КАЗАНСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени В. И. УЛЬЯНОВА-ЛЕНИНА

Том 124, кн. 2 *Ученые записки* 1964

Р. Г. БУХАРАЕВ

НЕКОТОРЫЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ АВТОМАТОВ

Целью настоящей работы является исследование некоторых свойств вероятностных автоматов. Необходимость такого исследования едва ли нуждается в обосновании. Изучению ненадежных автоматов, главным образом, в аспекте повышения их надежности, посвящено очень много работ. В частности, для дискретных автоматов проблемы повышения надежности рассматривались Фон-Нейманом [1], Муром и Шенноном [2], О. Лоуэншуссом [3], Кованом [5], Лофгреном [4], Пирсом [6] и др. авторами. В нашу задачу входит наметить систематический путь изучения вероятностных автоматов как самостоятельных объектов. Мы отказываемся при этом смотреть на возможные сбои, как на помеху, а будем искать пути использования случайных помех по существу. Такой взгляд на вещи, по-видимому, не является слишком далеким от реальности. В самом деле, если мы склонны расценивать некоторые процессы, происходящие в высшей нервной системе человека как индетерминированные, при вполне детерминированной структуре нервной сети (на уровне некоторой конечной модели), то индетерминированность не может быть получена иначе, как за счет „сбоев" актов преобразования информации. В то же время очевидно, что шумы, используемые в технике положительным образом, также могут трактоваться, как полученные в результате флюктуационных „сбоев" в множестве энергетических и управляющих элементов. С другой стороны, весьма интересной и важной задачей до настоящего времени остается проблема выяснения возможностей вероятностных автоматов. Работы, посвященные этой проблеме (например, [7]), не могут считаться исчерпывающими ее. Вообще, абстрактно-теоретическим вопросам, связанным с исследованием вероятностных автоматов, пока уделяется недостаточно внимания [1]. Наиболее значительной является работа [8], в которой дается общее математическое определение управляющей системы, включающее в себя понятие вероятностного автомата. Можно указать еще на работы Шрейдера [9] и Бусленко Н. П. имеющие также отношение к рассматриваемой проблеме. Однако в них дается лишь определение некоторых объектов, исследование которых остается впереди.

Сложность понятия управляющей системы [8] и понятия агрегата затрудняет аналитическое изучение этих объектов. В то

[1] Уже после сдачи работы в печать автор познакомился с интересной работой М. О. Рэбина „Вероятностные автоматы" (Inf. and Control, 6, 1963). В ней, в частности, доказано, что класс событий, представимых в вероятностных автоматах, шире класса регулярных событий.

же время, абстрактная теория вероятностных автоматов допускает стройное развитие. В этой работе мы интересуемся только одним вопросом — именно проблемой эквивалентности вероятностных автоматов на уровне счетных автоматов. Однако легко видеть, что математический аппарат теории позволяет ставить и решать эти же задачи на уровне произвольных вероятностных автоматов, а также продолжать развитие теории.

Обобщение понятия детерминированного автомата до понятия вероятностного автомата производится естественным образом, если рассматривать условное распределение вероятностей $\mu(y/x)$ как обобщение функциональной зависимости, то есть отображения множества X, $x \in X$ на множество Y, $y \in Y$. Введение условной вероятностной меры является с этой точки зрения естественным следствием отказа от однозначности отображения $X \to Y$. Последовательное проведение этой идеи применительно к известным определениям детерминированных автоматов Мили [11], Мура [10] или Медведева [12] приводит нас к определениям соответствующих вероятностных автоматов, обобщению понятий гомоморфизма, эквивалентности автоматов и позволяет получить обобщение многих теорем, имеющих место для детерминированных автоматов. Однако, желая подчеркнуть глубокие связи теории вероятностных автоматов с теорией каналов связи с памятью, мы вначале даем более общее определение вероятностного автомата, чем это можно получить, непосредственно обобщая, например, понятие автомата Мили. Последние определения получаются из вводимого как частные случаи.

Определение 1. *Пусть множества U и V можно взаимно однозначно отобразить соответственно на множества U' и V', которые представимы в виде декартовых произведений множеств*

$$U' = \mathfrak{A} \times X, \quad V' = \mathfrak{A} \times Y, \tag{1}$$

где $\mathfrak{A}$, X, и Y — некоторые произвольные множества и $\mathfrak{A}$ содержит более одного элемента. Обозначим через $f_{\mathfrak{A}}$, f_X и $f_{\mathfrak{A},Y}$ некоторые борелевские поля подмножеств множеств $\mathfrak{A}$, X и $\mathfrak{A} \times Y$ соответственно. Пусть

$$\mu(\Delta/\Delta_1\Delta_2)$$

условная вероятностная мера, определенная на поле $f_{\mathfrak{A},Y}$ для любых множеств Δ_1, Δ_2, где $\Delta_1 \in f_{\mathfrak{A}}$, $\Delta_2 \in f_X$. Канал связи $\{U, V, f_U, f_V, \mu(\Delta/\Delta_1\Delta_2)\}$ будем называть автоматным каналом связи. Объект

$$\{\mathfrak{A}, X, Y; f_{\mathfrak{A}}, f_X, f_{\mathfrak{A},Y}, \mu(\Delta/\Delta_1\Delta_2)\} \tag{2}$$

будем называть вероятностным автоматом.

Будем говорить, что канал связи является тривиально автоматным, соответственно, вероятностный автомат является тривиальным вероятностным автоматом, если множество $\mathfrak{A}$ содержит только один элемент. Ясно, что тривиально автоматным является любой канал связи. Для того, чтобы канал связи был нетривиально автоматным, необходимо и достаточно, чтобы существовало представление вида (1), где $\mathfrak{A}$ содержит более одного элемента и при этом для f_U выполнялось условие

$$f_U = f_{\mathfrak{A}} \times f_X.$$

Следуя В. М. Глушкову [13], будем называть вероятностный автомат инициальным, если с вероятностью 1 фиксирован начальный элемент $a_0 \in \mathfrak{A}$. Тогда естественно считать вероятностный автомат неинициальным, если задана невырожденная мера $\mu(A)$, определенная на $f_{\mathfrak{A}}$.

В дальнейшем, как уже отмечалось, мы будем считать множества $\mathfrak{A}$, X, Y счетными. Это позволит нам, пользуясь счетной аддитивностью вероятностной меры, рассматривать меру множества как сумму мер составляющих его элементов, что удобно при получении доказательств, хотя, по-видимому, несущественно с точки зрения возможности обобщения результата. Кроме того, мы полагаем, что поля $f_{\mathfrak{A}}$, f_X и $f_{\mathfrak{A}, Y}$ суть поля всех подмножеств соответствующих множеств, опять-таки в силу необходимости оперировать с отдельными элементами. При таких предположениях мы будем определять вероятностный автомат как систему

$$A\{\mathfrak{A}, X, Y, \mu(a), \mu(a', y/a, x)\}, \tag{3}$$

где $\mu(a)$ определено на $\mathfrak{A}$, $\mu(a', y/a, x)$ определено на $\mathfrak{A} \times Y$ для каждой пары (a, x), $a \in \mathfrak{A}$, $x \in X$.

Следующее определение, которое мы введем, можно рассматривать как обобщение понятия отображения свободной полугруппы на свободную полугруппу.

Определение 2. *Пусть X и Y — некоторые (счетные) множества и обозначим через $\omega(X)$ и $\omega(Y)$ свободные полугруппы с алфавитом X и Y соответственно. Положим, что условная вероятностная мера*

$$\mu(q/p)$$

определена для любых слов $p \in \omega(X)$ и $q \in \omega(Y)$. Объект

$$I\{X, Y, \omega(X), \omega(Y), \mu(q/p)\} \tag{4}$$

будем называть расширенным каналом связи.

С вероятностным автоматом естественным образом связан расширенный канал связи, определение которого следует ниже. Длину слова p будем обозначать $|p|$.

Определение 3. Пусть (3) — вероятностный автомат. Положим

$$\mu_A(a_1 \ldots a_n y_1 \ldots y_n/a_0, x_1 \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mu(a_i y_i/a_{i-1}, x_i), \quad n = 1, 2 \ldots \tag{5}$$

и, далее,

$$\mu_A(y_1 \ldots y_n/x_1 \ldots x_n) = \sum_{a_0 a_1 \ldots a_n} \mu(a_0) \cdot \mu_A(a_1 \ldots a_n y_1 \ldots y_n/a_0, x_1 \ldots x_n). \tag{6}$$

Расширенный канал связи (4), определенный условной мерой $\mu(q/p)$, где

$$\mu(q/p) = \begin{cases} 0, \text{ если } |q| \neq |p| \\ \mu_A(y_1 \ldots y_n/x_1 \ldots x_n), \text{ где } \begin{array}{l} q = y_1 \ldots y_n \\ p = x_1 \ldots x_n \end{array} \end{cases} \tag{7}$$

будем называть расширенным каналом связи I_A, индуцируемым данным вероятностным автоматом A. Если мера $\mu(a)$ не сосредоточена в одной точке, то будем говорить, что расширенный канал связи I_A представлен в неинициальном автомате A. Если мера сосредоточена на фиксированном элементе a_0, то будем говорить, что канал I_A представлен в инициальном автомате A начальным состоянием a_0.

Определение 4. Пусть $\{x_n y_n\}$ — вероятностная последовательность пар (счетно-значных) случайных величин x_n, y_n, где $x_n \in X$, $y_n \in Y$. Будем говорить, что вероятностная последовательность представлена в инициальном автомате A начальным состоянием a_0 (представлена в неинициальном автомате), если мера конечной подпоследовательности вероятностной последовательности $\mu(x_1, x_2, .. x_n y_1 .. y_n)$ при любом n удовлетворяет условию

$$(8) \qquad \frac{\mu(x_1 .. x_n y_1 .. y_n)}{\sum\limits_{y_1 .. y_n} \mu(x_1 .. x_n y_1 .. y_n)} = \mu(y_1 .. y_n / x_1 .. x_n) =$$

$$= \mu_A(y_1 .. y_n / a_0, x_1 .. x_n) \{ = \mu_A(y_1 .. y_n / x_1 .. x_n) \},$$

если правая и левая части равенства определены.

Если вероятностная последовательность пар $\{x_n y_n\}$ представлена в вероятностном автомате A, то будем говорить, что (входная) вероятностная последовательность $\{x_n\}$ переводится автоматом A в (выходную) вероятностную последовательность $\{y_n\}$.

Наряду с последовательностью пар $\{x_n y_n\}$ нам придется рассматривать вероятностную последовательность пар $\{x_n a_n\}$, которая, аналогично условиям (8) и (6), удовлетворяет соотношениям:

$$(9) \qquad \frac{\mu(x_1 .. x_n a_1 .. a_n)}{\sum\limits_{a_1 .. a_n} \mu(x_1 .. x_n a_1 .. a_n)} = \mu(a_1 .. a_n / x_1 .. x_n) = \mu_A(a_1 .. a_n / x_1 .. x_n) =$$

$$= \sum_{a_0 y_1 y_n} \mu(a_0) \cdot \mu_A(a_1 .. a_n y_1 .. y_n / a_0, x_1 .. x_n),$$

если левая и правая части равенства определены.

Естественно называть вероятностную последовательность $\{a_n\}$ последовательностью состояний автомата A.

Каждый вероятностный автомат A совместно со входной вероятностной последовательностью $\{x_n\}$ индуцирует некоторую вероятностную последовательность пар $\{x_n y_n\}$. Действительно, знание меры конечных последовательностей $\mu(x_1 x_2 .. x_n)$ и условной меры

$$\mu_A(y_1 .. y_n / x_1 x_2 .. x_n)$$

для каждого значения n позволяет нам выписать последовательность мер конечных последовательностей вида:

$$(10) \qquad \mu_A(x_1 .. x_n y_1 .. y_n) = \mu_A(y_1 .. y_n / x_1 .. x_n) \cdot \mu(x_1 .. x_n), \quad n = 1,2...$$

Покажем, что в случае, если последовательность мер (10) получена вышеописанным способом, она определяет меру на множестве всех последовательностей $\{x_n y_n\}$. Действительно, мера может считаться заданной, если дана система мер любых конечных подпоследовательностей этой последовательности, удовлетворяющая условиям совместности:

$$\sum_{\substack{x_{j_1} .. x_{j_q} \\ y_{l_1} .. y_{l_s}}} \mu_A(x_{i_1} .. x_{j_1} .. x_{i_p} .. x_{j_q} .. y_{k_1} .. y_{l_1} .. y_{k_r} .. y_{l_s}) =$$

$$= \mu(x_{i_1} .. x_{i_p} y_{k_1} .. y_{k_r})$$

для любых комбинаций несовпадающих индексов i, j и k, l.

Определим меру подпоследовательности $x_{i_1}..x_{i_p}y_{j_1}..y_{j_q}$ таким образом: пусть $\overline{N}=\max(i_p,\ j_q)$. Тогда положим

$$\mu(x_{i_1}..x_{i_p}y_{j_1}..y_{j_q})=\sum_{\substack{\text{переменные}\\ \text{с индексами, неравными}\\ i_1..i_p\ j_1..j_q}}\mu(x_1..x_Ny_1..y_N),\quad N\geqslant\overline{N}.$$

1. Определенная мера подпоследовательности не зависит, как легко видеть, от выбранного номера N, если $N\geqslant\overline{N}$.

2. Если в данной подпоследовательности выбрана другая подпоследовательность, то из определения меры и из независимости определения меры от номеров N, больших $\overline{N}$, легко следует условие совместности.

3. Мера определяется единственным образом. Из последнего условия следует, что вероятностная последовательность, определенная последовательностью мер конечных подпоследовательностей (10), совпадает с вероятностной последовательностью, представленной в заданном автомате.

Т е о р е м а 1. *Для того, чтобы расширенный канал связи*

$$I\{X,\ Y,\ \omega(X),\ \omega(Y),\ \tau(q/p)\}$$

был представим в вероятностном автомате, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1. $\tau(q/p)=0$, *если* $|p|\neq|q|$.
2. $\tau(q_1q_2/p_1p_2)=0$, *если* $\tau(q_1/p_1)=0,\ |p_1|=|q_1|$.
3. *Отношение* $\frac{\tau(q_1q_2/p_1p_2)}{\tau(q_1/p_1)}=\tau_{p_1q_1}(q_2/p_2)$ *есть условная вероятностная мера при фиксированных* p_1 *и* q_1, *определенная для любых слов* $p_2\in\omega(X)$, $q_2\in\omega(Y)$, *если* $|p_1|=|q_1|$, $|p_2|=|q_2|$ *и* $\tau(q_1/p_1)\neq 0$.

Н е о б х о д и м о с т ь. Выполнение первого условия очевидно из определения 3. Второе нетрудно проверить. Предположим, что

$$\mu_A(y_1..y_m/x_1..x_m)=0.$$

Это означает, что

$$\sum_{a_0a_1..a_m}\mu(a_0)\cdot\mu_A(a_1..a_my_1..y_m/a_0x_1..x_m)=0.$$

Но для любого $n>m$ мы также получим:

$$\mu_A(y_1..y_n/x_1..x_n)=\sum_{a_0..a_n}\mu(a_0)\cdot\mu_A(a_1..a_ny_1..y_n/a_0,x_1..x_n)=$$

$$=\sum_{a_{m+1}..a_n}\Big[\sum_{a_0..a_m}\mu(a_0)\cdot\mu_A(a_1..a_my_1..y_m/a_0x_1..x_m)\Big]\times$$

$$\times\mu_A(a_{m+1}..a_ny_{m+1}..y_n/a_m,\ x_{m+1}..x_n)\equiv 0.$$

Теперь будем считать, что $\mu_A(q_1/p_1)=0$. Тогда из формулы **(5)** следует

$$\mu_A(a_1..a_ny_1..y_n/a_0,\ x_1..x_n)=\mu_A(a_1..a_my_1..y_m/a_0,\ x_1..x_m)\times$$
$$\times\mu_A(a_{m+1}..a_ny_{m+1}..y_n/a_m,\ x_{m+1}..x_n).\tag{11}$$

Следовательно, можно произвести следующие преобразования:

$$\frac{\mu_A(y_1\,..\,y_n/x_1\,..\,x_n)}{\mu_A(y_1\,..\,y_m/x_1\,..\,x_m)} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{a_0\,..\,a_n} \mu(a_0)\cdot\mu_A(a_1\,..\,a_m\,y_1\,..\,y_m/a_0,\,x_1\,..\,x_m)\cdot\mu_A(a_{m+1}\,..\,a_n\,y_{m+1}\,..\,y_n/a_m,\,x_{m+1}\,..\,x_n)}{\mu_A(y_1\,..\,y_m/x_1\,..\,x_m)} =$$

$$= \sum_{a_1\,..\,a_n} \mu_A(a_1\,..\,a_m/x_1\,..\,x_m\,y_1\,..\,y_m)\cdot\mu_A(a_{m+1}\,..\,a_n\,y_{m+1}\,..\,y_n/a_m,\,x_{m+1}\,..\,x_n) =$$

$$= \sum_{a_m}\mu_A(a_m/p_1q_1)\cdot\mu_A(q_2/a_m,\,p_2).$$

Последнее выражение есть вероятностная мера при фиксированных p_1 и q_1.

Достаточность. Пусть условия 1, 2, и 3 выполнены. Тогда построим вероятностный автомат A со входным множеством X и выходным множеством Y следующим образом: по условию, отношение

$$\frac{\tau(q_1q/p_1p)}{\tau(q_1/p_1)} = \tau_{p_1q_1}(q/p),\quad |q_1| = |p_1|,\ |q| = |p|$$

есть вероятностная мера при $\tau(q_1/p_1) \neq 0$. Сопоставим каждой условной мере $\tau_{p_1q_1}(q/p)$ символ $\tau_{p_1q_1}$ и в качестве множества состояний $\mathfrak{A}$ возьмем множество символов $\mathfrak{A} = \{\tau_{p_1q_1}\}\bigcup\tau$. Положим

$$\mu(a'y/a,\ x) = P(a'/a,\ x,\ y)\cdot P(y/a,\ x),$$

где

$$P(a'/a,\ x,\ y) = \begin{cases} 1, & \text{если } a = \tau_{pq} \text{ и } a' = \tau_{px,\,qy} \\ 1, & \text{если } a = \tau \text{ и } a' = \tau_{x,\,y} \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

и

$$P(y/a,\ x) = \begin{cases} \tau_{p,\,q}(y/x), & \text{если } a = \tau_{p,\,q} \\ \tau(y/x), & \text{если } a = \tau. \end{cases}$$

В качестве начального состояния a_0 фиксируем с вероятностью 1 символ τ, соответствующий условной мере $\tau(q/p)$, определяющей расширенный канал связи. Пусть $\tau(y_1\,..\,y_n/x_1\,..\,x_n) \neq 0$. Тогда из условия 2 следует, что $\tau(y_1\,..\,y_m/x_1\,..\,x_m) \neq 0$ при любом $m \leqslant n$ и, следовательно, все отношения

$$\frac{\tau(y_1\,..\,y_n/x_1\,..\,x_n)}{\tau(y_1\,..\,y_m/x_1\,..\,x_m)}$$

определят собой условные меры. Таким образом, справедливы следующие преобразования:

$$\mu_A(y_1\,..\,y_n/a_0,\ x_1\,..\,x_n) = \sum_{a_1\,..\,a_n}\mu(a_1y_1/a_0,x_1)\cdot\ldots\cdot\mu(a_ny_n/a_{n-1},\,x_n) =$$

$$= \sum_{a_1\,..\,a_n} P(a_1/a_0,x_1,y_1)\cdot P(y_1/a_0x_1)\cdot\ldots\cdot P(a_n/a_{n-1},\,x_n,\,y_n)\cdot P(y_n/a_{n-1},\,x_n) =$$

$$= P(y_1/\tau,\,x_1)\cdot P(y_2/\tau_{x_1\,y_1},\,x_2)\cdot\ldots\cdot P(y_n/\tau_{x_1\,..\,x_{n-1},\,y_1\,..\,y_{n-1}},\,x_n) =$$

$$= \tau(y_1/x_1)\cdot\tau_{x_1y_1}(y_2/x_2)\ldots\cdot\tau_{x_1\,..\,x_{n-1},\,y_1\,..\,y_{n-1}}(y_n/x_n) =$$

$$= \tau(y_1/x_1)\cdot\frac{\tau(y_1\,y_2/x_1x_2)}{\tau(y_1/x_1)}\cdot\ldots\cdot\frac{\tau(y_1\,..\,y_n/x_1\,..\,x_n)}{\tau(y_1\,..\,y_{n-1}/x_1\,..\,x_{n-1})} =$$

$$= \tau(y_1\,..\,y_n/x_1\,..\,x_n).$$

Предположим теперь, что $\tau(y_1 .. y_n/x_1 .. x_n) = 0$. Тогда найдется минимальное m такое, что $\tau(y_1 .. y_m/x_1 .. x_n) \neq 0$, но $\tau(y_1 .. y_{m+1}/x_1 .. x_{m+1}) = 0$. Поэтому получим согласно определению $P(y/a_1 x)$:

$$P(y_{m+1}/\tau_{x_1 .. x_m y_1 .. y_m}, x_{m+1}) = \tau_{x_1 .. x_m, y_1 .. y_m}(y_{m+1}/x_{m+1}) =$$
$$= \frac{\tau(y_1 .. y_{m+1}/x_1 .. x_{m+1})}{\tau(y_1 .. y_m/x_1 .. x_m)} = 0,$$

что влечет за собой равенство $\mu_A(y_1 .. y_{m+1}/x_1 .. x_{m+1}) = 0$ и, далее, $\mu_A(y_1 .. y_n/x_1 .. x_n) = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Для того, чтобы вероятностная последовательность пар $\{x_n y_n\}$ была представима в вероятностном автомате, необходимо и достаточно, чтобы мера конечной подпоследовательности вероятностной последовательности $\mu(x_1 .. x_n y_1 .. y_n)$ при любом m и n, $m < n$ для $\mu(y_1 .. y_m/x_1 .. x_m)$ неравных нулю удовлетворяла условию:*

$$\frac{\mu(y_1 .. y_n/x_1 .. x_n)}{\mu(y_1 .. y_m/x_1 .. x_m)} = \mu_{x_1 .. x_m y_1 .. y_m}(y_{m+1} .. y_n/x_{m+1} .. x_n) \tag{12}$$

есть условная вероятностная мера при фиксированных $x_1 .. x_m$ и $y_1 .. y_m$.

Нетрудно видеть, что эта теорема была нами параллельно доказана при доказательстве теоремы 1, так как второе условие теоремы 1, имеющее значение при доказательстве, для вероятностной последовательности пар выполняется всегда. Условие (12) может быть переписано эквивалентным образом. Именно, может быть сформулирована

Теорема 2′. *Для того, чтобы вероятностная последовательность была представима в вероятностном автомате, необходимо и достаточно, чтобы мера конечной подпоследовательности $\mu(x_1 .. x_n y_1 .. y_n)$ удовлетворяла условию: для любых m и n, при $m < n$ и $\mu(y_1 .. y_m/x_1 .. x_m) \neq 0$,*

$$\mu(y_1 .. y_m/x_1 .. x_n) = \mu(y_1 .. y_m/x_1 .. x_m). \tag{13}$$

Действительно, если выполнено (12), то отношение $\frac{\mu(q_1 q/p_1 p)}{\mu(q/p_1)}$ есть вероятностная мера при $\mu(q_1/p_1) \neq 0$, следовательно, $\frac{\mu(q_1/p_1 p)}{\mu(q_1/p_1)} = 1$, откуда $\mu(q_1/p_1 p) = \mu(q_1/p_1)$.

Обратно, если справедливо (13), то отношение $\frac{\mu(q_1 q/p_1 p)}{\mu(q_1/p_1)}$ — неотрицательная, аддитивная функция на множестве $\{q\}$ удовлетворяет требованию $\sum\limits_q \frac{\mu(q_1 q/p_1 p)}{\mu(q_1/p_1)} = \frac{\mu(q_1/p_1 p)}{\mu(q_1/p_1)} = 1$, то есть это вероятностная мера при любых фиксированных p, q_1, что и требуется.

Теорема 3. *Для того, чтобы автоматный расширенный канал связи был представим в тривиальном вероятностном автомате, необходимо и достаточно, чтобы условная мера, определяющая канал, была подчинена условию:*

$$\mu(y_1 .. y_n/x_1 .. x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mu(y_i/x_i), \quad n = 1, 2 ... \tag{14}$$

всюду, где она определена.

Теорема 3′. *Для того, чтобы вероятностная последовательность пар $\{x_n, y_n\}$ была представима в тривиальном вероятностном автомате, необходимо и достаточно, чтобы мера конечной* *подпоследовательности вероятностной последовательности* $\mu(x_1 \dots x_n y_1 \dots y_n)$, $n = 1, 2 \dots$, *удовлетворяла условию* (14).

Пусть $\{x_n y_n\}$ — вероятностная последовательность пар и она представима в вероятностном автомате с единственным состоянием. Следовательно, для любого n будем иметь

$$\mu_A(y_1 \dots y_n/a_0, x_1 \dots x_n) = \sum_{a_1 \dots a_n} \mu(a_1 y_1/a_0, x_1) \dots \mu(a_n y_n/a_{n-1}, x_n) =$$
$$= \mu(ay_1/a, x_1) \cdot \dots \cdot \mu(ay_n/a, x_n).$$

Полагая $\mu(ay/ax) = \bar{\mu}(y/x)$, мы получим условие теоремы. Обратно, пусть имеет место (14). Тогда легко видеть, что отношение

$$\frac{\mu(y_1 \dots y_n/x_1 \dots x_n)}{\mu(y_1 \dots y_m/x_1 \dots x_m)} = \mu(y_{m+1} \dots y_n/x_{m+1} \dots x_n)$$

не зависит от p_1 и q_1, следовательно, автомат, построенный в теореме 1, будет иметь единственное состояние.

Остается интересным вопрос, можно ли все же изучение произвольных расширенных каналов связи сводить к изучению автоматных каналов связи и, следовательно, к изучению вероятностных автоматов? Имеет ли место для вероятностных автоматов ситуация, аналогичная ситуации с детерминированными автоматами?

Покажем, что для произвольного расширенного канала можно взаимно однозначно указать автоматный расширенный канал, ему соответствующий. Способ построения такого канала аналогичен способу, предложенному В. М. Глушковым [13], лишь несколько усложняется доказательство автоматности.

Теорема 4. *Для произвольного расширенного канала связи над алфавитами X и Y можно указать соответствующий ему взаимно-однозначно автоматный расширенный канал связи над алфавитом $X \cup \alpha$ и $Y \cup \beta$, $\alpha \bar{\in} X$ и $\beta \bar{\in} Y$. Существуют алгорифмы, позволяющие по одному из этих каналов строить ему соответствующий.*

В самом деле, пусть $\{X, Y, \mu(q/p)\}$ — расширенный канал связи. Введем в рассмотрение канал, определенный условиями:

1. $$\bar{\mu}(q/\underbrace{\alpha p}_{n}) = \begin{cases} 0, & \text{если } q \neq \overbrace{\beta \dots \beta}^{n} \\ 1, & \text{если } q = \overbrace{\beta \dots \beta}^{n} \end{cases}.$$

2. $\bar{\mu}(q/\underbrace{p_1}_{m}\alpha \underbrace{p_1}_{n}) = \bar{\mu}(q/\underbrace{p_1}_{m}\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{n+1})$, где p_1 не содержит α.

3. $$\bar{\mu}(q/\underbrace{p_1}_{m}\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{n}) = \begin{cases} 0, & \text{если } q \neq \overbrace{\beta \dots \beta}^{m} \cdot \overbrace{q_1}^{n}, \ q_1 \text{ не содержит } \beta. \\ \mu(q_1/p_1), & \text{если } q = \overbrace{\beta \dots \beta}^{m} \cdot \overbrace{q_1}^{n}, \quad n \neq 0 \\ 1, & \text{если } q = \overbrace{\beta \dots \beta}^{m}, \quad n = 0. \end{cases}$$

Можно проверить, что это условная мера, корректно определенная для всех слов p, принадлежащих полугруппе $\omega(X \cup \alpha)$ всюду на полугруппе $\omega(Y \cup \beta)$. Из определения меры явствует, что первое условие автоматности выполняется. Докажем, что отношение

$$\frac{\bar{\mu}(q_1 q/p_1 p)}{\bar{\mu}(q_1/p_1)} = \nu_{q_1 q \, p_1 p}$$

есть условная мера для любых слов $|p_1| = |q_1| = m$, $|p| = |q| = n - m$, $\bar{\mu}(q_1/p_1) \neq 0$.

1. Пусть p_1 имеет вид $\alpha\bar{p}$. Фиксируем p_1 и q_1. Пусть $q_1 = \underbrace{\beta \ldots \beta}_{m}$. Тогда получим

$$\nu_{q_1 q p_1 p} = \begin{cases} 0, & \text{если } q \neq \underbrace{\beta \ldots \beta}_{n-m} \\ 1, & \text{если } q = \underbrace{\beta \ldots \beta}_{n-m}, \end{cases}$$

то есть $\nu_{q_1 q\, p_1 p} = \mu_{q_1 p_1}(q/p)$ условная мера. Если $q_1 \neq \underbrace{\beta \ldots \beta}_{m}$, то $\bar{\mu}(q_1/p_1) = 0$, но тогда мы немедленно получаем, что и $\bar{\mu}(q_1 q/p_1 p) = 0$.

2. Положим, что p_1 имеет вид $\underbrace{\bar{p}}_{s}\underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{n-s}$, где $\bar{p}$ не содержит α. Фиксируем p_1 и q_1. Пусть $m > s$ и $q_1 \neq \underbrace{\beta \ldots \beta}_{s} \cdot \underbrace{\bar{q}}_{m-s}$. Тогда $q_1 q$ не может иметь вида $\underbrace{\beta \ldots \beta}_{s}\underbrace{\bar{q}'}_{n-s}$ и, следовательно, опять мы получаем, что из равенства $\bar{\mu}(q_1/p_1) = 0$ вытекает равенство $\bar{\mu}(q_1 q/p_1 p) = 0$. Если же $q_1 = \underbrace{\beta \ldots \beta}_{s}\underbrace{\bar{q}}_{m-s}$, то получим:

$$\nu_{q_1 q p_1 p} = \begin{cases} 0 & \text{, если } q \text{ содержит } \beta \\ \dfrac{\mu(\bar{q}q/\bar{p})}{\mu(\bar{q}/\bar{p})} & \text{, если } q \text{ не содержит } \beta. \end{cases}$$

Но отношение $\dfrac{\mu(\bar{q}q/\bar{p})}{\mu(\bar{q}/\bar{p})}$ есть условная мера. Наконец, пусть $m \leqslant s$. Тогда, если $q_1 \neq \underbrace{\beta \ldots \beta}_{m}$, то мы вновь приходим к равенству $\bar{\mu}(q_1 q/p_1 p) = 0$. А для $q_1 = \underbrace{\beta \ldots \beta}_{m}$ получим:

$$\nu_{q_1 q p_1 p} = \begin{cases} 0 & \text{, если } q \neq \underbrace{\beta \ldots \beta}_{s-m}\underbrace{\bar{q}}_{n-s}, \text{ где } \bar{q} \text{ не содержит } \beta. \\ \dfrac{\mu(\bar{q}/\bar{p})}{1}, & \text{если } q = \underbrace{\beta \ldots \beta}_{s-m} \cdot \underbrace{\bar{q}}_{n-s}. \end{cases}$$

Мы рассмотрели все возможные случаи, следовательно, первая часть теоремы доказана. Покажем теперь, что расширенный канал, для которого мы построили автоматный расширенный канал, может быть восстановлен при знании условной меры, определяющей его автоматный образ. Действительно, из определения непосредственно следует, что

$$\mu(q/p) = \bar{\mu}(\overbrace{\beta \ldots \beta}^{m}\overbrace{q}^{n}/\underbrace{p}_{m}\underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{n}).$$

Таким образом, система чисел

$$\bar{\mu}(\beta \ldots \beta q/p\,\alpha \ldots \alpha)$$

при предположении, что $|q| = |\alpha \ldots \alpha|$ и $|p| = |\beta \ldots \beta|$, определяет условную меру расширенного канала-прообраза.

Тесная связь, обнаружившаяся между автоматными расширенными каналами связи и автоматными вероятностными последовательностями пар случайных величин, позволяет надеяться, что прием, примененный в теореме 3, можно применить для сопоставления произвольной вероятностной последовательности пар $\{x_n y_n\}$ взаимно-однозначно автоматной вероятностной последовательности. Действительно, имеет место

Теорема 4'. *Для произвольной вероятностной последовательности пар $\{x_n y_n\}$, где $x_n \in X$ и $y_n \in Y$, можно взаимно-однозначно указать автоматную вероятностную последовательность пар $\{\bar{x}_n \bar{y}_n\}$, причем $\bar{x}_n \in X \cup \alpha$ и $\bar{y}_n \in Y \cup \beta$, $\alpha \bar{\in} X$, $\beta \bar{\in} Y$.*

Отметим, прежде всего, что справедлива

Лемма 1. *Для того, чтобы последовательность мер конечных подпоследовательностей*

(15) $$\mu(z_1),\quad \mu(z_1 z_2), \ldots\ \mu(z_1 z_2 \ldots z_n) \ldots \quad z_i \in Z$$

определяла вероятностную последовательность $\{z_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: для любого n

(16) $$\sum_{z_n \in Z} \mu(z_1 z_2 \ldots z_n) = \mu(z_1 z_1 \ldots z_{n-1}),\ n = 1, 2 \ldots$$

Доказательство леммы состоит в проверке условий совместности для меры, определенной так, как это сделано на стр. 48—49.

Перейдем к доказательству теоремы 4. Пусть $\{x_n y_n\}$ — вероятностная последовательность пар с мерой μ. Выделим вероятностную подпоследовательность $\{x_n\}$ и рассмотрим системы условных мер

$$\mu(y_1 \ldots y_n / x_1 \ldots x_n) = \frac{\mu(x_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_n)}{\mu(x_1 \ldots x_n)};\quad n = 1, 2 \ldots$$
$$\mu(x_1 \ldots x_n) \neq 0.$$

Определим систему условных мер $\bar{\mu}(q/p)$, где p и q — произвольные конечные слова в алфавитах $X \cup \alpha$ и $Y \cup \beta$ соответственно. Для определения этой системы мер мы воспользуемся тем же преобразованием, которое применялось на стр. 52 для получения автоматного расширенного канала, с той разницей, что теперь условная мера $\mu(q/p)$, фигурирующая в левой части, в пункте 3, удовлетворяет условию

(17) $$\sum_{y_n \in Y} \mu(y_1 \ldots y_n / p) = \mu(y_1 \ldots y_{n-1} / p),\quad n = 1, 2 \ldots$$

Докажем, что новая система условных мер удовлетворяет условию: $\bar{\mu}(\bar{y}_1 \ldots \bar{y}_{n-1} / \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_n) = \bar{\mu}(\bar{y}_1 \ldots \bar{y}_{n-1} / \bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{n-1})$.

В самом деле, пусть

1) первая буква $\bar{x}_1 = \alpha$ и $(Ei)[(i < n) \& (\bar{y}_i \neq \beta)]$. Тогда

$$\sum_{\bar{y}_n} \bar{\mu}(\bar{y}_1 \ldots \bar{y}_n / \alpha \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n) = 0 = \bar{\mu}(\bar{y}_1 \ldots \bar{y}_{n-1} / \alpha \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{n-1});$$

2) первая буква $\bar{x}_1 = \alpha$ и $(i)[(i < n) \to (\bar{y}_i = \beta)]$. Получим:

$$\sum_{\bar{y}_n} \bar{\mu}(\bar{y}_1 \ldots \bar{y}_n / \alpha \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n) = \bar{\mu}(\overbrace{\beta \ldots \beta}^{n} / \alpha \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_n) = 1 = \bar{\mu}(\bar{y}_1 \ldots \bar{y}_{n-1} / \alpha \bar{x}_2 \ldots \bar{x}_{n-1});$$

3) положим $p = \underbrace{p_1}_{m} \underbrace{\alpha\,..\,\alpha}_{n}$, где p_1 не содержит α. Если $n \geqslant 2$ и $q = \underbrace{\beta\,..\,\beta}_{m} \cdot \underbrace{q_1\, \bar{y}_n}_{n-1}$, где q_1 не содержит β, то

$$\sum_{\bar{y}_{n+m}} \bar{\mu}(\overbrace{\beta\,..\,\beta}^{m}\ \overbrace{\bar{q}_1}^{n-1}\ \bar{y}_{n+m}/\underbrace{p_1}_{m}\ \underbrace{\alpha\,..\,\alpha}_{n}) = \sum_{y_{n+m}} \mu(q_1\, y_{n+m}/p_1) = \mu(q_1/p_1) =$$

$$= \bar{\mu}(\overbrace{\beta\,..\,\beta}^{m} \cdot \overbrace{q_1}^{n-1}/\underbrace{p_1}_{m}\ \underbrace{\alpha\,..\,\alpha}_{n-1})$$

в силу условия (17).

Если $n \geqslant 2$ и $q \neq \overbrace{\beta\,..\,\beta}^{m} \cdot q_1 \bar{y}_{n+m}$, где q_1 не содержит β, то

$$\sum_{\bar{y}_{n+m}} \bar{\mu}(\bar{y}_1\,..\,\bar{y}_{n+m}/\underbrace{p_1}_{m}\ \underbrace{\alpha\,..\,\alpha}_{n}) = 0 = \bar{\mu}(\bar{y}_1\,..\,\bar{y}_{m+n-1}/\underbrace{p_1}_{m}\ \underbrace{\alpha\,..\,\alpha}_{n-1}).$$

Если $n = 1$, то для $q \neq \overbrace{\beta\,..\,\beta}^{m} \cdot \bar{y}_{m+1}$ доказательство не изменится, а при $q = \overbrace{\beta\,..\,\beta}^{m}\ \bar{y}_{m+1}$ получим:

$$\sum_{\bar{y}_{m+1}} \bar{\mu}(\overbrace{\beta\,..\,\beta}^{m}\ \bar{y}_{m+1}/p_1\alpha) = \sum_{y_{m+1}} \bar{\mu}(\overbrace{\beta\,..\,\beta}^{m} y_{m+1}/p_1\alpha) =$$

$$= \sum_{y_{m+1}} \mu(y_{m+1}/p_1) = 1 = \bar{\mu}(\overbrace{\beta\,..\,\beta}^{m}/p_1).$$

Наконец, если $n = 0$, то сразу получаем из определения:

$$\sum_{\bar{y}_m} \bar{\mu}(\bar{y}_1\,..\,\bar{y}_m/x_1\,..\,x_m) = 0 \vee 1 = \mu(\bar{y}_1\,..\,\bar{y}_{m-1}/x_1\,..\,x_{m-1}).$$

Итак, мы доказали, что полученная условная мера удовлетворяет соотношению:

$$\bar{\mu}(\bar{y}_1\,..\,\bar{y}_{n-1}/\bar{x}_1\,..\,\bar{x}_n) = \bar{\mu}(\bar{y}_1\,..\,\bar{y}_{n-1}/\bar{x}_1\,..\,\bar{x}_{n-1}). \tag{18}$$

Легко проверяется, что соотношение (18) является достаточным условием для того, чтобы выполнялось соотношение (16) для системы мер конечных последовательностей $\bar{\mu}(\bar{x}_1\,..\,\bar{x}_n\,\bar{y}_1\,..\,\bar{y}_n)$, определенных как произведения

$$\bar{\mu}(\bar{x}_1\,..\,\bar{x}_n\bar{y}_1\,..\,\bar{y}_n) = \bar{\mu}(\bar{y}_1\,..\,\bar{y}_n/\bar{x}_1\,..\,\bar{x}_n) \cdot \bar{\mu}(\bar{x}_1\,..\,\bar{x}_n),\ n = 1, 2\ldots,$$

где система мер $\bar{\mu}(\bar{x}_1\,..\,\bar{x}_n)$, $n = 1, 2\ldots$, определена произвольной вероятностной последовательностью $\{\bar{x}_n\}$, $\bar{x}_n \in X \cup \alpha$. Тогда, согласно лемме 1, мы можем заключить, что система мер конечных последовательностей $\bar{\mu}(\bar{x}_1\,..\,\bar{x}_n\bar{y}_1\,..\,\bar{y}_n)$, $n = 1, 2\ldots$, определяет вероятностную последовательность пар $\{\bar{x}_n\bar{y}_n\}$, которая ввиду соотношения (18) является автоматной последовательностью. Мы видим, что автоматная вероятностная последовательность определяется, вообще говоря, неоднозначно, хотя, как легко видеть, система условных мер определяется единственным образом и позволяет восстановить систему условных мер прообраза.

Однако имеется возможность одновременно входной вероятностной последовательности $\{x_n\}$, $x_n \in X$ поставить во взаимно-однозначное соответствие входную вероятностную последовательность $\{\overline{x}_n\}$, $\overline{x}_n \in X \cup \alpha$. Тогда мы будем иметь полную взаимную однозначность соответствия: вероятностная последовательность пар $\{x_n y_n\}$ — автоматная вероятностная последовательность пар $\{\overline{x}_n \overline{y}_n\}$. Возможность установления такого соответствия доказывает

Лемма 2. *Пусть $\{x_n\}$ — вероятностная последовательность $x_n \in X$, (X — счетно). Последовательности $\{x_n\}$ можно поставить во взаимно-однозначное соответствие последовательность $\{\overline{x}_n\}$, $\overline{x}_n \in X \cup \alpha$, таким образом, что по мере множества подпоследовательностей первой последовательности можно найти меру множества подпоследовательностей второй последовательности и обратно.*

В самом деле, каждое слово $\overline{p}$, $\overline{p} \in \omega(X \cup \alpha)$ можно представить в виде

$$\overline{p} = \underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{m_1} p_1 \underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{m_2} p_2 \underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{m_3} \ldots \underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{m_s} p_s \underbrace{\alpha \ldots \alpha}_{m_{s+1}}.$$

Положим, что

$$\overline{\mu}(\overline{p}) = \frac{1}{2^n} \sum_{q_1 q_2 \ldots q_{s+1}} \mu(\overbrace{\underbrace{q_1}_{m_1} p_1 \underbrace{q_2}_{m_2} p_2 \ldots \underbrace{q_s}_{m_s} p_s \underbrace{q_{s+1}}_{m_{s+1}}}^{n}).$$

Покажем, что $\overline{\mu}$ определяет вероятностную последовательность. Пусть n фиксировано. Тогда $\overline{\mu}(\ )$ — неотрицательная, аддитивная функция в силу неотрицательности и аддитивности $\mu(\ )$. Далее,

$$\sum_{\overline{x}_n} \overline{\mu}(\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_n) = \overline{\mu}(\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_{n-1} \alpha) + \sum_{x_n \in X} \overline{\mu}(\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_{n-1} x_n) =$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{q_1 \ldots q_{s+1} x_n} \mu(q_1 p_1 q_2 p_2 \ldots q_s p_s q_{s+1} x_n) +$$

$$+ \frac{1}{2^n} \sum_{q_1 \ldots q_{s+1} x_n} \mu(q_1 p_1 q_2 p_2 \ldots q_s p_s q_{s+1} x_n) =$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{q_1 \ldots q_{s+1}} \mu(q_1 p_1 \ldots q_s p_s q_{s+1}) = \overline{\mu}(\overline{x}_1 \ldots \overline{x}_{n-1}).$$

Так как для $n = 1$ мы получаем:

$$\sum_{\overline{x}} \overline{\mu}(\overline{x}) = \overline{\mu}(a) + \sum_{x \in X} \overline{\mu}(x) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{x \in X} \mu(x) + \frac{1}{2} \sum_{x \in X} \mu(x) = 1,$$

то легко следует по индукции, что при любом фиксированном n $\overline{\mu}(\overline{p})$ есть мера. Поскольку эта последовательность мер удовлетворяет условиям леммы 1, то она определяет вероятностную последовательность. Для восстановления меры исходной последовательности мы, очевидно, должны пользоваться соотношением:

$$\mu(p) = 2^n \overline{\mu}(p), \quad \text{если } |p| = n$$

для всех слов p, не содержащих α.

Тот факт, что в вероятностном автомате оказываются представимыми не произвольные вероятностные последовательности пар случайных величин, а только автоматные, не следует смешивать с „представимостью“ в вероятностном автомате пары вероятностных последовательностей — входной $\{x_n\}$ и выходной $\{y_n\}$.

Замечание 1. Для любой пары вероятностных последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ существует вероятностный автомат, для которого при предположении, что последовательность $\{x_n\}$ является входной последовательностью, вероятностная последовательность $\{y_n\}$ будет служить выходной последовательностью.

Действительно, например, одним из решений этой задачи является вероятностный автомат, в котором представима вероятностная последовательность пар $\{x_n y_n\}$, полученная формальным объединением вышеприведенных последовательностей, как независимых вероятностных последовательностей. Очевидно, что эта вероятностная последовательность пар $\{x_n y_n\}$ является автоматной.

В заключение этой части работы мы сформулируем еще условия, связывающие между собой входную и выходную вероятностные последовательности, гарантирующие существование детерминированного автомата, переводящего одну из них в другую. Справедлива

Теорема 5. *Пусть $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ — пара вероятностных последовательностей. Для того, чтобы существовал детерминированный автомат Мили, для которого при условии, что входной последовательностью является вероятностная последовательность $\{x_n\}$, выходной последовательностью является вероятностная последовательность $\{y_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы для любого номера i случайные величины y_i были измеримы относительно системы случайных величин $\{x_1, x_2, .. x_i\}$.*

Необходимость. Если существует автомат Мили

$$A\{\mathfrak{A},\ X,\ Y,\ \delta(a,\ x),\ \lambda(a,\ x)\},$$

для которого справедливо утверждение теоремы, то по определению мы должны иметь для любого i:

$$y_1 y_2 .. y_i = \lambda(a_0,\ x_1 x_2 .. x_i),$$
$$a_1 a_2 .. a_i = \delta(a_0,\ x_1 x_2 .. x_i),$$

где $\lambda(a_0,\ x_1 .. x_i)$ и $\delta(a_0,\ x_1 .. x_i)$ — расширенные функции выхода и переходов автомата A. Положим, что

$$y_i = P_j(y_1 y_2 .. y_i),\quad j \leqslant i,$$

где P_j — функция, принимающая значения j-той координаты своего аргумента. Отсюда ввиду того, что аргументы и функция принимают лишь счетное число значений, получаем, что $P_i(\lambda)$ есть бэровская функция системы переменных $x_1 x_2 .. x_i$, следовательно, измерима относительно совокупности $\{x_1 x_2 .. x_i\}$. Обратно, пусть для каждого i y_i измеримо относительно совокупности случайных величин $\{x_1 x_2 .. x_i\}$. Тогда существует детерминированный оператор L_i [15], такой, что

$$y_i = L_i(x_1 x_2 .. x_i)\quad i = 1, 2...$$

Рассмотрим автомат Мили $A\{\mathfrak{A},\ X,\ Y,\ \delta(a,\ x),\ \lambda(a,\ x)\}$, где множество состояний есть $\mathfrak{A} = \{1,\ (1,\ x_1),\ (1,\ x_1,\ x_2), \dots\}$ для всех $x_i \in X$. Положим

$$\delta(1,\ x) = (1,\ x),$$
$$\delta((1,\ x_1, .. x_{i-1}),\ x_i) = (1,\ x_1 x_2 .. x_i),$$
$$\lambda((1,\ x_1, .. x_{i-1}),\ x_i) = L_i(x_1 x_2 .. x_i).$$

Покажем, что $\lambda(1, x_1x_2..x_i) = y_1y_2..y_i$, $i = 1, 2...$, действительно:

$$\lambda(1, x_1) = L_1(x_1) = y_1, \ \delta(1, x_1) = (1, x_1),$$

$$\lambda((1, x_1), x_2) = L_2(x_1x_2) = y_2 \ldots$$

И по индукции легко проверить, что для любого $i = 1, 2..$

$$\lambda(1, x_1x_2..x_i) = y_1y_2..y_i, \text{ что и требуется.}$$

Перейдем к рассмотрению некоторых частных типов вероятностных автоматов.

Определение 5. *Будем называть вероятностный автомат*

$$A\{\mathfrak{A}, X, Y, \mu(a), \mu(a'x/a, x)\}$$

вероятностным автоматом типа Мили, если для любого (a, x) случайные величины a' и y взаимно независимы, то есть выполняется соотношение

$$\mu(a'y/a, x) = \mu(a'/a, x)\cdot\mu(y/a, x) \tag{19}$$

для любых пар (a, x), $(a'y)$.

Замечание 2. Для того, чтобы вероятностный автомат A был автоматом типа Мили, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке, где

$$\mu(a'/a, x) \neq 0, \tag{20}$$

выполнялось условие

$$\mu(y/a, x, a') = \mu(y/a, x). \tag{21}$$

В самом деле, по определению условной вероятности, имеем

$$\mu(a'y/a, x) = \mu(y/a, x, a')\cdot\mu(a'/a, x).$$

Если выполнено (19), то в силу (20) справедливо соотношение (21). Обратно, если имеет место (21), то безоговорочно верно (19).

В некотором смысле двойственным соотношению (21) является равенство

$$\mu(y/a, x, a') = \mu(y/a'). \tag{22}$$

Определение 6. *Будем называть вероятностный автомат A вероятностным автоматом типа Мура, если случайные величины a' и y связаны соотношением* (22) *в любой точке, где выполнено* (20).

Определение 7. (Шрейдер Ю. А.). *Вероятностным автоматом со случайными реакциями (вероятностным автоматом с детерминированной функцией переходов) называется вероятностный автомат типа Мили, удовлетворяющий условию:*

$$\mu(a'/a, x) = \begin{cases} 1, & \text{если } a' = f(a, x) \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{23}$$

Определение 8. (Шрейдер Ю. А.). *Будем называть вероятностный автомат типа Мили марковским автоматом (вероятностным автоматом с детерминированной функцией выходов), если выполнено условие:*

$$\mu(y/a, x) = \begin{cases} 1, & \text{если } y = \varphi(a, x) \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{24}$$

Теорема 6. *Для того, чтобы автоматный расширенный канал связи* (4) *был представим в вероятностном автомате типа Мили, необходимо и достаточно, чтобы условная вероятностная мера*

$$\frac{\mu(q_1q/p_1p)}{\mu(q_1/p_1)}$$

всюду, где она определена, не зависела от q_1.

Необходимость. Действительно, из определения автомата типа Мили и формулы (6) следует, что для автомата типа Мили

$$\frac{\mu_A(y_1 \ldots y_n/x_1 \ldots x_n)}{\mu_A(y_1 \ldots y_{n-1}/x_1 \ldots x_{n-1})} = \mu_A(y_n/x_1 x_2 \ldots x_n), \quad n = 1, 2 \ldots \tag{25}$$

Непосредственно из этой формулы видно, что условие теоремы выполняется. Обратно, предположим, что вышеупомянутое отношение действительно не зависит от q_1. Но тогда из определения условной меры $\tau_{p_1 q_1}$ в доказательстве теоремы 1 следует, что $P(a'/a, x, y) = P(a'/a, x)$, что равносильно определению автомата типа Мили.

Совершенно аналогичную теорему мы могли бы сформулировать по отношению к автоматной вероятностной последовательности пар $\{x_n y_n\}$. Мы сформулируем эту теорему в другой, как нетрудно проверить, эквивалентной форме.

Теорема 6′. *Для того, чтобы автоматная вероятностная последовательность пар случайных величин $\{x_n y_n\}$ была представима в вероятностном автомате типа Мили, необходимо и достаточно, чтобы последовательности условных мер*

$$\mu(y_1 \ldots y_n/x_1 \ldots x_n), \quad n = 1, 2 \ldots,$$

определяемых процессом, были представимы в виде:

$$\mu(y_1 \ldots y_n/x_1 \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mu(y_i/x_1 x_2 \ldots x_i), \; n = 1, 2 \ldots, \tag{26}$$

где системы чисел

$$\mu(y_i/x_1 x_2 \ldots x_i), \quad i = 1, 2 \ldots$$

определяют условные меры для любой конечной последовательности вида $x_1 x_2 \ldots x_i$, $i = 1, 2 \ldots$.

Прежде чем сравнивать возможности различных типов вероятностных автоматов, мы введем теперь понятие эквивалентности.

Определение 9. Будем говорить, что автомат A инициально-эквивалентен автомату B, если найдется такое начальное состояние a_0 автомата A, что расширенный канал связи, представимый в автомате A при этом начальном состоянии, совпадает с расширенным каналом связи, представимым в автомате B. Будем говорить, что автомат A эквивалентен автомату B, если существует такое начальное распределение на множестве состояний автомата A, что расширенный канал связи, представимый в автомате A, совпадает с расширенным каналом, представимым в автомате B. Если автомат A инициально-эквивалентен (эквивалентен) автомату B при любом его фиксированном начальном состоянии (любом начальном распределении на множестве состояний), то будем говорить, что автоматы A и B инициально-эквивалентны (эквивалентны). Естественно считать эквивалентными те начальные состояния (начальные распределения вероятностей), при которых автоматы оказываются инициально-эквивалентными (эквивалентными).

Определение 10[1]. *Будем говорить, что автомат*

$$A\{\mathfrak{A}, X, Y, \mu_A(a), \mu_A(a'y/a, x)\}$$

$\mathfrak{A}$-гомоморфно ($\mathfrak{A}$-изоморфно) отображается на автомат

$$B\{\mathfrak{B}, X, Y, \mu_B(b), \mu_B(b'y/b, x)\},$$

[1] Мы не даем здесь более общего определения гомоморфизма вероятностных автоматов, так как в настоящей работе оно не будет использовано.

если существует такое однозначное (взаимно-однозначное) отображение $\mathfrak{A} \xrightarrow{\psi} \mathfrak{B}$, $b = \psi(a)$, *что выполняются соотношения*

$$\sum_{b' = \psi(a')} \mu_A(a', y/a, x) = \mu_B(\psi(a'), y/\psi(a), y), \tag{27}$$

$$\mu_A(a', y/a_1, x) \equiv \mu_A(a', y/a_2, x), \text{ если } \psi(a_1) = \psi(a_2). \tag{28}$$

Теорема 7. *Пусть вероятностный автомат* $A\{\mathfrak{A}, X, Y, \mu_A(a', y/a, x)\}$ $\mathfrak{A}$*-гомоморфно отображается на вероятностный автомат* $B\{\mathfrak{B}, X, Y, \mu_B(b', y/b, x)\}$. *Тогда автоматы A и B эквивалентны и инициально-эквивалентны, причем начальному распределению состояний* $\mu_A(a)$ *эквивалентно распределение* $\mu_B(b) = \sum\limits_{b=\psi(a)} \mu_A(a)$.

Пусть $\mu_A(a)$ — некоторое начальное распределение состояний автомата A. В качестве начального распределения состояний автомата B выберем распределение $\mu_B(b)$, где

$$\mu_B(b) = \sum_{b = \psi(a)} \mu_A(a).$$

В частности, если автомат A рассматривается инициальным, то начальному состоянию a сопоставим начальное состояние $b = \psi(a)$. Поскольку, перебирая всевозможные распределения $\mu_A(a)$, мы перебираем и всевозможные распределения $\mu_B(b)$, то доказательство теоремы сводится к доказательству эквивалентности распределений $\mu_A(a)$ и $\mu_B(b)$ (или к доказательству эквивалентности a и $\psi(a)$).

Согласно условию (28) все условные меры $\mu_A(a', y/a, x)$ для a, являющихся прообразами одного и того же b, совпадают при фиксированном x, поэтому получим:

$$\mu_A(y_1 \ldots y_n/x_1 \ldots x_n) = \sum_{a_0 \ldots a_n} \mu_A(a_0) \cdot \mu(a_1 y_1/a_0, x_1) \ldots \mu(a_n y_n/a_{n-1}, x_n) =$$

$$= \sum_{b_0} \sum_{b_1 = \psi(a_0)} \mu_A(a_0) \cdot \sum_{b_1} \sum_{b_1 = \psi(a_1)} \mu(a_1 y_1/a_0, x_1) \ldots \sum_{b_n} \sum_{b_n = \psi(a_n)} \mu(a_n y_n/a_{n-1}, x_n) =$$

$$= \sum_{b_0} \sum_{b_0 = \psi(a_0)} \mu_A(a_0) \cdot \sum_{b_1} \sum_{b_1 = \psi(a_1)} \mu(a_1 y_1/b_0, x_1) \ldots \sum_{b_n} \sum_{b_n = \psi(a_n)} \mu(a_n y_n/b_{n-1}, x_n) =$$

$$= \sum_{b_0 \ldots b_n} \mu_B(b_0) \cdot \mu_B(b_1 y_1/b_0\ x_1) \ldots \mu_B(b_n y_n/b_{n-1}, x_n) =$$

$$= \mu_B(y_1 \ldots y_n/x_1 \ldots x_n)$$

для любого n, что и требовалось доказать.

Дальнейшая аналогия со случаем детерминированных автоматов обрывается. Теорема о том, что необходимым и достаточным условием инициальной эквивалентности двух автоматов A и B является существование третьего автомата C, на который гомоморфно отображаются автоматы A и B, в общем случае неверна. Правда, далее будет показано, что это свойство сохраняется для автоматов со случайными реакциями.

Теорема 8. *Для всякого инициального вероятностного автомата типа Мили A можно построить инициально-эквивалентный ему автомат типа Мура. Если A — конечный автомат, то B также может быть выбран конечным, причем число его состояний равно $m(n+1)$, где n — число состояний, а m — число входных символов автомата A.*

Пусть $\mu_A(a'/a,\ x)$ и $\mu_A(y/a,\ x)$ — условные вероятностные меры, определяющие автомат типа Мили. В качестве множества состояний автомата типа Мура рассмотрим множество пар $b=(a,\ x)$, где a — состояние, а x — значения входов автомата A. Кроме того, для каждого состояния a автомата A введем специальное состояние b_a автомата B. Систему переходных вероятностей определим следующим образом:

$$\mu_B(b'/b_a,\ x)=\begin{cases}1, & \text{если } b'=(a,\ x)\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

$$\mu_B(b'/b,\ x)=\mu_A(a'/a,\ \tilde{x}),\ \text{если } b=(a,\ \tilde{x}) \text{ и } b'=(a',\ x).$$

$$\mu_B(y/b,\ \tilde{x},\ b')=\mu_A(y/\underbrace{a,\ x}_{b'}) \text{ и не зависит от } b \text{ и } \tilde{x}.$$

Имеем:

$$\mu_B(y_1\ldots y_n/b_0,\ x_1\ldots x_n)=\sum_{b_1\ldots b_n}\mu_B(b_1y_1/b_0,\ x_1)\ldots\mu_B(b_ny_n/b_{n-1},\ x_n)=$$

$$=\sum_{b_1\ldots b_n}\mu_B(y_1/b_0,\ x_1,\ b_1)\cdot\mu_B(b_1/b_0,\ x_1)\ldots\mu_B(y_n/b_{n-1},\ x_n,\ b_n)\times$$

$$\times\mu_B(b_n/b_{n-1},\ x_n)=$$

$$=\mu_A(y_1/a_0x_1)\cdot\sum_{b_2\ldots b_n}\prod_{i=2}^{n}\mu_B(b_i/b_{i-1},\ x_i)\cdot\mu_B(y_i/b_{i-1},\ x_i,\ b_i)=$$

$$=\mu_A(y_1/a_0,x_1)\cdot\sum_{a_1\ldots a_{n-1}}\prod_{i=2}^{n}\mu_A(a_{i-1}/a_{i-2},\ x_{i-1})\cdot\mu_A(y_i/a_{i-1},\ x_i)=$$

$$=\sum_{a_1\ldots a_{n-1}}\mu_A(y_1/a_0,x_1)\cdot\mu_A(y_2/a_1,x_2)\ldots\mu(a_1/a_0,\ x_1)\ldots\mu(a_{n-1}/a_{n-2},\ x_{n-1})=$$

$$=\mu_A(y_1\ldots y_n/a_0,\ x_1\ldots x_n).$$

С другой стороны, из определения автомата B ясно, что

$$\mu_B(y/b_{k-1},\ x_k,\ b_k)=\mu_B(y/b_k),$$

следовательно, B — это автомат типа Мура. Число состояний его в случае конечных автоматов подсчитывается элементарно.

Теорема 9. *Для всякого инициального вероятностного автомата типа Мили существует инициально-эквивалентный ему связный*[1] *вероятностный автомат со случайными реакциями.*

Доказательство. Если вероятностный автомат задан, то определяется расширенный канал связи I, представленный в этом автомате. Определим автомат со случайными реакциями B следующим образом:

1. Начальное состояние автомата есть a_0.
2. Множество состояний автомата B является множеством

$$\mathfrak{B}=\{a_0,\ a_0x_1,\ a_0x_1x_2,\ \ldots\}=a_0\omega(x).$$

[1] Связным называется такой инициальный вероятностный автомат со случайными реакциями, в котором для любого состояния найдется входное слово p такое, что начальное состояние a_0 переводится в это состояние словом p: $a=a_0p$.

3.
$$\mu_B(y/b_1, x) = \frac{\mu_A(y_1 .. y_{n-1} y/a_0, x_1 .. x_{n-1} x)}{\mu_A(y_1 .. y_{n-1}/a_0, x_1 .. x_{n-1})}, \text{ если } b = (a_0, x_1 .. x_{n-1})$$
$$\text{и } \mu(y_1 .. y_{n-1}/a_0 x_1 .. x_{n-1}) \neq 0.$$

4.
$$\mu_B(b'/b, x) = \begin{cases} 1, & \text{если } b = (a_0, x_1 .. x_{n-1}) \text{ и } b' = (a_0 x_1 .. x_{n-1} x) \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Согласно определению 7 мы получили инициальный вероятностный автомат со случайными реакциями. Докажем, что он представляет при начальном значении a_0 тот же расширенный канал связи, что и исходный автомат A. В самом деле

$$\mu_B(y_1 .. y_n/a_0, x_1 .. x_n) = \sum_{b_1 .. b_n} \prod_{i=1}^{n} \mu_B(y_i/b_{i-1}, x_i) \cdot \mu_B(b_i/b_{i-1}, x_i) =$$
$$= \mu_A(y_1/a_0, x_1) \cdot \prod_{i=2}^{n} \mu_B(y_i/b_{i-1}, x_i), \text{ где } b_i = (a_0, x_1 .. x_i).$$

Положим, что $\mu_A(y_1 .. y_n/a_0, x_1 .. x_n) \neq 0$. Тогда для любого $i \leqslant n$ будем иметь также, что

$$\mu(y_1 .. y_i/a_0, x_1 .. x_i) \neq 0, \quad i = 1, 2... n,$$

поэтому

$$\mu_B(y_1 .. y_n/a_0, x_1 .. x_n) = \mu_A(y_1/a_0, x_1) \cdot \prod_{i=2}^{n} \frac{\mu_A(y_1 .. y_i/a_0, x_1 .. x_i)}{\mu_A(y_1 .. y_{i-1}/a_0, x_1 .. x_{i-1})} =$$
$$= \mu_A(y_1 .. y_n/a_0, x_1 .. x_n).$$

Если $\mu_A(y_1 .. y_n/a_0, x_1 .. x_n) = 0$, то найдется минимальное m такое, что

$$\mu_A(y_1 .. y_m/a_0, x_1 .. x_m) \neq 0, \text{ а } \mu_A(y_1 .. y_{m+1}/a_0 x_1 .. x_{m+1}) = 0.$$

Но это означает, что соответствующее

$$\mu_B(y_{m+1}/b_m, x_{m+1}) = 0,$$

и поэтому $\mu_B(y_1 .. y_n/a_0, x_1 .. x_n) = 0$ также. Покажем, что полученный автомат связен. Пусть $b = a_0 x_1 x_2 .. x_i$. Тогда легко видеть, что слово $p = x_1 x_2 .. x_i$ переводит начальное состояние a_0 в состояние b. Так как все состояния автомата B представимы в виде $b = a_0 p$, то доказательство завершено.

Теорема 10. *Пусть автоматный расширенный канал*

$$I\{X, Y, \mu(q/p)\}$$

представлен в инициальном вероятностном автомате со случайными реакциями

$$A\{\mathfrak{A}, X, Y, \mu(y/a, x), f(a, x)\}.$$

Тогда справедливо разложение: для $\mu(y_1 .. y_n/x_1 .. x_n) \neq 0$

$$\mu(y_1 .. y_n/x_1 .. x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mu_A(y_i/a_{i-1}, x_i), \text{ где } a_i = f(a_{i-1}, x_i), \tag{29}$$

которое определяется однозначно для любых инициальных автоматов со случайными реакциями, представляющих заданный канал.

Из определения (7) вероятностного автомата со случайными реакциями и формулы (6) разложение (29) следует немедленно, причем будем иметь, что $a_i = f(a_{i-1}, x_i)$, $i = 1, .. n$. Но, с другой стороны, как легко видеть, множитель, стоящий на i-том месте, равен отношению

$$\frac{\mu(y_1 .. y_i / x_1 .. x_i)}{\mu(y_1 .. y_{i-1} / x_1 .. x_{i-1})},$$

которое не зависит от представляемого автомата. Отсюда следует второе утверждение теоремы.

Определение 11. Вероятностный автомат со случайными реакциями будем называть максимальным, если функция переходов его взаимно-однозначна, то есть из соотношения $(a_i x_j) \neq (a'_i x'_j)$ следует: $f(a_i x_j) \neq f(a'_i x'_j)$, $\overline{(i, j)}$.

Теорема 11. *Все связные максимальные вероятностные автоматы со случайными реакциями, инициально-эквивалентные одному и тому же вероятностному автомату, $\mathfrak{A}$-изоморфны между собой.*

Действительно, пусть A и B два связных вероятностных автомата со случайными реакциями, инициально-эквивалентных одному и тому же автомату. Отсюда следует, что существуют такие начальные состояния a_0 и b_0 соответственно, что автоматы A и B представляют при этих начальных состояниях один и тот же расширенный канал связи. Установим соответствие между множествами состояний автоматов A и B следующим образом: a_0 соответствует b_0. Если a_{i-1} соответствует b_{i-1}, то $a_i = f_A(a_{i-1}, x)$ соответствует $b_i = f_B(b_{i-1}, x)$, $x \in X$. В силу связности и максимальности автоматов это соответствие будет определено для всех a, $a \in \mathfrak{A}$, и b, $b \in \mathfrak{B}$, и взаимно-однозначно. Обозначим это соответствие через ψ: $a = \psi(b)$.

Далее рассмотрим произвольное $\mu_A(y/a, x_1)$. Пусть слово $p = x_1 x_2 .. x_{n-1}$ переводит a_0 в a. Положим, что $\mu_A(y_1 .. y_n / a_0, x_1 .. x_n) \neq 0$. Тогда имеем:

$$\mu(y_1 .. y_n / x_1 .. x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mu_A(y_i / a_{i-1}, x_i) = \prod_{i=1}^{n} \mu_B(y_i / b_{i-1}, x_i)$$

$$a_i = f_A(a_{i-1}, x_i), \; b_i = f_B(b_{i-1}, x_i).$$

В силу однозначности разложения (теорема 10) мы получим для любого номера i:

$$\mu_A(y_i / a_{i-1}, x_i) = \mu_B(y_i / b_{i-1}, x_i) \; i = 1, 2...$$

Пусть теперь какое-либо $\mu_A(y_i / a, x_i) = 0$. Тогда непременно и соответствующее $\mu_B(y_i / b, x_i) = 0$, так как в противном случае, рассмотрев последовательность $y_1 y_2 .. y_i$ такую, что

$$\mu(y_1 .. y_i / x_1 .. x_i) = \prod_{i=1}^{i} \mu_B(y_i / b_{i-1}, x_i) \neq 0, \; b_{i-1} = b,$$

мы придем к тому, что $\mu_A(y_i / a_{i-1}, x_i) \neq 0$, $a_{i-1} = a$. Так мы получили, во-первых, что

$$\mu_A(y / \psi(b), x) \equiv \mu_B(y / b, x),$$

и, во-вторых, что

$$\psi[f_A(\psi(b), x)] \equiv f_B(b, x),$$

откуда уже нетрудно усмотреть $\mathfrak{A}$-изоморфизм A и B.

Теорема 12. *Для того, чтобы два вероятностных автомата A и B со случайными реакциями были инициально-эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы существовал автомат со случайными реакциями, на который $\mathfrak{A}$-гомоморфно отображаются автоматы A и B.*

Для доказательства теоремы понадобится

Лемма 3. *Если два состояния a и b автомата со случайными реакциями (автоматов со случайными реакциями) эквивалентны между собой, то будут эквивалентны и последующие состояния, то есть состояния $a' = f_A(a, x)$, $b' = f_A(b, x)$ (состояния $a' = f_A(a, x)$ и $b' = f_B(b, x)$) при одном и том же x.*

Из эквивалентности состояний a и b вытекает, что

$$\mu_A(y_1 .. y_n/a, x_1 .. x_n) \equiv \mu_B(y_1 .. y_n/b, x_1 .. x_n).$$

Это означает, что тождество

$$\prod_{i=1}^{n} \mu_A(y_i/a_{i-1}, x_i) = \prod_{i=1}^{n} \mu_B(y_i/b_{i-1}, x_i),$$

где

$$a_0 = a,\ b_0 = b,\ a_i = f_A(a_{i-1}, x_i),\ b_i = f_B(b_{i-1}, x_i),$$
$$i = 1, 2 \ldots n$$

справедливо при любом n. В частности, фиксируем такое значение y_1, чтобы выполнялось условие $\mu_A(\overline{y}_1/a_1, x_1) \neq 0$. Тогда, ввиду того, что при $n = 1$ мы получаем:

$$\mu_A(y_1/a_1, x_1) \equiv \mu_B(y_1/b, x_1),$$

будет справедливо и соотношение:

$$\mu_A(\overline{y}_1/a_1, x_1) = \mu_B(\overline{y}_1/b, x_1) \neq 0,$$

но тогда это означает, что справедливо тождество:

$$\mu_A(y_2 .. y_n/a_1, x_2 .. x_n) \equiv \mu_B(y_2 .. y_n/b_1, x_2 .. x_n), \quad n = 1, 2 \ldots,$$

что по определению означает эквивалентность a_1 и b_1.

Теперь перейдем к доказательству теоремы. Разобьем множества $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ на классы эквивалентных между собой состояний γ. В силу транзитивности свойства эквивалентности между классами эквивалентности множеств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ существует взаимно-однозначное соответствие. Определим вероятностный автомат со случайными реакциями следующим образом:

1. В качестве множества состояний автомата рассмотрим множество классов эквивалентности множества состояний, например, автомата A. Функцию переходов

$$\gamma' = \varphi(\gamma, x)$$

определим так, что γ' — тот класс эквивалентности, куда входит состояние $a' = f_A(a, x)$, причем a — произвольное состояние из класса эквивалентности γ. Лемма 2 гарантирует корректность определения функции φ. Действительно, если даже определить γ разными эквивалентными состояниями, то γ' будет определяться однозначно, так как последующие состояния тоже будут эквивалентны.

2. Далее положим

$$\mu_C(y/\gamma, x) = \mu_A(y/a, x),\ a \in \gamma.$$

Это определение также корректно, так как условные вероятности $\mu_A(y/a, x)$ для всех эквивалентных состояний совпадают.

Итак, мы получили определение некоторого вероятностного автомата C со случайными реакциями. Легко видеть, что в силу взаимно-однозначного соответствия классов эквивалентности состояний автоматов A и B, а также в силу тождества

$$\nu_A(y/a, x) \equiv \nu_B(y/b, x),$$

имеющего место для эквивалентных состояний автоматов a и b, определение автомата C не зависит от того, какой из автоматов, A или B, был выбран в качестве исходного. Наконец, очевидно, что отображение ψ, определяемое отождествлением всех эквивалентных состояний автоматов A и B, определяет гомоморфное отображение автоматов A и B на C, что доказывает необходимость условия теоремы. Достаточность следует из теоремы 7 ввиду транзитивности свойства эквивалентности.

Определение 12. Будем называть вероятностный автомат минимальным по состояниям, если он не имеет эквивалентных состояний.

Следствие 1. Минимальные автоматы со случайными реакциями, инициально-эквивалентные одному и тому же вероятностному автомату, изоморфны между собой.

Будучи инициально-эквивалентны одному и тому же автомату, рассматриваемые автоматы со случайными реакциями будут инициально-эквивалентны друг другу. Но так как эти автоматы не имеют эквивалентных состояний, то отображение ψ теоремы 12, определяющееся отождествлением эквивалентных состояний, будет взаимно-однозначным. Отсюда следует $\mathfrak{A}$-изоморфизм автоматов третьему автомату и, следовательно, $\mathfrak{A}$-изоморфизм между собой.

Следствие 2. Для любого вероятностного автомата типа Мили определяется однозначно с точностью до изоморфизма инициально-эквивалентный ему минимальный вероятностный автомат со случайными реакциями (максимальный вероятностный автомат со случайными реакциями).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дж. Фон-Нейман. Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент. Сб. „Автоматы", 1956.
2. Э Ф. Мур, К. Э. Шеннон. Надежные схемы из ненадежных реле. Кибернетический сборник, № 1, 1960.
3. О. Лоуэншусс. Восстанавливающие органы в избыточных автоматах. Кибернетический сборник, № 2, 1961.
4. Л. Лофгрен. Сложные автоматы и методы увеличения их надежности за счет избыточности. „Congr. internat. automat. Paris, 1956", Paris, Bruxelles, 1959.
5. Дж. Д. Кован. Многозначные логики и надежные автоматы. Oxford — London — New York — Paris. Pergamon Press, 1962.
6. У. Пирс. Применение адаптивных решающих элементов к повышению надежности избыточных схем. IRE Internat. Convent. Rec., 1962, 10, № 4.
7. К. де Леу, Э. Ф Мур, К. Э. Шеннон и Н. Шапиро. Вычислимость на вероятностных машинах. Русский перевод. Сб. „Автоматы", 1956.
8. С. В. Яблонский. Основные понятия кибернетики". Сб. „Проблемы кибернетики" 2, 1959.
9. Ю. А. Шрейдер. Модели обучения и управляющие системы. Приложение к книге „Стохастические модели обучения", Р. Буш, Ф. Мостеллер. Перевод с английского, 1962.
10. Э. Ф. Мур. Умозрительные эксперименты с последовательностными машинами. Перевод с немецкого. Сб. „Автоматы", 1956.
11. G. H. Mealy. A method for synthesizing sequential circuits. BSTJ, 34, 1955.
12. Ю. Т. Медведев. О классе событий, допускающих представление, в конечном автомате. Сб. „Автоматы", приложение, 1956.
13. В. М. Глушков. Абстрактная теория автоматов. УМН, том 16, вып. 5, 1961.
14. Р. Г. Бухараев. Об управляемых генераторах случайных величин. Сб. „Вероятностные методы и кибернетика", II. Изд. КГУ, 1963.
15. Дж. Дуб. Вероятностные процессы. ИЛ, М., 1956.