ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 2 (525)

УДК 517.547

Ф.Н. ГАРИФЬЯНОВ

О ТРЕХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ПЛОСКОСТИ С T-ОБРАЗНЫМ РАЗРЕЗОМ

Возьмем два интервала $L_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $L_2 = (0, i)$ и обозначим через D плоскость с разрезом по $\Gamma = L_1 \cup L_2$. Введем отличные от тождественного сдвиги

$$\sigma_k(z) = z + a_k, \quad k = \overline{1, N}, \tag{1}$$

круг $B_\varepsilon : |z| < \varepsilon$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и множество

$$A = \bigcup_{k=1}^{N} \sigma_k^{-1}(\overline{\Gamma}). \tag{2}$$

Цель статьи — исследование линейного разностного уравнения (ЛРУ)

$$(V\Omega)(z) \equiv \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \Omega[\sigma_k(z)] = g(z), \quad z \in B_\varepsilon, \tag{3}$$

в классе F функций, голоморфных в D и исчезающих на бесконечности. Считаем, что $\forall k$ $\lambda_k \neq 0$ и свободный член голоморфен в B_ε. Граничные значения $\Omega^{\pm}(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера на любом компакте $\overline{\theta} \subset \Gamma$, не содержащем концов интервалов ($\Omega^{\pm} \in H_\nu(\overline{\theta})$, $0 < \nu \leq 1$). В них у решения допускаются, самое большее, логарифмические особенности.

Такая постановка задачи приводит к двум принципиально разным типам ЛРУ. Допустим вначале, что множество (2) не разделяет точки 0 и ∞. Тогда в соотношении (3) круг B_ε можно заменить на некоторую область, содержащую B_ε и эти точки, т. е. свободный член голоморфен в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки и $g(\infty) = 0$. Оператор V является реализацией оператора свертки и уравнение (3) исследуется с помощью преобразования Бореля ([1], гл. 1, § 1). В частности, соответствующее однородное уравнение

$$(V\Omega)(z) = 0, \quad z \in B_\varepsilon,$$

имеет лишь тривиальное решение. Для разрешимости ЛРУ (1) необходимо, чтобы частное

$$P(z) = G(z) \Big/ \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \exp(-a_k z) \tag{4}$$

было целой функцией экспоненциального типа (ц. ф. э. т.). Здесь $G(z)$ — ц. ф. э. т., ассоциированная по Борелю с нижней функцией $g(z)$. Это же условие является и достаточным, если только ассоциированная по Борелю с ц. ф. э. т. (4) нижняя функция $\Omega(z) \in F$.

Итак, данный тип сводится к уже известным операторам свертки (более подробно см., напр., [2]). Поэтому впредь считаем, что множество (2) разделяет точки 0 и ∞. Рассмотрим три частных случая уравнения (1) и покажем, что картина разрешимости неоднозначна в зависимости от подбора коэффициентов и фиксации сдвигов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 02-01-00914).

1. Пусть $N = 6$ и $\lambda_k = (-1)^k$, причем в формуле (1) имеем $a_k = \{-\frac{1}{2} - \frac{i}{2} + (k-1)i,\ k = \overline{1,3};\ \frac{1}{2} + \frac{3i}{2} + (4-k)i,\ k = \overline{4,6}\}$ (случай А). Очевидно, что функция $g(z)$ должна быть голоморфна не только в круге B_ε, но и в квадрате R с вершинами $t_1 = -t_3 = -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$, $t_2 = -t_4 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$, пронумерованными в порядке положительного обхода его границы. Считаем, что $g^+(t) \in H(\bar{l})$, где l — произвольная сторона R. Будем искать решения ЛРУ (3) из класса F в виде интеграла типа Коши

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(\tau)(\tau - z)^{-1} d\tau \tag{5}$$

с неизвестной гельдеровской плотностью. Тогда вместо ЛРУ (3) получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$(T\varphi)(t) \equiv \gamma_t \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(\tau) K(t,\tau) d\tau = g_1(t). \tag{6}$$

При $t \in L_2$ имеем $\gamma_t \equiv 1$, $g_1(t) = g^+(t - \frac{i}{2} + \frac{1}{2}) + g^+(t - \frac{i}{2} - \frac{1}{2})$,

$$K(t,\tau) = \omega(1) - \omega(-1) + \omega(-1-i) - \omega(1-i) + \omega(i-1) - \omega(i+1), \tag{7}$$

причем $\omega(a) = (\tau - t + a)^{-1}$. Действительно, устремим в уравнении (3) точку $\sigma_2(z)$ к некоторой точке $t \in L_2$. Затем устремим к этой же точке с другой стороны разреза точку $\sigma_5(z)$. Складывая два эти равенства и пользуясь формулами Сохоцкого–Племеля для интеграла типа Коши (5), придем к соотношению (6).

Аналогично, при $t \in L_1$ имеем $\gamma_t = -\operatorname{sign} t$, $g_1(t) = g^+(t - \frac{i}{2}) + g^+(t + \frac{i}{2})$,

$$K(t,\tau) = \begin{cases} \omega(-2i) - \omega(1-2i) + \omega(i) - \omega(1+i), & t > 0; \\ \omega(-1-2i) - \omega(-2i) + \omega(i-1) - \omega(i), & t < 0. \end{cases} \tag{8}$$

При этом пользуемся формулами Сохоцкого–Племеля, устремляя, например, точки $\sigma_1(z)$ и $\sigma_2(z)$ к некоторой точке $t < 0$ с разных сторон разреза.

Заметим, что ЛРУ (3) может быть записано в виде интегрального уравнения

$$B(\varphi)(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(\tau) E(\tau - z) d\tau = g(z), \quad z \in R, \tag{9}$$

с ядерной функцией

$$E(z) = \sum_{k=1}^{6} [\sigma_k^{-1}(z)]^{-1}.$$

Лемма 1. *Однородное уравнение Фредгольма*

$$(T\varphi)(t) = 0 \tag{10}$$

имеет лишь тривиальное решение.

Доказательство. Представим интегральное слагаемое в формуле (10) в виде суммы двух интегралов по отрезкам L_1, L_2 и оценим его ядро. Пусть вначале $t \in L_2$. Возможны два случая.

1) $\tau \in L_2$. Тогда $\tau - t = i\theta$, $|\theta| < 1$, причем $K(t,\tau) = 2[(q+1)^{-1} - 2(q+2)(q^2+4)^{-1}]$, где $q = \theta^2$. Отсюда $|K| \le 1{,}4$.

2) $\tau \in L_1$. Здесь ядро (7) запишем в виде $K(t,\tau) = 2[I(h+i) + I(h-i) - I(h)]$, где $h = \tau - t$ и $I(h) = (h^2 - 1)^{-1}$. Выполняются неравенства $|I(h+i) - I(h)| \le \sqrt{2}$ (т. к. $|2ih - 1| \le \sqrt{2}$, $|I(h)|^{-1} |I(h+i)|^{-1} \ge 1$) и $|I(h-i)| \le 4/7$.

Из полученных оценок следует, что $\varphi \equiv 0$. Осталось рассмотреть случай $t \in L_1$. Считаем, не ограничивая общности, что $t > 0$.

1) $\tau \in L_1$. Тогда $\tau - t = \theta$, $\theta \in (-1,1)$. Используя первую из формул (8), имеем

$$|K| \le |\omega(-2i)\omega(1-2i)| + |\omega(i)\omega(1+i)| \le 1{,}25.$$

2) $\tau \in L_2$. С учетом предыдущей оценки достаточно заметить, что $|K| < 4$, т.к. модуль знаменателя каждого из четырех слагаемых в формуле (8) не меньше единицы.

Итак, и в этом случае $\varphi \equiv 0$. $\square$

Следствие. Интегральное уравнение (6) безусловно разрешимо и имеет единственное решение

$$\varphi = T^{-1} g_1. \tag{11}$$

Действительно, рассмотрим оператор T на множестве функций, непрерывных на замыкании каждого из интервалов L_1 и L_2, с естественным образом введенной нормой $\|\varphi\| = \max|\varphi(t)|$, $t \in \Gamma$. Из полученных ранее оценок следует применимость принципа сжимающих отображений к интегральному уравнению (6), т. к. это множество является банаховым пространством. Остается заметить, что в силу "хороших свойств" ядра (7) и ограничения, наложенного на правую часть уравнения (6), это решение будет гельдеровской функцией.

Теперь докажем, что (6) $\Leftrightarrow$ (3). Введем на ∂R инволютивный оператор сдвига $W : f(t) \to f[\alpha(t)]$. Сдвиг $\alpha(t)$ индуцирован на каждой стороне порождающими преобразованиями соответствующей двоякопериодической группы и преобразованиями, обратными к ним. Функция (9) голоморфна в R и (6) $\Rightarrow WB^+\varphi + B^+\varphi = Wg^+ + g^+ \Rightarrow$ (9). Последнее следует из теории задачи Карлемана для прямоугольника [3]. Сформулируем окончательный результат.

Теорема 1. *В случае* A *ЛРУ* (3) *безусловно разрешимо и имеет единственное решение, представимое в виде интеграла типа Коши* (5) *с плотностью* (11).

2. Пусть теперь в ЛРУ, рассмотренном в разделе 1, имеем $\forall k \quad \lambda_k = 1$ (случай B). Устремим к некоторой точке $t \in L_2$ точку $\sigma_2(z)$, а затем с другой стороны разреза — точку $\sigma_5(z)$. Вычитая полученные равенства (3) друг из друга и пользуясь формулами Сохоцкого–Племеля, придем к интегральному уравнению (6), где $\gamma_t \equiv 1$ и $g_1(t) = g^+(t - \frac{i}{2} + \frac{1}{2}) - g^+(t - \frac{i}{2} - \frac{1}{2})$, причем $K(t,\tau) = \omega(-1) - \omega(1) + \omega(-1-i) - \omega(1-i) + \omega(i-1) - \omega(1+i)$. Аналогично при $t \in L_1$ имеем $\gamma_t \equiv 1$, $g_1(t) = g^+(t-i) - g^+(t+i)$ и

$$K(t,\tau) = \begin{cases} \omega(i) + \omega(1+i) - \omega(-2i) - \omega(1-2i), & t > 0; \\ \omega(i-1) + \omega(i) - \omega(-1-2i) - \omega(-2i), & t < 0. \end{cases}$$

Докажем, что в случае B ЛРУ (3) не может быть безусловно разрешимо. Предположим противное. Тогда уравнение (9) разрешимо, в частности, и при $g(z) \equiv 1$, т.е. его решение φ удовлетворяет соответствующему уравнению (6) при $g_1 \equiv 0$. Исходя из альтернатив Фредгольма, имеем

$$\int_\Gamma g_1(t)\psi(t)dt = 0,$$

где $\psi(t)$ — нетривиальное решение союзного уравнения. Другими словами,

$$\int_{\partial R} g^+(t)\psi_1(t)dt = 0, \tag{12}$$

причем на нижней стороне $\psi_1(t) = \psi(t + \frac{i}{2})$, на левой стороне $\psi_1(t) = \psi(t + \frac{i}{2} + \frac{1}{2})$ и

$$\psi_1 = W\psi_1. \tag{13}$$

Поскольку равенство (12) справедливо для любой голоморфной в R функции $g(z)$, то отсюда следует голоморфность в R и функции $\psi_1(z)$, т.е. $\psi_1(z)$ постоянная в силу (13). Но константа, отличная от нуля, не является решением союзного уравнения (проверяется непосредственно). Пришли к противоречию. Итак, ЛРУ в случае B имеет конечное число условий разрешимости, но не менее одного.

3. Пусть в уравнении (3) теперь имеем $N = 10$ и $\forall k \quad \lambda_k = 1$, причем $a_1 = -i - \frac{1}{2}$, $a_2 = -i - \frac{3}{2}$, $a_3 = -\frac{3}{2}$, $a_4 = i - \frac{3}{2}$, $a_5 = i - \frac{1}{2}$, $a_{j+5} = -a_j$, $j = \overline{1,5}$ (случай C). Свободный член должен быть голоморфен внутри прямоугольника, образованного прямыми $\mathrm{Re}\,z = \pm\frac{3}{2}$, $\mathrm{Im}\,z = \pm 1$, за исключением двух горизонтальных $[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ и двух вертикальных $[-i - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$, $[-i + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ отрезков. Это множество голоморфности обозначим через R_1.

Устремим к некоторой точке $t \in L_2$ точку $\sigma_5(z)$, а затем с другой стороны разреза — точку $\sigma_6(z)$. Вычитая полученные равенства (3) друг из друга и пользуясь формулами Сохоцкого–Племеля, придем к интегральному уравнению (6), где $\gamma_t \equiv 1$ и $g_1(t) = g^+(t - i + \frac{1}{2}) - g^+(t - i - \frac{1}{2})$, причем

$$K(t,\tau) = \omega(-2) - \omega(2) + \omega(i-2) - \omega(i+2) + \omega(i+1) - \omega(i-1) + \omega(2i-2) - \omega(2i+2).$$

Пусть $t \in L_1$, причем для определенности $t < 0$. В соотношении (3) устремим к этой точке точку $\sigma_5(z)$, а затем с другой стороны разреза — точку $\sigma_1(z)$. Вычитая эти равенства друг из друга, получим уравнение (6), где $\gamma_t \equiv 1$, $g_1(t) = g^+(t - i - \frac{1}{2}) - g^+(t + i - \frac{1}{2})$, $K(t,\tau) = \omega(2i+1) + \omega(i+1) - \omega(1-2i) - \omega(1-i) + \omega(2i) - \omega(-2i) + \omega(2i-1) - \omega(-1-2i) + \omega(2i-2) + \omega(i-1) - \omega(-2i-2) - \omega(-1-i)$.

Докажем, что ЛРУ (3) в случае С имеет счетное число условий разрешимости. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода (6) имеет не более чем конечное число условий разрешимости (12). Даже в предположении, что условие (12) выполнено, не получим, вообще говоря, (6) $\Rightarrow$ (11). Действительно, имеем

$$B^+\varphi = WB^+\varphi + g^+ - Wg^+. \tag{14}$$

Здесь оператор W индуцирован сдвигом

$$\alpha(t) = \left\{t+1,\ t \in \left(-i-\frac{1}{2},\, -\frac{1}{2}\right);\ t+2i,\ t \in \left(-i-1,\, -i-\frac{1}{2}\right) \cup \left(-i+\frac{1}{2},\, -i+1\right)\right\},$$

т. е. краевое условие (14) задано не на всей границе ∂R_1, а только на некоторой ее части. Поэтому (14) $\Rightarrow$ $(B\varphi)(z) = g(z) + \theta(z)$, $z \in R_1$. Функции $\theta(z)$ голоморфны в R_1 и удовлетворяют условию $\theta = W\theta$. Множество таких функций бесконечно. Поэтому, кроме конечного числа условий разрешимости вида (12), должны выполняться равенства $(B\varphi)^{(k)}(0) = g^{(k)}(0)$, $k = \overline{0,\infty}$. Подведем окончательный итог.

Теорема 2. *Пусть множество* (2) *разделяет точки* 0 *и* ∞. *Тогда ЛРУ* (3) *может быть как безусловно разрешимо* (*раздел* 1), *так и иметь конечное или бесконечное число условий разрешимости* (*соответственно разделы* 2 *и* 3).

Литература

1. Бибербах Л. *Аналитическое продолжение.* – М.: Наука, 1967. – 240 с.
2. Напалков В.В. *Уравнение свертки в многомерных пространствах.* – М.: Наука, 1982. – 240 с.
3. Чибрикова Л.И. *О граничных задачах для прямоугольника* // Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1963. – Т. 123. – № 9. – С. 15–39.

Казанский государственный энергетический университет

Поступила 01.03.2004