac{1}{f^n}\left(\frac{\partial f^u}{\partial x^v}\frac{\partial f^n}{\partial t}+f^u\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v\partial t}-\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\frac{\partial f^u}{\partial t}-f^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial x^v\partial t}+\frac{f^w}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\,\delta_v^u-\frac{\partial f^w}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\,\delta_v^u\right),$$
$$k_n^u=f^uf^v\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v\partial t}-f^vf^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial x^v\partial t}+f^uf^n\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n\partial t}-(f^n)^2\frac{\partial^2 f^u}{\partial x^n\partial t}+f^n\frac{\partial f^u}{\partial x^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}+$$
$$+f^n\frac{\partial f^v}{\partial t}\frac{\partial f^u}{\partial x^v}-f^u\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^n}-f^u\frac{\partial f^v}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^v},$$

$$k^u_{n+1} = f^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial t^2} - f^u\frac{\partial^2 f^n}{\partial t^2} + 3\frac{f^u}{f^n}\left(\frac{\partial f^n}{\partial t}\right)^2 - 3\frac{\partial f^u}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial t}.$$

И, наконец, дифференцируя (49), получим

$$d\omega^u_v = -\frac{1}{(f^n)^2}\left(\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^u}{\partial x^v} + 2\frac{f^w}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\delta^u_v - f^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial t\partial x^v} - \frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^w}{\partial t}\delta^u_v - f^w\frac{\partial^2 f^n}{\partial t\partial x^w}\delta^u_v\right)dx^n\wedge dt -$$
$$- \frac{1}{(f^n)^2}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}dx^w\wedge dx^u + \frac{1}{f^n}\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^v}dx^w\wedge dx^u + \frac{1}{(f^n)^2}\left(\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^u}{\partial x^v} + 2\frac{f^s}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^s}\delta^u_v +\right.$$
$$\left. + \frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^n}\delta^u_v - f^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial x^w\partial x^v} - \frac{\partial f^n}{\partial x^s}\frac{\partial f^s}{\partial x^w}\delta^u_v - f^s\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^s}\delta^u_v - f^n\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^n}\delta^u_v\right)dx^w\wedge dx^n +$$
$$+ \frac{1}{f^n}\frac{\partial^2 f^n}{\partial t\partial x^v}dt\wedge dx^u - \frac{1}{(f^n)^2}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\frac{\partial f^n}{\partial t}dt\wedge dx^u + \frac{1}{(f^n)^2}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial t}\delta^u_v dx^w\wedge dt -$$
$$- \frac{1}{f^n}\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial t}\delta^u_v dx^w\wedge dt + \frac{1}{f^n}\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n\partial x^v}dx^n\wedge dx^u - \frac{1}{(f^n)^2}\frac{\partial f^n}{\partial x^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}dx^n\wedge dx^u.$$

Пользуясь тем, что

$$\omega^w_v\wedge\omega^u_w = \frac{1}{(f^n)^2}\left(\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}dx^w\wedge dx^u - \frac{\partial f^u}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}dx^w\wedge dx^n + \frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^w}{\partial x^v}dx^u\wedge dx^n\right)$$

и

$$\mu^u\omega^n_v\wedge\omega^{n+1} = \frac{f^u}{(f^n)^3}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}dx^n\wedge dt - \frac{1}{(f^n)^2}\frac{\partial f^u}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}dx^n\wedge dt,$$

с учетом (46) имеем

$$d\omega^u_v - \omega^w_v\wedge\omega^u_w - \mu^u\omega^n_v\wedge\omega^{n+1} = \frac{1}{(f^n)^3}\left(-\frac{2}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^v} + \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^v}\right)\omega^w\wedge\omega^u +$$
$$+\frac{1}{f^n}\left(\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^u}{\partial x^v} + \frac{f^w}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\delta^u_v - f^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial t\partial x^v} - \frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^w}{\partial t}\delta^u_v - \frac{\partial f^u}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^v} + f^u\frac{\partial^2 f^n}{\partial t\partial x^v}\right)\omega^n\wedge\omega^{n+1} +$$
$$+ \frac{1}{(f^n)^3}\left(\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^u}{\partial x^v} + 2\frac{f^s}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^s}\delta^u_v + \frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^n}\delta^u_v - f^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial x^w\partial x^v} - \frac{\partial f^n}{\partial x^s}\frac{\partial f^s}{\partial x^w}\delta^u_v -\right.$$
$$\left. - f^s\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^s}\delta^u_v - f^n\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^n}\delta^u_v + \frac{\partial f^u}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^v} - 2\frac{f^u}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^v} + f^u\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^v}\right)\omega^w\wedge dx^n +$$
$$+ \frac{1}{(f^n)^3}\left(-2\frac{f^w}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^v} + f^w\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^v} - \frac{\partial f^n}{\partial x^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^v} + f^n\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n\partial x^v} + \frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^w}{\partial x^v}\right)dx^n\wedge\omega^u +$$
$$+ \frac{1}{(f^n)^2}\left(\frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\frac{\partial f^n}{\partial t} - \frac{\partial^2 f^n}{\partial t\partial x^v}\right)\omega^u\wedge dt + \frac{1}{(f^n)^2}\left(\frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial t}\delta^u_v - \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial t}\delta^u_v\right)\omega^w\wedge dt.$$

Сравнивая полученный результат с первым уравнением (29), учитывая найденные ранее выражения для коэффициентов k^u_v, находим

$$\omega^u_{vw} = \frac{1}{(f^n)^3}\left(\frac{2}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^v} - \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^v}\right)\omega^u +$$
$$+ \frac{1}{(f^n)^2}\left(-\frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\frac{\partial f^n}{\partial t}\delta^u_w - \frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial t}\delta^u_v + \frac{\partial^2 f^n}{\partial t\partial x^v}\delta^u_w + \frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial t}\delta^u_v\right)dt +$$
$$+ \frac{1}{(f^n)^3}\left(- \frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^u}{\partial x^v} - \frac{\partial f^u}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^v} - 2\frac{f^s}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^s}\delta^u_v - 2\frac{f^s}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^s}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\delta^u_w - \frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^n}\delta^u_v -\right.$$

$$
-\frac{\partial f^n}{\partial x^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\,\delta^u_w+\frac{\partial f^n}{\partial x^s}\frac{\partial f^s}{\partial x^w}\,\delta^u_v+\frac{\partial f^n}{\partial x^s}\frac{\partial f^s}{\partial x^v}\,\delta^u_w+f^s\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^s}\,\delta^u_v+f^s\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^s\partial x^v}\,\delta^u_w+f^n\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^n}\,\delta^u_v+
$$

$$
+f^n\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n\partial x^v}\,\delta^u_w+2\frac{f^u}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}-f^u\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^v}+f^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial x^w\partial x^v}\Bigg)dx^n. \quad (51)
$$

Формулы (48), (50) и (51) показывают, что формы ω^n_u, ω^n_{uv} и ω^u_{vw} выражаются через базисные формы ω^u, ω^n и ω^{n+1}. Это означает, что к системе дифференциальных уравнений $dx^i = f^i(t,x^j)\,dt$ естественным образом присоединена аффинная связность без кручения. Назовем ее *канонической связностью* этой системы.

Ненулевые компоненты тензора кривизны канонической связности находим из предыдущих соотношений:

$$
R^u_{vws}=-\frac{1}{2(f^n)^3}\left(\frac{2}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}-\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^v}\right)\delta^u_s+\frac{1}{2(f^n)^3}\left(\frac{2}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^s}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}-\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^s\partial x^v}\right)\delta^u_w,
$$

$$
R^u_{vwn}=-\frac{1}{2(f^n)^2}\Bigg(-\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^u}{\partial x^v}-\frac{\partial f^u}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}-2\frac{f^s}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^s}\,\delta^u_v-2\frac{f^s}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^s}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\,\delta^u_w-\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^n}\,\delta^u_v-
$$

$$
-\frac{\partial f^n}{\partial x^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\,\delta^u_w+\frac{\partial f^n}{\partial x^s}\frac{\partial f^s}{\partial x^w}\,\delta^u_v+\frac{\partial f^n}{\partial x^s}\frac{\partial f^s}{\partial x^v}\,\delta^u_w+f^s\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^s}\,\delta^u_v+f^s\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^s\partial x^v}\,\delta^u_w+f^n\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^n}\,\delta^u_v+
$$

$$
+f^n\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n\partial x^v}\,\delta^u_w+2\frac{f^u}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}-f^u\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial x^v}+f^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial x^w\partial x^v}\Bigg),
$$

$$
R^u_{vw\,n+1}=\frac{1}{2(f^n)^2}\left(-\frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\frac{\partial f^n}{\partial t}\,\delta^u_w-\frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\frac{\partial f^n}{\partial t}\,\delta^u_v+\frac{\partial^2 f^n}{\partial t\partial x^v}\,\delta^u_w+\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^w\partial t}\,\delta^u_v\right),
$$

$$
R^u_{vn\,n+1}=R^u_{nv\,n+1}=\frac{1}{2}k^u_v=\frac{1}{2f^n}\Bigg(\frac{\partial f^u}{\partial x^v}\frac{\partial f^n}{\partial t}+f^u\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v\partial t}-\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\frac{\partial f^u}{\partial t}-
$$

$$
-f^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial x^v\partial t}+\frac{f^w}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\,\delta^u_v-\frac{\partial f^w}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^w}\,\delta^u_v\Bigg),
$$

$$
R^u_{nn\,n+1}=\frac{1}{2}\,k^u_n=\frac{1}{2}\Bigg(f^uf^v\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v\partial t}-f^vf^n\frac{\partial^2 f^u}{\partial x^v\partial t}+f^uf^n\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n\partial t}-(f^n)^2\frac{\partial^2 f^u}{\partial x^n\partial t}+
$$

$$
+f^n\frac{\partial f^u}{\partial x^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}+f^n\frac{\partial f^v}{\partial t}\frac{\partial f^u}{\partial x^v}-f^u\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^n}-f^u\frac{\partial f^v}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\Bigg), \quad (52)
$$

$$
R^n_{uvn}=-\frac{1}{2(f^n)^3}\left(\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^v\partial x^u}-\frac{4}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^n}{\partial x^v}\right),
$$

$$
R^n_{un\,n+1}=R^n_{nu\,n+1}=R^{n+1}_{n+1\,u\,n+1}=\frac{1}{2}\,t_u=\frac{1}{2(f^n)^2}\left(\frac{1}{f^n}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}-\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^u\partial t}\right),
$$

$$
R^n_{nn\,n+1}=\frac{1}{2}\,t_n=\frac{1}{2f^n}\left(\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^n}+\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\frac{\partial f^u}{\partial t}-f^u\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^u\partial t}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n\partial t},
$$

$$
R^{n+1}_{n+1\,n\,n+1}=\frac{1}{2}\left(t_n+\mu^u\frac{1}{(f^n)^2}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}\right)=\frac{1}{2f^n}\left(\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^n}-f^u\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^u\partial t}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f^n}{\partial x^n\partial t}+\frac{f^u}{2(f^n)^2}\frac{\partial f^n}{\partial t}\frac{\partial f^n}{\partial x^u}.
$$

Вернемся к автономным системам. Следующее утверждение проясняет геометрический смысл условий, найденных в теореме 1.

Теорема 3. *Условие $\mu^u = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы многообразие M ткани $W(1, n, 1)$ расслаивалось на двумерные подмногообразия, несущие слои первого и третьего слоений этой ткани. Поверхности V являются многообразиями абсолютного параллелизма тогда и только тогда, когда выполняется еще и условие $\omega_n^n = 0$.*

Доказательство. Как видно из первого уравнения системы (10), условие $\mu^u = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы система уравнений $\omega^u = 0$ была вполне интегрируемой. Отсюда следует первая часть теоремы.

Согласно теореме 2 условия автономности системы имеют вид $\mu^u = 0$ и $\omega_n^n = 0$. Первые равенства, как только что было показано, означают, что $\omega^u = 0$ вполне интегрируема и многообразие ткани расслаивается на двумерные поверхности V. Далее, из уравнений (52) следует, что у тензора кривизны ненулевыми являются только компоненты R^u_{vws}, R^u_{vwn}, R^n_{uvn}. Поэтому на поверхностях V, определяемых уравнениями $\omega^u = 0$, форма кривизны канонической связности обращается в нуль, т. е. эти поверхности являются поверхностями абсолютного параллелизма относительно этой связности.

Обратно, пусть V — поверхности абсолютного параллелизма относительно канонической связности. Тогда формы кривизны этой связности должны обращаться на поверхности V в нуль. Это требование дает равенство нулю компонент R^u_{vws}, R^u_{vwn}, R^n_{uvn}, откуда $\omega_n^n = 0$. $\square$

Литература

[1] Акивис М.А., Гольдберг В.В. *О многомерных три-тканях, образованных поверхностями разных размерностей*, ДАН СССР **203** (2), 263–266 (1972).

[2] Акивис М.А., Гольдберг В.В. *О многомерных три-тканях, образованных поверхностями разных размерностей*, Тр. геометр. сем. (ВИНИТИ, М., 1973), № 4, 179–204.

[3] Akivis M.A., Shelekhov A.M. *Geometry and algebra of multidimensional three-webs* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht–Boston–London, 1992).

[4] Акивис М.А., Шелехов А.М. *Многомерные три-ткани и их приложения* (Тверь, Твер. гос. ун-т., 2010).

[5] Гольдберг В.В. *Трансверсально-геодезические, шестиугольные и групповые три-ткани, образованные поверхностями разных размерностей*, Сб. статей по дифференц. геометрии, Калинин, Калининский гос. ун-т, 52–64 (1974).

[6] Кириченко В.Ф. *Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях* (Моск. педагогич. гос. ун-т., М., 2003).

А.А. Дуюнова

аспирант, кафедра геометрии,
Московский педагогический государственный университет,
ул. М. Пироговская, д. 1, г. Москва, 119991, Россия,

e-mail: Duyunova_anna@mail.ru

A.A. Duyunova

Postgraduate, Chair of Geometry,
Moscow Pedagogical State University,
1 M. Pirogovskaya str., Moscow, 119991 Russia,

e-mail: Duyunova_anna@mail.ru